



Le but de ce chapitre est de redéfinir le concept de fonctions dérivables et de démontrer les théorèmes qui utilisent les fonctions dérivables que nous avons admis lors du chapitre 2.

Table des matières

1 Fonctions dérivables	2
1.1 Dérivabilité	2
1.2 Dérivabilité à gauche et à droite	2
1.3 Opérations sur les fonctions dérivables	3
2 Théorème de Rolle et théorème des accroissements finis	3
3 Applications de la dérivabilité	4
3.1 Extrema locaux et globaux	4
3.2 Application aux suites récurrentes	5
3.3 Caractérisation de la monotonie	5
3.4 Fonctions convexes	6
4 Dérivées successives et fonctions de classes \mathcal{C}^k	6
5 Extension aux fonctions à valeurs complexes	8
5.1 Définition de la dérivabilité des fonctions à valeurs complexes	8
5.2 Ce qui est encore valable	8
5.3 Ce qui n'est plus valable	8
6 Méthodes	8

Dans tout ce chapitre, sauf mention contraire, I est un intervalle de \mathbb{R} non vide et non réduit à un point et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une application, a et b deux réels tels que $a < b$.

1 Fonctions dérivables

1.1 Dérivabilité



Définition du taux d'accroissement et du nombre dérivé

On appelle **taux d'accroissement** de f entre $a \in I$ et $b \in I$ avec $a \neq b$: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, c'est la pente de la droite reliant les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

La fonction f est dite **dérivable** en $a \in I$ si $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \mathbb{R}$, dans ce cas, on pose $f'(a) = \ell$, $f'(a)$ est appelé **nombre dérivé** de f en a .

Remarque 1. Cela est équivalent à ce que $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \ell \in \mathbb{R}$ et dans ce cas $\ell = f'(a)$.

Exemple 1. Montrer que $x \mapsto x^2$ est dérivable pour tout $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.



Définition

Si f est dérivable en $a \in I$, la fonction $x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a)$ est appelée **approximation affine de la fonction f au point a** . Sa courbe est appelée **tangente** à f au point d'abscisse a .

Remarque 2. Ainsi, $x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a)$ est la meilleure approximation affine de f en a .



Définition de la dérivabilité sur un intervalle

f est dite dérivable sur I si pour tout $a \in I$, f est dérivable en a . On appelle alors **fonction dérivée** : $f' : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f'(x) \end{cases}$



Théorème n° 1 : la dérivabilité implique la continuité

Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

Si f est dérivable sur I , alors f est continue sur I .



Péril imminent : la réciproque n'est vraie que dans vos rêves

La réciproque est fausse. Penser à $x \mapsto \sqrt{x}$.

1.2 Dérivabilité à gauche et à droite



Définition de la dérivabilité à gauche et à droite

1. On dit que f est **dérivable à gauche** en $a \in I$ si $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a^-} \ell \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, on pose $f'_g(a) = \ell$.

2. On dit que f est **dérivable à droite** en $a \in I$ si $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \ell' \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, on pose $f'_d(a) = \ell'$.

Remarque 3. Si f est dérivable à droite et à gauche alors f admet au point a deux demi-tangentes.

Exemple 2. Montrer que la fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable à gauche et à droite en 0.



Proposition n° 1 : lien entre être dérivable, dérivable à droite et à gauche

Soit $a \in \overset{\circ}{I}$, alors f est dérivable en a ssi f est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$.
Dans ce cas, on a $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

Exemple 3. Que penser de la fonction $x \mapsto |x|$?

1.3 Opérations sur les fonctions dérivables



Proposition n° 2 : opérations sur les fonctions dérivables (somme, produit, division)

Soient f et g dérivables sur I .

1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f + g$ est dérivable sur I et

$$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$$

2. La fonction fg est dérivable sur I et

$$(fg)' = f'g + fg'$$

3. Si g ne s'annule pas sur I , $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$



Proposition n° 3 : composition de fonctions dérivables

Soient $f: I \rightarrow J$ dérivable et $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$.

Exemple 4. Soient y dérivable sur I et $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, A une primitive de a sur I . Justifier la dérivabilité et dériver $x \mapsto y(x)e^{A(x)}$



Théorème n° 2 : dérivabilité de la bijection réciproque

Soit $f: I \rightarrow J$ une bijection. Soit $b \in J$, si f est dérivable en $a = f^{-1}(b)$ et que $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en b et $f^{-1}'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

Remarque 4. La pente de la tangente f^{-1} en b est l'inverse de la pente de f en a . La condition $f'(a) \neq 0$ est indispensable pour garantir que f^{-1} soit dérivable en b .

Exemple 5. Les fonctions arcsin et arccos sont dérivables sur $] -1; 1 [$ et $\arcsin'(x) = -\arccos'(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$ pour $x \in] -1; 1 [$, arctan est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = (1 + x^2)^{-1}$.

2 Théorème de Rolle et théorème des accroissements finis



Théorème n° 3 de Rolle

Soit $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

1. f est continue sur $[a; b]$.

2. f est dérivable sur $]a; b[$.

3. $f(a) = f(b)$

Alors, il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Remarque 5. Le réel c n'est pas nécessairement unique.



Théorème n° 4 des accroissements finis

Soit $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

1. f est continue sur $[a; b]$.
2. f est dérivable sur $]a; b[$.

Alors, il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Remarque 6. Ce théorème fait le lien entre la dérivée et le taux d'accroissement sans limite. Le théorème de Rolle n'est qu'un cas particulier de ce théorème.

Exemple 6. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sin(x) \leq x$.



Corollaire : inégalité des accroissements finis

Soient $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $M \geq 0$ tels que

1. f est continue sur I .
2. f est dérivable sur \dot{I} .
3. $\forall x \in \dot{I} \quad |f'(x)| \leq M$

Alors, pour tout $(x, x') \in I^2$, $|f(x) - f(x')| \leq M|x - x'|$ (f est M -lipschitzienne).

Exemple 7. Montrer que la fonction sinus est 1-lipschitzienne sur \mathbb{R} .



Théorème n° 5 de la limite de la dérivée

Soit $a \in I$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, supposons que

1. f est continue sur I .
2. f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$.
3. $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \mathbb{R}$

Alors, f est dérivable en a , $f'(a) = \ell$ et f' est continue en a .

Remarque 7. Si $\ell = \pm\infty$, alors f n'est pas dérivable en a et admet une tangente verticale en a .

Exemple 8. Posons $f(x) = x^3 \sin(1/x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$. Montrer que f est prolongeable par continuité sur \mathbb{R} et que ce prolongement est dérivable sur \mathbb{R} .

3 Applications de la dérivabilité

3.1 Extrema locaux et globaux



Définition des extrema globaux

On dit que f admet un **maximum global** en a si $f(a)$ majore f , i.e. : $\forall x \in I \quad f(x) \leq f(a)$

On dit que f admet un **minimum global** en a si $f(a)$ minore f , i.e. : $\forall x \in I \quad f(a) \leq f(x)$

On dit que f admet un **maximum local** en $a \in I$ lorsque $f(a)$ est localement un maximum de f :

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \cap [a - \delta; a + \delta] \quad f(x) \leq f(a)$$

On dit que f admet un **minimum local** en $a \in I$ lorsque $f(a)$ est localement un minimum de f :

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \cap [a - \delta; a + \delta] \quad f(a) \leq f(x)$$

Un **extremum local/global** de f est un minimum local/global ou un maximum local/global de f .

**Théorème n° 6 : condition nécessaire pour admettre un extremum local**

Soit f dérivable sur I . Si f admet un extremum local en $a \in \overset{\circ}{I}$, alors $f'(a) = 0$.

**Attention la réciproque est fautive**

Penser à la fonction $x \mapsto x^3$.

**Comment déterminer les extrema d'une fonction dérivable ?**

En résolvant l'équation $f'(x) = 0$, on connaît les extrema locaux **possibles**. Il faut ensuite les étudier cas par cas. De plus, une extrémité de I peut fournir un extremum sans que sa dérivée soit nulle.

3.2 Application aux suites récurrentes

**Théorème n° 7 : convergence des suites récurrentes vers un point fixe**

Soient $f: I \rightarrow I$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que f est k -lipschitzienne sur I avec $k < 1$ et qu'il existe $\ell \in I$ tel que $f(\ell) = \ell$ (ℓ est un point fixe de f). Alors, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$.

Exemple 9. Étudier la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 2}$

3.3 Caractérisation de la monotonie

**Théorème n° 8 : caractérisation des fonctions dérivables et monotones**

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et f dérivable sur I .

1. f est croissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.
2. f est décroissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.

**Théorème n° 9 : caractérisation des fonctions constantes**

Soit f dérivable sur un intervalle I . f est constante sur I ssi pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.

**Attention la condition « I un intervalle de \mathbb{R} » est importante**

- La fonction $x \mapsto \arctan(x) + \arctan(1/x)$ a une dérivée nulle sur \mathbb{R}^* , mais n'est pas constante.
- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ a une dérivée négative sur \mathbb{R}^* mais n'est pas décroissante.

**Théorème n° 10 : CNS pour qu'une fonction dérivable soit strictement croissante**

Soit f dérivable sur I . Alors f est strictement croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ et pour tout $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$, il existe $x \in [a; b]$, $f'(x) > 0$.

**Proposition n° 4 : condition suffisante de stricte monotonie d'une fonction dérivable**

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Supposons que $f' \geq 0$ et que pour tout $x \in I \setminus E$ (où E est un ensemble fini), $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I .



Attention : f peut être strictement croissante et f' s'annuler une infinité de fois

⚡ La fonction $x \mapsto x + \cos(x)$ est strictement croissante sur \mathbb{R} , sa dérivée s'annule une infinité de fois.

3.4 Fonctions convexes

Remarque 8. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Alors $[a; b] = \{ta + (1-t)b \mid t \in [0; 1]\}$.



Définition d'une fonction convexe/concave

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, on dit que f est convexe (resp. concave) si

$$\forall (a, b) \in I^2 \quad \forall t \in [0; 1] \quad f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b) \quad (\text{resp. } \geq)$$



Proposition n° 5 : position d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$, notons g l'équation de la droite qui coupe f en a et en b , alors f est en dessous de g sur $[a; b]$ et au-dessus en dehors de $[a; b]$.



Proposition n° 6 : caractérisation de la convexité à l'aide de la dérivée

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Sont équivalents :

1. f est convexe.
2. f' est croissante.
3. f est au dessus de toutes ses tangentes.

De plus, si f est deux fois dérivable, alors f est convexe ssi f'' est positive.

Remarque 9. Les deux propositions précédentes se généralisent au cas où f est concave.



Inégalités classiques

- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) \geq 1 + x$
- $\forall x > 0 \quad \ln(x) \leq x - 1$
- $\forall x \in [0; \pi/2] \quad 2x/\pi \leq \sin(x) \leq x$

4 Dérivées successives et fonctions de classes \mathcal{C}^k



Définition des dérivées successives

1. On dit que f est **deux fois dérivable** sur I si f est dérivable sur I puis que f' est dérivable sur I .
On appelle **dérivée seconde** de f la dérivée de sa dérivée : $f^{(2)} = (f')'$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est **n fois dérivable** sur I si f est $n-1$ fois dérivable et si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I .
On appelle **dérivée n -ième** (ou **d'ordre n**) de f : $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$. Par convention, $f^{(0)} = f$ et $f^{(1)} = f'$.
3. On dit que f est **infiniment dérivable** sur I si f admet des dérivées à tout ordre.



Attention aux notations

⚡ Ne pas confondre f^n et $f^{(n)}$: la première notation indique une puissance n -ième, la seconde une dérivée n -ième.

Exemple 10. Calculer les dérivées successives de \cos , de $x \mapsto x^p$ pour $p \in \mathbb{N}$, ainsi que de la fonction $x \mapsto x^{-1}$.



Définition des fonctions de classe \mathcal{C}^n

1. On dit que f est de **classe \mathcal{C}^1** sur I lorsque f est dérivable sur I et que f' est continue sur I .
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est de **classe \mathcal{C}^n** sur I si f est n -fois dérivable sur I et si $f^{(n)} \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^n sur I et valeurs dans \mathbb{R} .
3. On dit que f est de **classe \mathcal{C}^∞** sur I lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est de classe \mathcal{C}^n .
On note $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur I .

Exemple 11. La fonction exponentielle et les fonctions polynomiales sont \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

Remarque 10. Pour une fonction f et $n > p > 2$

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) &\iff f \text{ infiniment dérivable} \implies f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) \implies f \text{ } n\text{-fois dérivable} \\ f \text{ } n\text{-fois dérivable} &\implies f \in \mathcal{C}^p(I, \mathbb{R}) \implies f \text{ } p\text{-fois dérivable} \implies f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}) \\ f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}) &\implies f \text{ 2-fois dérivable} \implies f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \implies f \text{ dérivable} \implies f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Mais toutes les implications réciproques sont fausses (sauf la première).



Proposition n° 7 opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^n

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(f, g) \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})^2$.

1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f + g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$, $(\lambda f + g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + g^{(n)}$.
2. La fonction $fg \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $(fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f^{(i)} \times g^{(n-i)}$ formule de Leibniz
3. Si g ne s'annule pas sur I , alors $f/g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.
4. Si $(f, g) \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})^2$ alors $(\lambda f + g, fg, f/g) \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})^3$ (si g ne s'annule pas sur I pour f/g).

Remarque 11. La proposition précédente peut aussi s'énoncer en remplaçant de classe \mathcal{C}^n par n -fois dérivable.

Exemple 12. Calculer la dérivée d'ordre 5 de la fonction $f: x \mapsto x^3 e^x$.



Exemple classique de fonction \mathcal{C}^∞ définie par raccordement

Soit f la fonction valant 0 sur \mathbb{R}_- et $e^{-\frac{1}{x}}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* et il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x > 0$,
$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)e^{-\frac{1}{x}}}{x^{2n}}.$$
2. Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$



Proposition n° 8 : classe de la composée et de la bijection réciproque

(admis)

Soient $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $f \in \mathcal{C}^k(I, J)$ et $g \in \mathcal{C}^k(J, \mathbb{R})$. Alors, $g \circ f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$.

Si f est bijective et si f' ne s'annule pas sur I , alors la bijection réciproque $f^{-1} \in \mathcal{C}^k(J, I)$.

Exemple 13. Les fonctions arccos et arcsin sont de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1; 1 [$, arctan est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

5 Extension aux fonctions à valeurs complexes

5.1 Définition de la dérivabilité des fonctions à valeurs complexes



Définition de la dérivée d'une fonction à valeurs complexes

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est dérivable en $a \in I$ si $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \mathbb{C}$. On pose alors $f'(a) = \ell$. On dit que f est dérivable sur I ssi pour tout $a \in I$, f est dérivable en a .

Remarque 12. f est dérivable en $a \in I$ ssi $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont dérivables en a . Alors, $f'(a) = \operatorname{Re}(f)'(a) + i\operatorname{Im}(f)'(a)$.

Remarque 13. On ne sait pas dériver une fonction définie sur \mathbb{C} , seulement à *valeurs* dans \mathbb{C} .

5.2 Ce qui est encore valable

- On peut toujours parler de dérivabilité à gauche et à droite.
- On peut toujours additionner, multiplier et diviser des fonctions dérivables.
- Définition des fonctions de classe \mathcal{C}^k .
- Pour la composée : si $f \in \mathcal{C}^k(I, J)$ et $g \in \mathcal{C}^k(J, \mathbb{C})$ alors $g \circ f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{C})$.
- La formule de Leibniz est encore vraie.
- **L'inégalité des accroissements finis est encore vraie**¹.
- Une fonction, définie sur un intervalle, est constante si et seulement si elle a une dérivée nulle.

5.3 Ce qui n'est plus valable

- La notion d'extremum local n'a pas de sens.
- **Le théorème de Rolle ne s'applique pas, tout comme l'égalité des accroissements finis.**
- La notion de monotonie n'a pas de sens.



Exemple le théorème de Rolle ne s'applique pas

La fonction $f: x \mapsto e^{ix}$ est continue sur $]0; 2\pi[$, dérivable sur $]0; 2\pi[$, $f(0) = f(2\pi)$. Mais, f' ne s'annule pas.

6 Méthodes



Comment montrer qu'une fonction est dérivable et la dériver ?

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.

- Si f est une somme/produit/composée/quotient de fonctions dérivables alors conclure que f est dérivable (attention aux intervalles dans le cas de la composée, attention à bien dire que le dénominateur ne s'annule pas dans le cas du quotient) puis dériver f grâce aux formules.
- Si on est en point particulier a (un point de raccordement ou un point où il y a une valeur absolue ou une racine carrée d'une expression qui s'annule par exemple) :
 - Dériver à droite et à gauche (si possible) et regarder s'il y a la même dérivée.
 - Étudier si le taux d'accroissement admet une limite finie en a , dans ce cas, $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.
 - Appliquer le théorème de la limite de la dérivée, dans ce cas, $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)$.

1. Si $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, et $|f'|$ bornée par M , alors pour tout $(x, x') \in I^2$, $|f(x) - f(x')| \leq M|x - x'|$. Ceci sera démontré lors du chapitre Intégration.