Chapitre 8

Matrices

Table des matières

Dans tout ce chapitre, n, p, q et r sont des entiers naturels non nuls, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour deux entiers i et j, on note $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Le nombre $\delta_{i,j}$ est appelé le symbole de Kronecker. Remarquons que $\delta_{i,j} = \delta_{j,i}$.

1 Définition des matrices et opérations

Définition d'une matrice

On appelle **matrice** de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ tout tableau à n lignes et p colonnes d'éléments de $\mathbb{K}$:

$$M = \begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \dots & M_{1,j} & \dots & M_{1,p} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & \dots & M_{2,j} & \dots & M_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M_{i,1} & M_{i,2} & \dots & M_{i,j} & \dots & M_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M_{n,1} & M_{n,2} & \dots & M_{n,j} & \dots & M_{n,p} \end{pmatrix}$$

On note aussi $M = (M_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$. Le coefficient à la i-ième ligne et la j-ième colonne est $M_{i,j}$. On note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficient dans $\mathbb{K}$.
Si $p = n$, on dit que $M = (M_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ est une **matrice carrée**. On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ à la place de $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

Exemple 1. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, $B = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 2 & 3+\mathrm{i} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

Remarque 1.

- On note $0_{n,p}$ la matrice de taille $n \times p$ dont les coefficients sont tous nuls, appelée **matrice nulle**.
- On note $I_n = (\delta_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, appelé **matrice identité** de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
- Si $p = 1$ et $M \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, alors $M = \begin{pmatrix} M_{1,1} \\ M_{2,1} \\ \vdots \\ M_{n,1} \end{pmatrix}$. On dit que M est une **matrice colonne**.
- Si $n = 1$ et $M \in \mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$, alors $M = \begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \dots & M_{1,p} \end{pmatrix}$. On dit que M est une **matrice ligne**.
- Si $n = p = 1$ et $M \in \mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{K})$, alors $M = (M_{1,1})$, on assimile donc M à un nombre et on note $M = M_{1,1}$.
- Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$ alors $A = B$ ssi pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!]$, $A_{i,j} = B_{i,j}$.

Définition de la somme deux matrices

On définit une addition entre $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par $A + B = (A_{i,j} + B_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exemple 2. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 7 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $A + B$.

Remarque 2. On n'additionne seulement deux matrices de même taille pour obtenir une nouvelle matrice de même taille.

Proposition n° 1 : propriétés de l'addition de deux matrices

Soient $(A, B, C) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})^3$.

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (associativité)
2. $A + B = B + A$ (commutativité)
3. $A + 0_{n,p} = A$ ($0_{n,p}$ est le neutre de l'addition)
4. $A + (-A_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} = 0_{n,p}$ (existence de l'opposé)

Définition du produit d'une matrice par un scalaire

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On pose $\lambda A = (\lambda A_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exemple 3. Calculer λA si $\lambda = 3$ et $A = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition n° 2 : propriétés du produit d'une matrice par un scalaire

Soient $(A, B) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

1. $1A = A$ et $0A = 0_{n,p}$
2. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
3. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
4. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

Définition du produit de deux matrices

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit $AB = C \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall i \in [\![1 \,; n]\!] \quad \forall j \in [\![1 \,; q]\!] \qquad C_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k} B_{k,j}$$

Remarque 3. Pour faire le produit de $A \times B$, il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B. Il est possible que le produit $A \times B$ soit donc possible sans que le produit $B \times A$ le soit. Si $A \times B$ et $B \times A$ sont possibles, on n'a pas forcément $A \times B = B \times A$.

Exemple 4. Dans le cas des matrices A et B ci-dessous indiquer si le produit est possible et si oui effectuer-le :

A	B	AB	BA
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$		
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$		
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$		

Péril imminent : le produit matriciel

Le produit de deux matrices n'est pas un produit terme à terme.
Le produit de deux matrices a une condition sur les lignes et les colonnes pour être défini.
Le produit de deux matrices n'est pas commutatif.
Le produit de deux matrices non nulles peut être nul.
Si $AB = AC$, on ne peut pas en déduire que $B = C$ même si A est non nul.

Proposition n° 3 : propriétés de la multiplication des matrices

1. Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, alors $(AB)C = A(BC)$ (associativité du produit matriciel)
2. Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
3. Si $(A, B) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$ et $C \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(A+B)C = AC + BC$ (distributivité)
4. Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $(B, C) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})^2$, $A(B+C) = AB + AC$ (distributivité)
5. Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors $A \times I_p = A$, $A \times 0_{p,q} = 0_{n,q}$ $I_n \times A = A$ et $0_{q,n}A = 0_{q,p}$

Remarque 4. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, alors AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.

Définition de la transposée d'une matrice

Soit $A = (A_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle **transposée** de A la matrice $A^\top = (A_{j,i})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Exemple 5. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, alors $A^\top =$

Remarque 5. Les lignes de A forment donc les colonnes de $A^\top$ et vice versa.

Proposition n° 4 : propriétés de la transposée

Soient $(A, B, C) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2 \times \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, $(A^\top)^\top = A$, $(A+\lambda B)^\top = A^\top + \lambda B^\top$, $(AC)^\top = C^\top A^\top$.

2 Matrices élémentaires, opérations élémentaires et systèmes linéaires

2.1 Matrices élémentaires et opérations élémentaires

Définition d'une matrice élémentaire de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Soit $(a, b) \in [\![1 ; n]\!] \times [\![1 ; p]\!]$, on appelle $E(a, b) = (\delta_{i,a}\delta_{j,b})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ **matrice élémentaire** de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Remarque 6. Les coefficients de $E(a, b)$ sont nuls sauf celui à la a-ième ligne et b-ième colonne qui vaut 1.

Exemple 6. Les matrices élémentaires de $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{K})$ sont :

Proposition n° 5 : décomposition d'une matrice en combinaison linéaire de matrices élémentaires

Soit $M = (M_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors, $$M = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} M_{i,j}E(i,j)$$ où $E(i, j) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Proposition n° 6 : produit de deux matrices élémentaires

Pour $(E(a, b), E(c, d)) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ deux matrices élémentaires, $E(a, b)E(c, d) = \delta_{b,c}E(a, d) \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$.

Définition des matrices d'opérations élémentaires

1. Soit $a \in [\![1 ; n]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on appelle $D_a(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E(a, a)$ **matrice de dilatation**.
2. Soit $(a, b) \in [\![1 ; n]\!]^2$ avec $a \neq b$, on appelle $P_{a,b} = I_n - E(a, a) - E(b, b) + E(a, b) + E(b, a)$ **matrice de transposition**.
3. Soit $(a, b) \in [\![1 ; n]\!]^2$ avec $a \neq b$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on appelle $T_{a,b}(\lambda) = I_n + \lambda E(a, b)$ **matrice de transvection**.

Remarque 7. Les tailles de $E(a,b)$, $D_a(\lambda)$, $P_{a,b}$ et $T_{i,j}(\lambda)$ ne sont pas indiquées dans la notation de ces matrices. Le contexte permet de lever toute ambiguïté.

Exemple 7. Calculer les produits suivants : $D_2(3) \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times D_2(3)$, $P_{1,2} \times \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ -2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix} P_{1,2}$, $T_{1,2}(10) \times \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ -2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix} T_{1,2}(10)$

Proposition n° 7 : effet de la multiplication par une matrice d'opérations élémentaires

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. $D_a(\lambda) \times A$ est la matrice A à laquelle on a multiplié la a-ième ligne par λ.
2. $P_{a,b} \times A$ est la matrice A à laquelle on a échangé la a-ième ligne avec la b-ième ligne.
3. $T_{a,b}(\lambda) \times A$ est la matrice A à laquelle on a ajouté λ fois la b-ième ligne à la a-ième ligne.
4. $A \times D_a(\lambda)$ est la matrice A à laquelle on a multiplié la a-ième colonne par λ.
5. $A \times P_{a,b}$ est la matrice A à laquelle on a échangé la a-ième colonne avec la b-ième colonne.
6. $A \times T_{a,b}(\lambda)$ est la matrice A à laquelle on a ajouté λ fois la a-ième colonne à la b-ième colonne.

2.2 Systèmes linéaires

Définition d'un système linéaire

Soient $(A_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, on dit que le système suivant :

$$\begin{cases} A_{1,1}x_1 + A_{1,2}x_2 + \dots + A_{1,p}x_p & = & y_1 \\ \vdots & = & \vdots \\ A_{i,1}x_1 + A_{i,2}x_2 + \dots + A_{i,p}x_p & = & y_i \\ \vdots & = & \vdots \\ A_{n,1}x_1 + A_{n,2}x_2 + \dots + A_{n,p}x_p & = & y_n \end{cases}$$

est un système linéaire de n équations à p inconnues $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ de coefficients $(A_{i,j})$ et de second membre $(y_1, y_2, \dots, y_n)$. On dit que $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ est solution du système s'il vérifie les n équations du système. Résoudre un tel système revient à déterminer toutes les solutions. Un système est dit compatible s'il admet au moins une solution. On dit que le système est homogène si le second membre est nul.

Proposition n° 8 : lien entre système linéaire et produit matriciel

Résoudre un système linéaire revient à trouver tous les $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = Y$.

Proposition n° 9 : structure des solutions

Soit un système linéaire $AX = Y$ compatible dont X_P est une solution particulière. Les solutions de ce système sont exactement de la forme $X_P + X_H$ où X_H est solution du système homogène $AX = 0_{p,1}$.

Comment résoudre un système linéaire ? (pivot de Gauss)

On fait des opérations sur les lignes de façon à «échelonner» le système : à chaque ligne, la première inconnue rencontrée doit être plus à droite qu'à la ligne précédente. Une ligne comme «$0 = 0$» se supprime, une ligne comme «$0 = 1$» montre que le système est incompatible. Une fois le système échelonné, la première inconnue de chaque ligne est appelée inconnue principale et est exprimé en fonction des inconnues non principales (appelées inconnues secondaires).

Exemple 8. Résoudre $\left\{\begin{array}{lcl} 2x+3y+5z+2t & = & 3 \\ 4x+6y+z+2t & = & 2 \end{array}\right.$.

3 Matrices carrées

On note 0_n la matrice nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition n° 10 : des opérations des matrices carrées

Soient $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. Alors, $AB \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\quad A \times I_n = I_n \times A = A, \quad A \times 0_n = 0_n \times A = 0_n, \quad A^\top \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Définition de la puissance d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On pose, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = \underbrace{A \times A \times A \times \ldots \times A}_{k \text{ fois}}$. Par convention $A^0 = I_n$.

Exemple 9. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, alors $AB = 0_2$. Si $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ alors $N^2 = 0_2$.

Définition d'un diviseur de zéro, d'une matrice nilpotente

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle, s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle telle que $AB = 0_n$, on dit que A est un **diviseur de zéro**.
Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, S'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ telle que $N^p = 0_n$, on dit que N est une matrice **nilpotente**.

Définition de la diagonale d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $(A_{1,1}, A_{2,2}, \ldots, A_{n,n})$ est la diagonale de A.

3.1 Cas particuliers de matrices carrées

Définition des matrices triangulaires supérieures/inférieures/diagonales/scalaires

1. On dit que $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice **triangulaire supérieure** si ses coefficients en dessous de la diagonale sont nuls : pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ avec $i > j$, $T_{i,j} = 0$.
2. On dit que $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice **triangulaire inférieure** si ses coefficients au-dessus de la diagonale sont nuls : pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ avec $i < j$, $T_{i,j} = 0$.
3. On dit que $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice **diagonale**, si ses termes en dehors de la diagonale sont nuls : pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, si $i \neq j$ alors $D_{i,j} = 0$.
4. Si $\lambda \in \mathbb{K}$, on dit que λI_n est une **matrice scalaire**.

Exemple 10. 0_n, I_n, $2I_n$ sont des matrices scalaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonale et $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure. Les matrices scalaires commutent avec toutes les autres matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition n° 11 : propriétés des produits de matrices triangulaires

1. Si T et T' deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors TT' est triangulaire supérieure (resp. inférieure). De plus, $(TT')_{i,i} = T_{i,i} \times T'_{i,i}$
2. Si D et D' sont deux matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ alors DD' est diagonale et $(DD')_{i,i} = D_{i,i} \times D'_{i,i}$.

Définition des matrices symétriques et antisymétriques

1. On dit que $S \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est **symétrique** si $S = S^\top$ *i.e.* pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ si $S_{i,j} = S_{j,i}$.
2. On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est **antisymétrique** si $A = -A^\top$ *i.e.* pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, $A_{i,j} = -A_{j,i}$.

On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 11. $S = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ est symétrique, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

Remarque 8. Les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont forcément nuls.

Exemple 12. Soit $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$, développer $(A+B)^2$

Proposition n° 12 : formule du binôme de Newton et factorisation de $A^p - B^p$

Soit $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. Si $AB = BA$ alors $\quad (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k} \quad$ et $\quad A^p - B^p = (A-B) \sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}$

Péril imminent la condition «A et B commutent» n'est pas décorative

Appliquez ces formules sans checker «A et B commutent» et c'est la chute !

Exemple 13. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, calculer A^p pour $p \in \mathbb{N}$.

3.2 Inverse d'une matrice carrée

Définition de l'inverse d'une matrice carrée

On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est **inversible** s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = BA = I_n$. Le B est alors unique et on dit que B est l'**inverse** de A et on le note A^{-1}. On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 14. I_n est inversible et ${I_n}^{-1} = I_n$, 0_n n'est pas inversible.

Exemple 15. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ possède une ligne remplie de 0, alors A n'est pas inversible.

Proposition n° 13 : propriétés de l'inverse

Soient $(A,B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$

1. $A^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. $\lambda A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$.
3. $A^\top$ est inversible et $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.
4. AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

Attention la somme de matrices inversibles n'est pas forcément inversible

I_n et $-I_n$ sont inversibles mais pas leur somme.

Proposition n° 14 : inverse d'une matrice de taille 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, A est inversible ssi $\det(A) = ad - bc \neq 0$. Dans ce cas, $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Proposition n° 15 : matrice inversible et système linéaire

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors A est inversible ssi pour tout $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ le système $Y = AX$ admet une et unique solution de la forme $X = BY$. Dans ce cas, $B = A^{-1}$.

Proposition n° 16 : inversibilité d'une matrice diagonale

Soit $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale alors $D \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ssi pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $D_{i,i} \neq 0$. De plus, si D est inversible, D^{-1} est une matrice diagonale de diagonale $({D_{1,1}}^{-1}, {D_{2,2}}^{-1}, \dots, {D_{n,n}}^{-1})$.

Proposition n° 17 : inversibilité des matrices d'opérations élémentaires et opérations élémentaires

Soit $(i, j) \in [\![1 ; n]\!]^2$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, les matrices $P_{i,j}$, $D_i(\lambda)$ et $T_{i,j}(\lambda)$ sont inversibles.
Les opérations élémentaires sur les matrices conservent l'inversibilité.

Exemple 16. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse. Étudier l'inversibilité de la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition n° 18 : inversibilité d'une matrice triangulaire

Soit $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure). Alors $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ssi pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $T_{i,i} \neq 0$. Alors, T^{-1} est triangulaire supérieure (resp. inférieure), et pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $(T^{-1})_{i,i} = (T_{i,i})^{-1}$.

Exemple 17. Calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4 Méthodes

Comment calculer les puissances d'une matrice ?

1. En calculant ses premières puissances pour conjecturer une formule puis la montrer par récurrence.
2. Décomposer la matrice en $A + B$ si A et B commutent et que vous savez calculer A^k et B^k pour tout k.
3. Si la matrice $M = PDP^{-1}$ avec D diagonale et P inversible, alors $M^p = PD^pP^{-1}$

Comment calculer l'inverse d'une matrice ?

1. Connaître la formule pour les matrices de taille 2×2.
2. Imaginer ce que pourrait être l'inverse de A et le multiplier par A pour voir si cela vaut I_n.
3. Effectuer des opérations simultanément sur les lignes de A et I_n de façon à transformer A en I_n (en échelonnant la matrice). Si cela est possible, alors A est inversible et en transformant A en I_n, on a transformé I_n en A^{-1}. Si en échelonnant, on obtient une ligne remplie de 0, alors cela montre que A n'est pas inversible.
4. Résoudre $AX = Y$ pour Y une matrice colonne quelconque.