



## Table des matières

<b>1</b>	<b>Définition des matrices et opérations</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Matrices élémentaires, opérations élémentaires et systèmes linéaires</b>	<b>4</b>
2.1	Matrices élémentaires et opérations élémentaires . . . . .	4
2.2	Systèmes linéaires . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Matrices carrées</b>	<b>5</b>
3.1	Cas particuliers de matrices carrées . . . . .	6
3.2	Inverse d'une matrice carrée . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Méthodes</b>	<b>8</b>

Dans tout ce chapitre,  $n, p, q$  et  $r$  sont des entiers naturels non nuls,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Pour deux entiers  $i$  et  $j$ , on note  $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ . Le nombre  $\delta_{i,j}$  est appelé le **symbole de Kronecker**. Remarquons que  $\delta_{i,j} = \delta_{j,i}$ .

## 1 Définition des matrices et opérations



### Définition d'une matrice

On appelle **matrice** de taille  $(n, p)$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$  tout tableau à  $n$  lignes et  $p$  colonnes d'éléments de  $\mathbb{K}$  :

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,j} & \dots & m_{1,p} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \dots & m_{2,j} & \dots & m_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{i,1} & m_{i,2} & \dots & m_{i,j} & \dots & m_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \dots & m_{n,j} & \dots & m_{n,p} \end{pmatrix}$$

On note aussi  $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  (ou  $M = (m_{i,j})_{i,j}$  s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la taille). Le coefficient à la  $i$ -ième ligne et la  $j$ -ième colonne est  $m_{i,j}$ . On note  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices de taille  $(n, p)$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . Si  $p = n$ , on dit que  $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  est une **matrice carrée**. On note  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  à la place de  $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ .

**Exemple 1.**  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2 & 3+i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .

**Remarque 1.** • On note  $0_{n,p}$  la matrice de taille  $(n, p)$  dont les coefficients sont tous nuls, appelée **matrice nulle**.

- La matrice  $I_n = (\delta_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  est appelée **matrice identité** de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- Si  $p = 1$  et  $M \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ , alors  $M = \begin{pmatrix} m_{1,1} \\ m_{2,1} \\ \vdots \\ m_{n,1} \end{pmatrix}$ . On dit que  $M$  est une **matrice colonne**.

- Si  $n = 1$  et  $M \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ , alors  $M = (m_{1,1} \ m_{1,2} \ \dots \ m_{1,p})$ . On dit que  $M$  est une **matrice ligne**.

- Si  $n = p = 1$  et  $M \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K})$ , alors  $M = (m_{1,1})$ , on assimile donc  $M$  à un nombre et on note  $M = m_{1,1}$ .

- Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$  alors  $A = B$  ssi pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket$ ,  $a_{i,j} = b_{i,j}$ .



### Définition de la somme de deux matrices

On définit une addition entre  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  par

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

**Exemple 2.** Si  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 7 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $A + B =$

**Remarque 2.** On n'additionne seulement deux matrices de même taille pour obtenir une nouvelle matrice de même taille.



### Proposition n° 1 : propriétés de l'addition de deux matrices

Soient  $(A, B, C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^3$ .

1.  $(A + B) + C = A + (B + C)$  (associativité)
2.  $A + B = B + A$  (commutativité)
3.  $A + 0_{n,p} = A$  ( $0_{n,p}$  est le neutre de l'addition)
4.  $A + (-a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = 0_{n,p}$  (existence de l'opposé)



### Définition du produit d'une matrice par un scalaire

Soient  $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On pose  $\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .



## 2 Matrices élémentaires, opérations élémentaires et systèmes linéaires

### 2.1 Matrices élémentaires et opérations élémentaires



#### Définition d'une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Soit  $(a, b) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket \times \llbracket 1 ; p \rrbracket$ , on appelle  $E_{a,b} = (\delta_{i,a}\delta_{j,b})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  **matrice élémentaire** de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

**Remarque 5.** Les coefficients de  $E_{a,b}$  sont nuls sauf celui à la  $a$ -ième ligne et  $b$ -ième colonne qui vaut 1.

**Exemple 6.** Écrire toutes les matrices élémentaires de  $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$ .



#### Proposition n° 5 : décomposition d'une matrice en combinaison linéaire de matrices élémentaires

Soit  $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . Alors, 
$$M = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p m_{i,j} E_{i,j} \quad \text{où } E_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$



#### Proposition n° 6 : produit de deux matrices élémentaires

Pour  $(E_{a,b}, E_{c,d}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$  deux matrices élémentaires, 
$$E_{a,b}E_{c,d} = \delta_{b,c}E_{a,d} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}).$$

**Remarque 6.** Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . Si  $E_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $E_{i,j}A$  est la matrice dont toutes les lignes sont nulles sauf la  $i$ -ième qui vaut la  $j$ -ième ligne de  $A$ . Si  $E_{i,j} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ ,  $AE_{i,j}$  est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles sauf la  $j$ -ième qui vaut la  $i$ -ième colonne de  $A$ .



#### Définition des matrices d'opérations élémentaires

1. Si  $a \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$  et  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ , on appelle  $D_a(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{a,a}$  **matrice de dilatation**.
2. Si  $(a, b) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$  avec  $a \neq b$ , on appelle  $P_{a,b} = I_n - E_{a,a} - E_{b,b} + E_{a,b} + E_{b,a}$  **matrice de transposition**.
3. Si  $(a, b) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$  avec  $a \neq b$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on appelle  $T_{a,b}(\lambda) = I_n + \lambda E_{a,b}$  **matrice de transvection**.

**Remarque 7.** Les tailles de  $E_{a,b}$ ,  $D_a(\lambda)$ ,  $P_{a,b}$  et  $T_{i,j}(\lambda)$  ne sont pas indiquées dans la notation de ces matrices. Le contexte permet de lever toute ambiguïté.

**Exemple 7.** Calculer les produits  $D_2(3)A$ ,  $AD_2(3)$ ,  $P_{1,2}A$ ,  $AP_{1,2}$ ,  $T_{1,2}(10)A$ ,  $AT_{1,2}(10)$  avec et  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ .



#### Proposition n° 7 : effet de la multiplication par une matrice d'opérations élémentaires

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

1.  $D_a(\lambda)A$  est la matrice  $A$  à laquelle on a multiplié la  $a$ -ième ligne par  $\lambda$ .
2.  $P_{a,b}A$  est la matrice  $A$  à laquelle on a échangé la  $a$ -ième ligne avec la  $b$ -ième ligne.
3.  $T_{a,b}(\lambda)A$  est la matrice  $A$  à laquelle on a ajouté  $\lambda$  fois la  $b$ -ième ligne à la  $a$ -ième ligne.
4.  $AD_a(\lambda)$  est la matrice  $A$  à laquelle on a multiplié la  $a$ -ième colonne par  $\lambda$ .
5.  $AP_{a,b}$  est la matrice  $A$  à laquelle on a échangé la  $a$ -ième colonne avec la  $b$ -ième colonne.
6.  $AT_{a,b}(\lambda)$  est la matrice  $A$  à laquelle on a ajouté  $\lambda$  fois la  $a$ -ième colonne à la  $b$ -ième colonne.

## 2.2 Systèmes linéaires



### Définition d'un système linéaire

Soient  $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  et  $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ , on dit que le système suivant :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = y_2 \\ \vdots \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \dots + a_{i,p}x_p = y_i \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = y_n \end{cases}$$

est un **système linéaire** de  $n$  équations à  $p$  inconnues  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  de coefficients  $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et de second membre  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ . On dit que  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  est solution du système s'il vérifie les  $n$  équations du système. Résoudre un tel système revient à déterminer toutes les solutions. Un système est dit **compatible** s'il admet au moins une solution. On dit que le système est **homogène** si le second membre est nul.

**Remarque 8.** Résoudre un système linéaire revient à trouver tous les  $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$  tel que  $AX = Y$ .



### Proposition n° 8 : structure des solutions

Soit un système linéaire  $AX = Y$  compatible dont  $X_P$  est une solution particulière. Les solutions de ce système sont exactement de la forme  $X_P + X_H$  où  $X_H$  est solution du système homogène  $AX = 0_{p,1}$ .



### Comment résoudre un système linéaire ? (pivot de Gauss)

On fait des opérations sur les lignes de façon à «échelonner» le système : à chaque ligne, la première inconnue rencontrée doit être plus à droite qu'à la ligne précédente. Une ligne comme « $0 = 0$ » se supprime, une ligne comme « $0 = 1$ » montre que le système est incompatible. Une fois le système échelonné, la première inconnue de chaque ligne est appelée inconnue principale et est exprimé en fonction des inconnues non principales (appelées inconnues secondaires).

**Exemple 8.** Résoudre  $\begin{cases} 2x + 3y + 5z + 2t = 3 \\ 4x + 6y + z + 2t = 2 \end{cases}$ .

## 3 Matrices carrées

On note  $0_n$  la matrice nulle de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .



### Proposition n° 9 : des opérations des matrices carrées

Soient  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ . Alors,  $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $A \times I_n = I_n \times A = A$ ,  $A \times 0_n = 0_n \times A = 0_n$ ,  $A^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$



### Définition de la puissance d'une matrice carrée

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On pose, pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $A^k = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k \text{ fois}}$ . Par convention,  $A^0 = I_n$ .

**Exemple 9.** Si  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ , alors  $AB = 0_2$ . Si  $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  alors  $N^2 = 0_2$ .

### Définition d'un diviseur de zéro, d'une matrice nilpotente

On dit que  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est un **diviseur de zéro** si  $A \neq 0_n$  et s'il existe  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  non nulle telle que  $AB = 0_n$ .  
Soit  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , s'il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  telle que  $N^p = 0_n$ , on dit que  $N$  est une matrice **nilpotente**.

### Définition de la diagonale d'une matrice carrée

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $(a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n})$  est appelée **diagonale** de  $A$ .

## 3.1 Cas particuliers de matrices carrées

### Définition des matrices scalaires/diagonales/triangulaires supérieures/triangulaires inférieures

1. Si  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on dit que  $\lambda I_n$  est une **matrice scalaire**.
2. On dit que  $D = (d_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est une matrice **diagonale** si ses termes en dehors de la diagonale sont nuls :  
 $\forall (i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2 \quad i \neq j \implies d_{i,j} = 0$
3. On dit que  $T = (t_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est une matrice **triangulaire supérieure** (resp. **inférieure**) si ses coefficients en dessous (resp. en dessus) de la diagonale sont nuls :  
 $\forall (i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2 \quad i > j$  (resp.  $i < j$ )  $\implies t_{i,j} = 0$

**Exemple 10.**  $0_n, I_n, 2I_n$  sont des matrices scalaires de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  est diagonale,  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  sont triangulaires supérieures. Les matrices scalaires commutent avec toutes les autres matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  (ce sont mêmes les seules matrices à commuter avec toutes les matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ).

### Proposition n° 10 : propriétés des produits de matrices diagonales et triangulaires

1. Si  $D$  et  $D'$  sont deux matrices diagonales de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , alors  $D'' = DD'$  est diagonale et  $d''_{i,i} = d_{i,i} \times d'_{i,i}$ .
2. Si  $T$  et  $T'$  deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , alors  $T'' = TT'$  est triangulaire supérieure (resp. inférieure). De plus,  $t''_{i,i} = t_{i,i} \times t'_{i,i}$

**Exemple 11.** Si  $D$  est une matrice diagonale de diagonale  $(d_1, \dots, d_n)$ , alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $D^k$  est une matrice diagonale de diagonale  $(d_1^k, \dots, d_n^k)$ .

### Définition des matrices symétriques et antisymétriques

1. On dit que  $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est **symétrique** si  $S = S^\top$  i.e. pour tout  $(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2$  si  $s_{i,j} = s_{j,i}$ .
  2. On dit que  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est **antisymétrique** si  $A = -A^\top$  i.e. pour tout  $(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2$ ,  $a_{i,j} = -a_{j,i}$ .
- On note  $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$  (resp.  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ ) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**Exemple 12.**  $S = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$  est symétrique,  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$  est antisymétrique.

**Remarque 9.** Les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont forcément nuls.

**Exemple 13.** Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ , développer  $(A + B)^2$  ainsi que  $(A - B)(A + B)$

### Proposition n° 11 : formule du binôme de Newton et factorisation de $A^p - B^p$

Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ . Si  $AB = BA$  alors  $(A + B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$  et  $A^p - B^p = (A - B) \sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}$



**Péril imminent la condition «A et B commutent» n'est pas décorative**

⚠ Appliquez ces formules sans vérifier que A et B commutent et c'est la chute!

**Exemple 14.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ , calculer  $A^p$  pour  $p \in \mathbb{N}$ .

### 3.2 Inverse d'une matrice carrée



**Définition d'une matrice inversible et de l'inverse d'une matrice carrée**

On dit que  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est **inversible** s'il existe  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  tel que  $AB = BA = I_n$ . Le  $B$  est alors unique et on dit que  $B$  est l'**inverse** de  $A$  et on le note  $A^{-1}$ . On note  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices inversibles de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**Exemples 15.**

- $I_n$  est inversible et  $I_n^{-1} = I_n$ ,  $0_n$  n'est pas inversible.
- Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^3 - A^2 + A = I_n$ , montrer que  $A$  est inversible et déterminer son inverse.
- Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  possède une ligne (ou une colonne) remplie de 0, alors  $A$  n'est pas inversible.



**Proposition n° 12 : propriétés de l'inverse**

Soient  $(A, B) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})^2$  et  $\lambda \in \mathbb{K}^*$

1.  $A^{-1} \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  et  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
2.  $\lambda A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  et  $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$ .
3.  $A^\top$  est inversible et  $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$ .
4.  $AB$  est inversible et  $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ .



**Attention la somme de matrices inversibles n'est pas forcément inversible**

⚠  $I_n$  et  $-I_n$  sont inversibles mais pas leur somme.



**Proposition n° 13 : inverse d'une matrice de taille (2, 2)**

Une matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  est inversible ssi  $\det(A) = ad - bc \neq 0$ . Dans ce cas,  $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$



**Théorème n° 1 d'inversibilité d'une matrice par système linéaire**

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est inversible ssi il existe  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que pour tout  $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  le système linéaire  $Y = AX$  admet une et unique solution qui est  $X = BY$ . Dans ce cas,  $A^{-1} = B$ .

**Exemples 16.** Montrer que la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  est inversible et calculer son inverse. Étudier l'inversibilité de

la matrice  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .



**Proposition n° 14 : inversibilité d'une matrice diagonale**

Soit  $D = (d_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice diagonale. Alors  $D \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  ssi pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $d_{i,i} \neq 0$ . Dans ce cas,  $D^{-1}$  est une matrice diagonale de diagonale  $(d_{1,1}^{-1}, d_{2,2}^{-1}, \dots, d_{n,n}^{-1})$ .

**Proposition n° 15 : inversibilité des matrices d'opérations élémentaires et opérations élémentaires**

Soit  $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$  avec  $i \neq j$  et  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ , les matrices  $P_{i,j}$ ,  $D_i(\lambda)$  et  $T_{i,j}(\lambda)$  sont inversibles.  
 Les opérations élémentaires sur les matrices conservent l'inversibilité.

**Théorème n° 2 d'inversibilité d'une matrice par opérations sur les lignes**

Si en effectuant des opérations simultanément sur les lignes de  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et de  $I_n$ , on arrive à échelonner  $A$  en  $I_n$ , alors  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  et on a transformé  $I_n$  en  $A^{-1}$ . Sinon, en échelonnant, on obtiendra une ligne remplie de 0 et  $A$  n'est pas inversible.

**Exemple 17.** Étudier à nouveau l'inversibilité des matrices de l'exemple 16.

**Proposition n° 16 : inversibilité d'une matrice triangulaire**

Une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure)  $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est inversible ssi pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $t_{i,i} \neq 0$ .  
 Alors,  $T^{-1}$  est triangulaire supérieure (resp. inférieure), dont la diagonale est  $(t_{1,1}^{-1}, \dots, t_{n,n}^{-1})$ .

**Exemple 18.** Calculer l'inverse de  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

## 4 Méthodes

**Comment calculer les puissances d'une matrice ?**

1. Si  $N$  est nilpotente, alors il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $N^p = 0_n$ , alors pour tout entier  $k \geq p$ ,  $N^k = N^p N^{k-p} = 0_n$ .
2. Si  $D$  est diagonale, alors  $D^k$  est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont ceux de  $D$  mis à la puissance  $k$ .
3. Décomposer la matrice en  $A + B$  si  $A$  et  $B$  commutent et que vous savez calculer  $A^k$  et  $B^k$  pour tout  $k$ , pour appliquer la formule du binôme. Souvent,  $A$  est une matrice scalaire et  $B$  une matrice nilpotente.
4. Calculer les premières puissances pour conjecturer une formule puis la montrer par récurrence.
5. Si la matrice  $M = PDP^{-1}$  avec  $D$  diagonale et  $P$  inversible, alors  $M^p = PD^pP^{-1}$

**Comment calculer l'inverse d'une matrice ?**

1. Si la matrice est de taille  $(2, 2)$  connaître et utiliser seulement la formule pour les matrices de taille  $(2, 2)$ .
2. Imaginer ce que pourrait être l'inverse de  $A$  et le multiplier par  $A$  pour voir si cela vaut  $I_n$ .
3. Effectuer des opérations simultanément sur les lignes de  $A$  et  $I_n$  de façon à transformer  $A$  en  $I_n$  (en échelonnant la matrice colonne par colonne). Si cela est possible, alors  $A$  est inversible et en transformant  $A$  en  $I_n$ , on a transformé  $I_n$  en  $A^{-1}$ . Si en échelonnant, on obtient une ligne remplie de 0,  $A$  n'est pas inversible.
4. Résoudre le système  $AX = Y$  pour  $Y$  une matrice colonne quelconque sous la forme  $X = BY$ .
5. Si on a une relation entre les puissances de  $A$  factoriser par  $A$  en laissant le terme en  $I_n$  de côté.