Degré, division euclidienne, divisibilité

Exercice 1 ($\star$ Cal ©). Calculer les restes des divisions euclidiennes de A par B dans les cas suivants :

1. $A = X^5 - 2X^4 - 1$, $B = \dfrac{1}{2}X^2 + X - 2$
2. $A = X^3 - 2X^2 + 2$, $B = X^4 + 2X^3 - X + 1$
3. $A = X^{20} + 1$, $B = X^2 + 3X + 2$
4. $A = X^n + X$, $B = X^3 + 3X^2 - 4$
5. $A = (\cos(\theta) + X\sin(\theta))^n$, $B = X^2 + 1$ où $\theta \in \mathbb{R}$
6. $A = X^n$, $B = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$

Exercice 2 ($\star$ Cal, Rai ©). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(X-1)^2 | aX^{n+1} + bX^n + 1$.

Exercice 3 ($\star\star$ Cal, Rai, Rec ©). Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

1. Montrer que $X - 1$ divise $X^a - 1$
2. Montrer que si $b|a$, alors $X^b - 1 | X^a - 1$.
3. Si $a = bq + r$ est la division euclidienne de a par b, Montrer que le reste de la division euclidienne de $X^a - 1$ par $X^b - 1$ est $X^r - 1$
4. Montrer que si $(X^b - 1)|(X^a - 1)$ alors $b|a$.

Exercice 4 ($\star\star\star$ Rai, Rec ©). Soit $(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$ et B non constant. on suppose que B divise A dans $\mathbb{C}[X]$, c'est-à-dire qu'il existe $C \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = BC$. Démontrer que nécessairement $C \in \mathbb{R}[X]$.

Exercice 5 ($\star$ Rai ©). Déterminer tous les couples $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que $Q^2 = XP^2$.

Exercice 6 ($\star$ Rai ©). Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P \circ P = P$.

Exercice 7 ($\star\star\star$ Rai, Rec). Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P.

Racines et factorisation d'un polynôme

Exercice 8 ($\star$ Rai). Trouver le ou les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 3 tel que 1 est racine simple, -2 racine double et $P(3) = 8$.

Exercice 9 ($\star$ Cal, cou). Soit $P = 2X^3 - 16X^2 + 46X - 56$. On note x_1, x_2 et x_3 les racines complexes de P. Déterminer les trois racines de P sachant que la somme de deux des racines est égale à la troisième.

Exercice 10 ($\star$ Cal, Cou). Soit $P = X^3 - 18X^2 + 101X - 180$. On note x_1, x_2 et x_3 les racines complexes de P. Déterminer les trois racines de P sachant que la somme de deux des racines est égale à la troisième.

Exercice 11 ($\star\star$ Rai, Rec). $X^4 + 1$ admet-il des racines dans $\mathbb{R}$? Est-il irréductible dans $\mathbb{R}[X]$? Sinon le factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ (comme un produit de polynômes irréductibles)

Exercice 12 ($\star$ Rai ©). Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $d^\circ P \geqslant 1$. Démontrer que $\tilde{P} : \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto P(x) \end{cases}$ est surjective.

Exercice 13 ($\star$ Rai). Déterminer les $a \in \mathbb{C}$ tels que $P = X^3 - X^2 + a$ ait une racine double.

Exercice 14 ($\star\star$ Cal, Rec ©). Factoriser $X^{2n} - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ (comme un produit de polynômes irréductibles)

Exercice 15 ($\star$ Rai ©). Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}_4[X]$ tels que $P(0)^2 + P(-3)^2 + P(5)^4 + P(-\pi)^6 + P(42)^{42} = 0$.

Exercice 16 ($\star\star$ Rec ©). Soit $(P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2$.

1. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = Q(n)$, montrer que $P = Q$.
2. Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(\sin(x)) = Q(\sin(x))$, montrer que $P = Q$.
3. Si $x \mapsto P(x)$ est périodique, montrer que P est constant.

Exercice 17 ($\star\star$ Rai, Rec ©). Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X + 3)P(X) = XP(X + 1)$.

Exercice 18 ($\star$ Rai ©). Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{X^k}{k!} \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que les racines complexes de P_n sont simples.

Exercice 19 ($\star\star\star$ Rai, Rec). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\Phi_n = \prod_{\substack{k=1 \\ \mathrm{PGCD}(k,n)=1}}^{n} (X - e^{i k 2\pi/n})$$

1. Calculer explicitement Φ_n pour $n \in [\![1 ; 4]\!]$
2. Montrer que $X^n - 1 = \prod_{\substack{d=1 \\ d|n}}^{n} \Phi_d$
3. En déduire Φ_8.
4. Calculer Φ_p pour p premier.
5. Soit A et B deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et B unitaire, démontrer qu'il existe Q et R deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tel que $A = BQ + R$ avec $d^\circ R < d^\circ B$.
6. Démontrer que Φ_n est à coefficients entiers pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Décomposition en éléments simples

Exercice 20 ($\star$ Cal ©)**.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$. Grâce à une décomposition en éléments simples, déterminer la valeur de S_n.

Exercice 21 ($\star$ Cal)**.** Décomposer en éléments simples $\frac{1}{X^3 - 18X^2 + 101X - 180}$ en utilisant la factorisation obtenue à l'exercice 10.

Exercice 22 ($\star\star$ Cal)**.**
1. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$, $P = X^4 - 2X^3 - X^2 + 2X$
2. En déduire la décomposition en éléments simples de $\frac{X^5}{X^4 - 2X^3 - X^2 + 2X}$.
3. Calculer $\int_2^3 \frac{x^5 \, \mathrm{d}x}{x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x}$.

Exercice 23 ($\star\star$ Cal)**.**
1. Factoriser $X^4 + 3X^2 + 2$ dans $\mathbb{R}[X]$.
2. La décomposition en éléments simples de $\frac{1}{X^4 + 3X^2 + 2}$ est de la forme $\frac{aX + b}{X^2 + 1} + \frac{cX + d}{X^2 + 2}$. Trouver (a, b, c, d).

Exercice 24 ($\star$ Cal)**.** On admet que la fraction rationnelle suivante admet une décomposition en éléments simples de la forme :

$$\frac{X+3}{(X+1)^2(X+2)} = \frac{a}{(X+1)^2} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X+2}$$

Trouver a, b et c.

Exercice 25 ($\star\star$ Cal, Rec ©)**.** Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n scindé à racines simples de racines $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
1. Déterminer la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$.
2. Si toutes les racines de P sont non nulles, déterminer la valeur de $\sum_{k=1}^{n} 1/x_k$.
3. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ et que ses racines sont réelles, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(P'^2 - PP'')(x) \geqslant 0$.

Sujet de concours

Exercice 26 ($\star\star$ Rai, Rec)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1 ; 1]$ on pose $f_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.
1. Rappeler tout ce que vous savez sur la fonction arccos.
2. Pour $x \in [-1 ; 1]$, exprimer $f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x)$ en fonction de $f_n(x)$.
3. Montrer qu'il existe un unique polynôme T_n telle que la fonction polynomiale associée à T_n sur $[-1 ; 1]$ soit la fonction f_n.
4. Calculer f_0, f_1, f_2 et f_3. Que valent T_0, T_1, T_2 et T_3 ?
5. Déterminer la valeur de T_n, le degré de T_n, son coefficient dominant et les racines de T_n.
6. Démontrer que T_n vérifie : $(1 - X^2)T_n'' - XT_n' + n^2 T_n = 0$

Exercice 27 ($\star\star$ Rai, Rec ©)**.** Soit $a \in \mathbb{N}$ et $P_a = X^3 - X(a^2 + 2a) + 2$. On cherche a tel que P_a possède trois racines dans $\mathbb{Z}$. On suppose que a existe. Soient r_1, r_2 et r_3 les 3 racines de P_a avec $r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3$.
1. Que valent $r_1 + r_2 + r_3$ et $r_1 r_2 r_3$?
2. Montrer que $r_1 < 0$.
3. En déduire que $r_1 < 0 < r_2 \leqslant r_3$ puis les valeurs de r_1, r_2,et r_3.
4. Donner la valeur de ${P_a}'(r_2)$. En déduire la valeur de a.
5. Réciproquement, montrer que la valeur de a trouvée convient.

Exercice 28 ($\star\star$ Rai, Rec ©)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$, et $P_n = \frac{1}{2\mathrm{i}} \left[(X + \mathrm{i})^n - (X - \mathrm{i})^n \right]$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers la même limite.
2. Calculer P_1, P_2 et P_3
3. Montrer que $P_n \in \mathbb{R}[X]$.
4. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.
5. La fonction polynomiale associée à P_n est-elle paire ? impaire ?
6. Trouver les racines de P_n (on utilisera la fonction $\text{cotan} = \dfrac{\cos}{\sin}$)
7. En déduire la factorisation de P_n en facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.
8. Soit $S \in \mathbb{R}[X]$, montrer que la fonction polynomiale associée à S est paire si et seulement si on peut décomposer S comme $S = \sum_{k=0}^{N} a_k X^{2k}$ avec $N \in \mathbb{N}$ et a_k des réels.
9. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $R_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_{2n+1} = R_n(X^2)$.
10. Déterminer $d = d^\circ R_n$ et les coefficients de R_n devant X^d et devant X^{d-1} ?
11. Déterminer les racines de R_n. Factoriser R_n dans $\mathbb{R}_n[X]$.
12. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$
13. Montrer, grâce à la convexité (ou avec une étude de fonctions), que pour tout $\theta \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $0 < \sin(\theta) \leqslant \theta \leqslant \tan(\theta)$

On pose pour $k \in \mathbb{N}$, $\theta_k = \dfrac{k\pi}{2n+1}$ et

14. En déduire que pour tout $p \in [\![1\,; n]\!]$

$$\text{cotan}^2(\theta_p) \leqslant \frac{1}{{\theta_p}^2} \leqslant 1 + \text{cotan}^2(\theta_p)$$

15. Encadrer u_n, en déduire que $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.