



Chapitre 13

Espaces vectoriels de dimension finie

Objectifs :

- Donner une définition consistante de la dimension d'un espace vectoriel.
- Établir des théorèmes simplifiant le travail pour montrer qu'une famille est une base ou pour montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires etc.

Prérequis :

- Ensembles et applications
- Systèmes linéaires
- Matrices
- Polynômes
- Espaces vectoriels



Attention : utiliser un lecteur de pdf adapté

Ce polycopié contient plusieurs animations, il est donc conseillé d'utiliser un lecteur de pdf capable de lire les animations (comme Adobe Reader, Foxit PDF Reader, Okular ou autres).

Table des matières

1	Construction de la théorie de la dimension finie	2
2	Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie	3
2.1	Dimension d'un sous-espace vectoriel et supplémentaires	3
2.2	Rang d'une famille de vecteurs	4
3	Espace vectoriel produit	5
4	Méthodes	5

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , E est un \mathbb{K} -espace vectoriel différent de $\{0_E\}$. Pour $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E , on note $|\mathcal{F}|$ son cardinal : $|\mathcal{F}| = n$.

1 Construction de la théorie de la dimension finie

Remarque 1. La dimension n'est pas égale au nombre d'éléments de E , car E est un ensemble infini.



Définition d'un espace vectoriel de dimension finie

On dit que E est un espace vectoriel de **dimension finie** si E possède une famille génératrice (finie).
Sinon, on dit que E est un espace vectoriel de **dimension infinie**.



Exemple d'espaces vectoriels de dimension finie ou de dimension infinie

\mathbb{K}^n , \mathbb{C} vu comme un \mathbb{C} -EV ou un \mathbb{R} -EV, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont de dimension finie, contrairement à $\mathbb{K}[X]$.

Lemme 1. Soient \mathcal{L} une famille libre de E et $x \in E$. Alors, $\mathcal{L} \cup (x)$ est libre si et seulement si $x \notin \text{vect}(\mathcal{L})$.

Lemme 2. Si \mathcal{G} engendre E et \mathcal{G}' est une famille telle que $\mathcal{G} \subset \text{vect}(\mathcal{G}')$, alors \mathcal{G}' engendre aussi E .



Théorème n° 1 de la base incomplète

Soit E un \mathbb{K} -EV de dimension finie. Soit \mathcal{L} une famille libre de E , il existe \mathcal{B} base de E telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$.



Théorème n° 2 de la base extraite

Soit E un \mathbb{K} -EV de dimension finie. Soit \mathcal{G} une famille génératrice de E , il existe \mathcal{B} base de E telle que $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.

Remarque 2. Grâce au théorème de la base incomplète ou à celui de la base extraite, il s'ensuit qu'un EV de dimension finie possède au moins une base (il n'y a pas unicité des bases).

Lemme 3. Si \mathcal{G} est une famille génératrice de E et \mathcal{L} une famille libre, alors $|\mathcal{L}| \leq |\mathcal{G}|$.



Théorème n° 3 : toutes les bases ont le même cardinal

Si E est un \mathbb{K} -EV de dimension finie, toutes les bases de E ont le même cardinal.



Définition de la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

Soient E un \mathbb{K} -EV de dimension finie et \mathcal{B} une base de E . On définit la **dimension** de E , par $\dim(E) = |\mathcal{B}|$.

Remarque 3. La dimension d'un espace vectoriel E s'interprète comme le nombre de degrés de liberté de E .
Si $E = \{0_E\}$, on pose $\dim(E) = 0$, si E n'est pas de dimension finie, on dit que la dimension de E est infinie.



Exemples de dimensions importantes à connaître

$$\dim(\mathbb{K}^n) = \quad \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = \quad \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = \quad \dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = \quad \dim(\mathbb{K}_n[X]) =$$

La dimension de l'ensemble des solutions d'une EQDL homogène d'ordre 1 est

La dimension de l'espace des solutions d'une EQDL homogène d'ordre 2 à coefficients constants est

La dimension de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants est



Attention à la dimension de deux espaces vectoriels

La dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est n^2 (et non n), de même attention à la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exemple 1. Soit $F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x - t = 0 \end{cases} \right\}$. Déterminer une base de F et en déduire $\dim(F)$.



Proposition n° 1 : comparaison entre les cardinaux

Soit E un \mathbb{K} -EV de dimension fine. Si $\mathcal{L}, \mathcal{B}, \mathcal{G}$ sont respectivement libre, base, et génératrice alors $|\mathcal{L}| \leq |\mathcal{B}| \leq |\mathcal{G}|$

Exemple 2. Si E est de dimension n , alors toute famille de $n + 1$ vecteurs (ou plus) est liée.



Proposition n° 2 : caractérisation des bases avec le cardinal

Soient E un \mathbb{K} -EV de dimension finie, et \mathcal{F} une famille finie de vecteurs de E telle que $|\mathcal{F}| = \dim(E)$. Alors, \mathcal{F} est une base de E ssi \mathcal{F} est une famille génératrice de E ssi \mathcal{F} est une famille libre.

Exemple 3. 1. Montrer que $\mathcal{B} = ((1, 1, 0), (2, 1, 0), (5, 1, 1))$ est une base de \mathbb{R}^3 .

2. Soit $((1, 1, 1), (2, 1, 3), (3, 2, 4), (-1, 0, 3))$ extraire de cette famille une base de \mathbb{R}^3 .

3. Soit $\left(I_2, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$, compléter cette famille libre en une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.



Proposition n° 3 : bases de $\mathbb{K}_n[X]$

Si $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \dots, P_n) \in \mathbb{K}[X]^{n+1}$ telle que pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $d^i P_i = i$, alors \mathcal{B} est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.



Théorème n° 4 : formule de Taylor pour les polynômes

Soit $P = \sum_{k=0}^n c_k X^k \in \mathbb{K}_n[X]$ et $a \in \mathbb{K}$, alors

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$$

En particulier, pour $a = 0$, pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $c_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$

2 Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie

2.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel et supplémentaires



Proposition n° 4 : dimension d'un sous-espace vectoriel

Soient E un EV de dimension finie et F un SEV de E , alors :

1. F est de dimension finie
2. $\dim(F) \leq \dim(E)$
3. $E = F \iff \dim(E) = \dim(F)$



Exemples de sous-espaces particuliers

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n . Soit F un sous-espace vectoriel de E :

- Si $\dim(F) = 1$, alors on appelle F une **droite** (vectorielle) de E .
- Si $\dim(F) = 2$, alors on appelle F un **plan** (vectoriel) de E .
- Si $\dim(F) = n - 1$, alors on appelle F un **hyperplan** de E .

- Exemples 4.**
- Si $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - 2z = 0\}$, donner $\dim(F)$.
 - Montrer que $\mathcal{C}^\infty([a; b], \mathbb{R})$, $\mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$, $\mathcal{F}([a; b], \mathbb{R})$ pour $a < b$, sont de dimension infinie.



Proposition n° 5 : en dimension finie, les supplémentaires existent

Soit F un SEV de E (un \mathbb{K} -EV de dimension finie), alors il existe un supplémentaire de F dans E .



Péril imminent : risque de confusion sur les supplémentaires

Existence d'un supplémentaire pas unicité, on dit donc «**un** supplémentaire» et non «**les** supplémentaires». Ne pas confondre complémentaire et supplémentaire, si F est un SEV, alors $E \setminus F$ n'est jamais un SEV.



Proposition n° 6 : dimension de la somme directe

Soient F et G deux SEV de dimension finie de E en somme directe, alors $F \oplus G$ est de dimension finie et $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$

Exemple 5. Si $F = \text{vect}((1, 2))$ et $G = \text{vect}((1, 3))$ que vaut $F + G$?



Théorème n° 5 : formule de Grassmann

Soient F et G deux SEVs de dimension finie de E , alors $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$

Exemple 6. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, si $F = \text{vect}(I_2 + E_{2,2}, E_{1,1})$ et $G = \text{vect}(I_2, E_{1,2})$ que vaut $\dim(F + G)$?



Péril imminent : la somme pas l'union

Ne pas écrire $\dim(F \cup G) = \dots$, car $F \cup G$ n'est pas, en général, un espace vectoriel.



Théorème n° 6 : caractérisation des supplémentaires avec la dimension

Soient F et G deux SEV de E , un EV de dimension finie, alors :

1. Si $F \oplus G$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ alors $E = F \oplus G$ (le plus souvent utilisé dans la pratique)
2. Si $E = F + G$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ alors $E = F \oplus G$

Exemples 7. Proposer des supplémentaires de $F = \text{vect}((1, 0))$ dans $E = \mathbb{R}^2$. Idem pour $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \text{vect}((1, 0, 0))$.

2.2 Rang d'une famille de vecteurs



Définition du rang d'une famille finie de vecteurs

Soit \mathcal{F} une famille finie de vecteurs de E , on appelle **rang** de \mathcal{F} :

$$\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\text{vect}(\mathcal{F}))$$



Attention à ne pas confondre dimension, rang et cardinaux

La dimension c'est pour les EV. Le rang et les cardinaux sont pour les familles finies de vecteurs.

(a) Exemple d'un supplémentaire de F dans \mathbb{R}^2 .

(b) Exemple d'un autre supplémentaire de F dans \mathbb{R}^2 .

FIGURE 1 – Supplémentaires de $F = \text{vect}((1, 0))$ dans \mathbb{R}^2 . Il y a existence des supplémentaires mais pas unicité.

Exemple 8. Soit $E = \mathbb{R}^3$, notons $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (2, 1, 1)$ et $e_3 = (4, 3, 3)$. Former des phrases justes utilisant les mots dimension, rang et cardinaux et (e_1, e_2, e_3) .



Proposition n° 7 : propriétés du rang

Soient E un EV de dimension finie n et $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E . Alors :

1. $\text{rg}(\mathcal{F}) \leq \min(p, n)$.
2. \mathcal{F} engendre E SSI $\text{rg}(\mathcal{F}) = n$.
3. \mathcal{F} est libre SSI $\text{rg}(\mathcal{F}) = p$.
4. Soit $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, si $e_i \in \text{vect}(\mathcal{F} \setminus (e_i))$ alors $\text{rg}(\mathcal{F}) = \text{rg}(\mathcal{F} \setminus (e_i))$.
5. $\text{rg}(\mathcal{F})$ est le nombre maximum de vecteurs de \mathcal{F} linéairement indépendants.

Exemple 9. Calculer le rang de $(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$, avec $P_1 = X^2$, $P_2 = X^2 + 1$, $P_3 = 5X^2 + 1$, $P_4 = P_1$, $P_5 = 2P_1$

3 Espace vectoriel produit



Définition du produit d'espaces vectoriels

Soit E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. Considérons l'ensemble $G = E \times F$ muni des deux opérations :

$$+ : \begin{cases} G \times G & \longrightarrow G \\ ((e, f), (e', f')) & \longmapsto (e + e', f + f') \end{cases} \quad \text{et} \quad \cdot : \begin{cases} \mathbb{K} \times G & \longrightarrow G \\ (\lambda, (e, f)) & \longmapsto (\lambda e, \lambda f) \end{cases}$$

On vérifie que $G = E \times F$ est un espace vectoriel appelé **espace vectoriel produit** de E et F .

Exemple 10. Prenons $G = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}[X]$. Soient $x = (M, P) \in G$ où $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, $y = (N, Q) \in G$, alors $x + y = (M + N, P + Q)$.



Proposition n° 8 : dimension du produit d'espaces vectoriels

Si E et F sont deux \mathbb{K} -EV de dimension finie, alors $E \times F$ est aussi un EV de dimension finie et

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$$


4 Méthodes




Comment montrer qu'un espace vectoriel est de dimension finie ?

M1 On trouve une famille génératrice.


M2 On montre qu'il est inclus dans un autre espace vectoriel de dim finie.

 **Comment montrer que F et G sont supplémentaires en dimension finie ?**

| Souvent, on montre que $F \cap G = \{0_E\}$ et que $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.


 **Comment montrer que F et G deux sous-espaces vectoriels sont égaux ?**

| Montrer $\dim(F) = \dim(G)$ et $F \subset G$.


 **Comment calculer la dimension d'un espace vectoriel ?**

| M1 Compter le nombre d'éléments dans une de ses bases.

| M2 Formule de Grassmann (si ça parle de $F \cap G$ ou $F + G$)


 **Comment montrer que \mathcal{B} est une base de E en dimension finie ?**

| Souvent en dimension finie, on montre que \mathcal{B} est libre, puis on vérifie que $|\mathcal{B}| = \dim(E)$.


 **Comment construire une base de E ?**

| M1 Si on a une famille libre, rajouter petit-à-petit des vecteurs de façon à rester libre. Dès que la famille a $\dim(E)$ d'éléments, on a une base.


| M2 Si on a une famille génératrice, retirer petit-à-petit des vecteurs de façon à rester génératrice. Dès que la famille a $\dim(E)$ d'éléments, on a une base.

 **Comment trouver une base de $F + G$?**

| Prendre une base de F une base de G , alors l'union des deux est génératrice, puis extraire de cette famille génératrice une base.

 **Comment calculer le rang d'une famille de vecteurs ?**

| Pour calculer $\text{rg}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ retirer un vecteur de la famille s'il est combinaison linéaire des autres. Puis continuer tant qu'on trouve des vecteurs que l'on peut exprimer comme combinaison linéaire des autres. S'arrêter, dès qu'on obtient une famille libre, le rang est alors égal au nombre de vecteurs qui restent.

 **Comment construire un supplémentaire de F un SEV de E ?**

| Si \mathcal{B} est une base de F , complétez cette famille libre en une base de E , poser G l'espace vectoriel engendré par les vecteurs utilisés pour compléter \mathcal{B} en une base de E . La preuve de la proposition 5 montre que G est un supplémentaire de F dans E .