Fonctions dérivables

Exercice 1 ($\star$ Cal)**.** Étudier la dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes (on précisera les ensembles de définitions et les ensembles sur lesquels la fonction est dérivable) :

1. $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$
2. $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$
3. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\ln(x)$
4. $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right)$
5. $f(x) = \arctan(\mathrm{sh}(x))$
6. $f(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)+\sin(x)}{\mathrm{ch}(x)-\cos(x)}$
7. $f(x) = x|x|$

Exercice 2 ($\star$ Cal)**.** Soit $f(x) = x^x$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et que l'on peut la prolonger par continuité en 0. On note ce prolongement $\tilde{f}$.
2. Montrer que $\tilde{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
3. Est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 3 ($\star$ Rai)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, m, f et M trois fonctions définies sur I. Soit $a \in I$, on suppose que $m(a) = f'(a) = M'(a)$ et que m et M sont dérivables en a et que $m'(a) = M'(a)$. On suppose également que sur un voisinage de a, on a : $m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x)$. Montrer que f est dérivable en a.

Exercice 4 ($\star$ Rai, Cou ©)**.** Posons $f(x) = x^2\sin(\dfrac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.
3. f est-elle dérivable en 0 ?
4. f est-elle $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire que f' est continue sur $\mathbb{R}$) ?

Exercice 5 ($\star$ Rai)**.** Soit $f : x \mapsto x^2\ln(x)$. Déterminer l'ensemble de définition de f. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Puis montrer que ce prolongement est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 6 ($\star\star$ Rec, Rai ©)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$. Soit $y \in \mathbb{R}$. Supposons $f'(a) < y < f'(b)$. Le but est de montrer qu'il existe $c \in I$ tel que $y = f'(c)$ (théorème de Darboux).

1. Soit $\varphi : x \mapsto f(x) - yx$. Montrer que φ atteint une valeur minimum sur $[\,a\,;b\,]$.
2. Montrer que φ n'atteint pas une valeur minimum ni en a ni en b.
3. Conclure.
4. Que vient-on de montrer sur l'ensemble $f'(I)$?

Exercice 7 ($\star\star$ Rai)**.** Soit $f : [\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On pose $g(x) = f(2x)$ si $x \in [\,0\,;1/2\,]$ et $g(x) = f(2x-1)$ si $x \in]\,1/2\,;1\,]$. À quelle CNS, g est-elle dérivable ?

Exercice 8 ($\star\star$ Rai)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$, montrer que $x \mapsto \dfrac{xf(a) - af(x)}{x-a}$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\{a\}$ admet une limite en a à déterminer.

Exercice 9 ($\star$ Rai, Cal)**.** Posons $f(x) = \sin(x)^{-1}$ pour $x \in [\,\pi/2\,;\pi\,[$. Montrer que f réalise une bijection vers un intervalle J à déterminer. Montrer que f^{-1} est dérivable sur un intervalle et calculer $(f^{-1})'$.

Exercice 10 ($\star\star$ Rec, Rai)**.** Soit $f : x \mapsto |x\sin(1/x)|$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité. On note encore f ce prolongement.
2. On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que F est dérivable et calculer sa dérivée.
3. Montrer que F est strictement croissante.
4. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_n$ telle que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ tel que $F'(x_n) = 0$.
5. Que peut-on en conclure ?

Rolle [1], T.A.F., I.A.F. and co

Exercice 11 ($\star$ Rai ©)**.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$

Exercice 12 (𝄞$\star$ Rai ©)**.** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $d^\circ P = n \geqslant 2$.

1. Si a est une racine de multiplicité m de P. Quelle est la multiplicité de a dans P' ?

1. Minute culture : Michel Rolle a combattu la notion de dérivée qu'il ne trouvait pas assez rigoureuse.

2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, montrer qu'entre deux racines distinctes de P, P' admet une racine.
3. En déduire que si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé à racines simples, alors P' aussi.
4. ⋆⋆ Montrer que si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé, alors P' est aussi scindé.
5. Montrer qu'il est possible que $P \in \mathbb{C}[X]$ soit scindé à racines simples sans que P' le soit.

Exercice 13 (𝄞⋆⋆ Rai, Rec ©)**.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ s'annulant en $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 14 (⋆ Rai)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose que f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Montrer que f n'est pas périodique sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15 (⋆⋆ Rai, Rec ©)**.** Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f \in \mathscr{C}^1([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$. On suppose que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \sup_{c \in [\,a\,;b\,]} f'(c)$$

Montrer que f est une fonction affine.

Exercice 16 (𝄞⋆⋆ Rai ©)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable admettent deux limites finies en $+\infty$ et $-\infty$ qui sont égales. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 17 (⋆ Rai, Cou ©)**.** On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$$
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$
3. En déduire un encadrement de S_n.
4. En déduire un équivalent de S_n et en déduire le comportement en $+\infty$ de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 18 (⋆⋆ Rai, Rec ©)**.** Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $f'(0) = 0$. Montrer qu'il existe $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = g(x^2)$

Exercice 19 (⋆ Rai)**.** Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,a\,;b\,]$. Montrer que f est lipschitzienne sur $[a; b]$.

Exercice 20 (⋆⋆ Rai ©)**.** (pour Antonin) Soit f et g des fonctions dérivables sur $[\,0\,;a\,]$ à valeurs réelles où $a > 0$. On suppose que g' et g ne s'annulent pas sur $]\,0\,;a\,]$ et que $f(0) = g(0) = 0$.

1. Soit $t \in]\,0\,;a\,]$, appliquer Rolle à $x \mapsto f(x)g(t) - f(t)g(x)$.
2. Montrer que si $f'(x)/g'(x) \xrightarrow[x \to 0]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors $f(x)/g(x) \xrightarrow[x \to 0]{} \ell$.[2]

Exercice 21 (⋆⋆ Rai, Rec)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et dérivable telle que f' tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$. Montrer que $\ell = 0$.

Exercice 22 (⋆ Rai)**.** On pose $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \mathrm{e}^{-u_n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [\,1/e\,;1\,]$
2. Montrer que $(u_n)_n$ converge, on note ℓ la limite.
3. Comment obtenir une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près ?

Exercice 23 (⋆ Rai)**.** On note $f(x) = \dfrac{2x}{\ln(x) + 1}$ pour $x \geqslant 1$

1. Justifier l'existence de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - e| \leqslant \dfrac{e-1}{2^n}$.
3. Déterminer un rang n tel qu'on ait une approximation de e à 10^{-3} près.

Exercice 24 (𝄞⋆ Rai ©)**.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Q_n = (1 - X^2)^n$ et $L_n = Q_n^{(n)}$ (polynôme de Legendre)

1. Montrer que L_n est une polynôme de degré n.
2. Montrer que pour tout $k \in [\![\,0\,;n-1\,]\!]$, $Q_n^{(k)}(1) = Q_n^{(k)}(-1) = 0$.
3. ⋆⋆. Montrer que L_n admet n racines réelles dans $]\,-1\,;1\,[$.

2. Cette propriété s'appelle «la règle de l'Hôpital».

Convexité

Exercice 25 (⋆ Rai)**.** Démontrer par trois façons que $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 26 (⋆ Rai)**.** Montrer que pour tout $x > -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

Exercice 27 (⋆ Rai ©)**.** Soient $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes et g croissante, montrer que $g \circ f$ est convexe.

Exercice 28 (⋆⋆ Rai)**.** Soient $I =]\,a\,;b\,[$ un intervalle ouvert et $f \colon I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que f est dérivable à droite et à gauche en tout point de I. En déduire que f est continue sur I. Ce dernier résultat est-il encore vrai si I n'est pas ouvert ?

Exercice 29 (⋆⋆ Rai, Rec ©)**.** Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et bornée. Démontrer que f est constante.

Exercice 30 (𝄞⋆⋆ Rai, Rec ©)**.** Soit $f \colon I \to \mathbb{R}$ convexe.

1. Montrer que $f\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$ pour tout entier $n \geqslant 2$ pour tout $x_i \in I$ et pour tout $\lambda_i \in [\,0\,;1\,]$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$.
2. Montrer que pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, on a :
$$\frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_k} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$$
La première quantité s'appelle la moyenne harmonique, la deuxième la moyenne géométrique et la troisième la moyenne arithmétique (la moyenne usuelle en somme[3]).
3. Lors des interrogations surprises de cours, votre professeurs de mathématiques veut utiliser la moyenne géométrique, pourquoi ?

Exercice 31 (𝄞⋆⋆⋆ Cal, Rec ©)**.** Soit $(p, q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $1/p + 1/q = 1$, pour $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$.

1. Grâce à un argument de convexité, montrer que pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $ab \leqslant a^p/p + b^q/q$.
2. Soient $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k x_k| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q$.
3. Montrer que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\|x + y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$

3. Le jeu de mot est volontaire.

Dérivées successives

Exercice 32 (⋆ Cal)**.** On pose $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $f(x) = x^{n+1}$ si $x > 0$. Montrer que $f \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 33 (⋆ Cal)**.** Calculer les dérivées n-ièmes des fonctions définies par :

1. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$
4. $f(x) = \cos^3(x)$
5. $f(x) = (x^2+1)\mathrm{e}^x$
6. $f(x) = x^2(1+x)^n$
7. $f(x) = \dfrac{x^4 + \frac{5}{2}}{x(x+1)(x+2)}$

Exercice 34 (⋆ Cal, Rai ©)**.**

1. Soit deux entiers naturels $k \leqslant n$. Calculer de deux façons les dérivées k-ièmes de $x \mapsto x^{2n}$.
2. En déduire $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 35 (⋆⋆ Cal, Rai)**.** Soit $a + ib$ une racine n-ième de l'unité. Dériver n-fois la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$.

Exercice 36 (𝄞⋆⋆ Cal, Rai, Rec ©)**.** Montrer que la fonction f suivante est $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$$f \colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases} \end{cases}$$

Inclassable

Exercice 37 ($\star\star\star$ Rec, Rai)**.** Si $f'(x) + af(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ où $a > 0$ et $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.