Chapitre 13

Espaces vectoriels de dimension finie

Objectifs :

- Donner une définition consistante de la dimension d'un espace vectoriel.
- Établir des théorèmes simplifiant le travail pour montrer qu'une famille est une base ou pour montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires etc.

Prérequis :

- Ensembles et applications
- Systèmes linéaires
- Matrices
- Polynômes
- Espaces vectoriels

Table des matières

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Pour $\mathscr{F} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs de E, on note $|\mathscr{F}|$ son cardinal : $|\mathscr{F}| = n$.

1 Construction de la théorie de la dimension finie

Remarque 1. La dimension n'est pas égale au nombre d'éléments de E, car E est un ensemble infini (sauf si $E = \{0_E\}$).

Définition d'un espace vectoriel de dimension finie

On dit que E est un espace vectoriel de **dimension finie** si E possède une partie génératrice (finie).
Sinon, on dit que E est un espace vectoriel de **dimension infinie**.

Exemple d'espaces vectoriels de dimension finie ou non

$\mathbb{K}^n$, $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{C}$-EV ou un $\mathbb{R}$-EV, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont de dimension finie, contrairement à $\mathbb{K}[X]$.

Dans toute la suite, on considéra E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie tel que $E \neq \{0_E\}$.

Lemme 1. Soient $\mathscr{L}$ une famille libre de E et $x \in E$. Alors, $\mathscr{L} \cup (x)$ est libre si et seulement si $x \notin \text{vect}(\mathscr{L})$.

Lemme 2. Soient $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E et $\mathscr{G}'$ est une famille finie telle que $\mathscr{G} \subset \text{vect}(\mathscr{G}')$, alors $\mathscr{G}'$ est aussi génératrice de E.

Théorème n° 1 de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{K}$-EV de dimension finie. Soit $\mathscr{L}$ une famille libre de E, il existe $\mathscr{B}$ base de E telle que $\mathscr{L} \subset \mathscr{B}$.

Théorème n° 2 de la base extraite

Soit E un $\mathbb{K}$-EV de dimension finie. Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E, il existe $\mathscr{B}$ base de E telle que $\mathscr{B} \subset \mathscr{G}$.

Corollaire : existence de bases en dimension finie

L'espace vectoriel E possède au moins une base (il n'y a pas unicité des bases).

Lemme 3. Si $\mathscr{G}$ est une famille génératrice de E et $\mathscr{L}$ une famille libre, alors $|\mathscr{L}| \leqslant |\mathscr{G}|$.

Théorème n° 3 : toutes les bases ont le même cardinal

Si E est un $\mathbb{K}$-EV de dimension finie, toutes les bases de E ont le même cardinal.

Définition de la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{B}$ une base quelconque de E. On définit la **dimension** de E, par
$$\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim(E) = |\mathscr{B}|.$$

Remarque 2. La dimension d'un espace vectoriel E s'interprète comme le nombre de degrés de liberté de E.
Si $E = \{0_E\}$, on pose $\dim(E) = 0$, si E n'est pas de dimension finie, on dit que la dimension de E est infinie.

Exemples de dimensions importantes à connaître

$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) =$ $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) =$ $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) =$ $\dim_{\mathbb{K}}(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})) =$ $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X]) =$
La dimension de l'ensemble des solutions d'une EQDL homogène d'ordre 1 est
La dimension de l'espace des solutions d'une EQDL homogène d'ordre 2 à coefficients constants est
La dimension de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants est

Attention à la dimension de deux espaces vectoriels

La dimension de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est n^2 (et non n), de même attention à la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exemple 1. Soit $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \left\{\begin{array}{lcl} x+2y+z & = & 0 \\ 2x-t & = & 0 \end{array}\right.\right\}$. Déterminer une base de F et en déduire $\dim(F)$.

Proposition n° 1 : caractérisation des bases avec le cardinal et comparaison entre les cardinaux

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, soit $\mathscr{F}$ une famille de E à n éléments. Alors,

$$\mathscr{F} \text{ est une base de } E \text{ ssi } \mathscr{F} \text{ est une famille génératrice de } E \text{ ssi } \mathscr{F} \text{ est une famille libre.}$$

De plus, pour toutes familles $\mathscr{L}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{G}$ respectivement libre, base, et génératrice : $|\mathscr{L}| \leqslant |\mathscr{B}| \leqslant |\mathscr{G}|$

Exemple 2. Soit $((1,1,1),(2,1,3),(3,2,4),(-1,0,3))$ extraire de cette famille une base de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 3. Soit $\left(I_2, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, compléter cette famille libre en une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exemple 4. Montrer que $\mathscr{B} = ((1,1,0),(2,1,0),(5,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 5. Si E est de dimension n, alors toute famille de $n+1$ vecteurs (ou plus) est liée.

Proposition n° 2 : bases de $\mathbb{K}_n[X]$

Si $\mathscr{B} = (P_0, P_1, \ldots, P_n) \in \mathbb{K}[X]^{n+1}$ telle que pour tout $i \in [\![0\,;n]\!]$, $d^\circ P_i = i$, alors $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Théorème n° 4 : formule de Taylor pour les polynômes

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k \in \mathbb{K}_n[X]$ et $a \in \mathbb{K}$, alors $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$

En particulier, pour $a = 0$, pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, $c_k = P^{(k)}(0)/k!$.

2 Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie

2.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel et supplémentaires

Proposition n° 3 : dimension d'un sous-espace vectoriel

Soient E un EV de dimension finie et F un SEV de E, alors :

1. F est de dimension finie
2. $\dim(F) \leqslant \dim(E)$
3. $E = F \iff \dim(E) = \dim(F)$

Exemples de sous-espaces particuliers

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soit F un sous-espace vectoriel de E :

- Si $\dim(F) = 1$, alors on appelle F une **droite** (vectorielle) de E.
- Si $\dim(F) = 2$, alors on appelle F un **plan** (vectoriel) de E.
- Si $\dim(F) = n-1$, alors on appelle F un **hyperplan** de E.

Exemple 6. Si $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y-2z=0\}$, donner $\dim(F)$.

Exemple 7. Montrer que $\mathscr{C}^\infty([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ est de dimension infinie, puis en déduire qu'il en est de même pour $\mathscr{C}^0([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ et pour $\mathscr{F}([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ pour $a < b$.

Proposition n° 4 : en dimension finie, les supplémentaires existent

Soit F un SEV de E (un $\mathbb{K}$-EV de dimension finie), alors il existe un supplémentaire de F dans E.

Péril imminent : risque de confusion sur les supplémentaires

Existence d'un supplémentaire pas unicité, on dit donc «**un** supplémentaire» et non «`le` supplémentaire».
Ne pas confondre complémentaire et supplémentaire, si F est un SEV, alors $E \backslash F$ n'est jamais un SEV.

Proposition n° 5 : dimension de la somme directe

Soient F et G deux SEV de dimension finie de E en somme directe, alors $F \oplus G$ est de dimension finie et $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$

Exemple 8. Si $F = \mathrm{vect}((1,2))$ et $G = \mathrm{vect}((1,3))$ que vaut $F + G$?

Théorème n° 5 : formule de Grassmann

Soient F et G deux SEVs de dimension finie de E, alors $$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Exemple 9. Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, si $F = \mathrm{vect}(I_2 + E_{2,2}, E_{1,1})$ et $G = \mathrm{vect}(I_2, E_{1,2})$ que vaut $\dim(F+G)$?

Péril imminent : la somme pas l'union

Ne pas écrire $\dim(F \bigcup G) = \ldots$, car $F \cup G$ **n'est pas**, en général, un espace vectoriel.

Théorème n° 6 : caractérisation des supplémentaires avec la dimension

Soient F et G deux SEV de E, un EV de dimension finie, alors :

1. Si $F \oplus G$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ alors $E = F \oplus G$ (le plus souvent utilisé dans la pratique)
2. Si $E = F + G$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ alors $E = F \oplus G$

Exemple 10. Proposer des supplémentaires de $F = \mathrm{vect}((1,1))$ dans $E = \mathbb{R}^2$. Idem pour $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \mathrm{vect}((1,0,0))$.

2.2 Rang d'une famille de vecteurs

Définition du rang d'une famille finie de vecteurs

Soit $\mathscr{F}$ une famille finie de vecteurs de E, on appelle **rang** de $\mathscr{F}$: $$\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \dim(\mathrm{vect}(\mathscr{F}))$$

Attention à ne pas confondre dimension, rang et cardinaux

La dimension c'est pour les EV. Le rang et les cardinaux sont pour les familles finies de vecteurs.

Exemple 11. Soit $E = \mathbb{R}^3$, notons $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (2,1,1)$ et $e_3 = (4,3,3)$. Former des phrases justes utilisant les mots dimension, rang et cardinaux et (e_1, e_2, e_3).

Proposition n° 6 : propriétés du rang

Soient E un EV de dimension finie n et $\mathscr{F} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une famille de vecteurs de E. Alors :

1. $\text{rg}(\mathscr{F}) \leqslant \min(p, n)$.
2. $\mathscr{F}$ engendre E SSI $\text{rg}(\mathscr{F}) = n$.
3. $\mathscr{F}$ est libre SSI $\text{rg}(\mathscr{F}) = p$.
4. Soit $i \in [\![1 ; p]\!]$, si $e_i \in \text{vect}(\mathscr{F} \backslash (e_i))$ alors $\text{rg}(\mathscr{F}) = \text{rg}(\mathscr{F} \backslash (e_i))$.
5. $\text{rg}(\mathscr{F})$ est le nombre maximum de vecteurs de $\mathscr{F}$ linéairement indépendants.

Exemple 12. Calculer le rang de $(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$, avec $P_1 = X^2$, $P_2 = X^2 + 1$, $P_3 = 5X^2 + 1$, $P_4 = P_1$, $P_5 = 2P_1$

3 Espace vectoriel produit

Définition du produit d'espaces vectoriels

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Considérons l'ensemble $G = E \times F$ muni des deux opérations :

$$+ : \begin{cases} G \times G & \longrightarrow G \\ ((e,f),(e',f')) & \longmapsto (e+e', f+f') \end{cases} \quad \text{et} \quad \cdot : \begin{cases} \mathbb{K} \times G & \longrightarrow G \\ (\lambda, (e,f)) & \longmapsto (\lambda e, \lambda f) \end{cases}$$

On vérifie que $G = E \times F$ est un espace vectoriel appelé **espace vectoriel produit** de E et F.

Exemple 13. Prenons $G = \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}[X]$. Soient $x = (M, P) \in G$ où $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, $y = (N, Q) \in G$, alors $x + y = (M + N, P + Q)$.

Proposition n° 7 : dimension du produit d'espaces vectoriels

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-EV de dimension finie, alors $E \times F$ est aussi un EV de dimension finie et

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$$

4 Méthodes

Comment montrer qu'un espace vectoriel est de dimension finie ?

M1 On trouve une famille génératrice.

M2 On montre qu'il est inclus dans un autre espace vectoriel de dim finie.

Comment montrer que F et G sont supplémentaire en dimension finie ?

Souvent, on montre que $F \cap G = \{0_E\}$ et que $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

Comment montrer que F et G deux sous-espaces vectoriels sont égaux ?

Montrer $\dim(F) = \dim(G)$ et $F \subset G$.

Comment calculer la dimension d'un espace vectoriel ?

M1 Compter le nombre d'éléments dans une de ses bases.

M2 Formule de Grassmann (si ça parle de $F \cap G$ ou $F + G$)

Comment montrer que $\mathscr{B}$ est une base de E en dimension finie ?

Souvent en dimension finie, on montre que $\mathscr{B}$ est libre, puis on vérifie que $|\mathscr{B}| = \dim(E)$.

Comment construire une base de E ?

M1 Si on a une famille libre, rajouter petit-à-petit des vecteurs de façon à rester libre. Dès que la famille a $\dim(E)$ d'éléments, on a une base.

M2 Si on a une famille génératrice, retirer petit-à-petit des vecteurs de façon à rester génératrice. Dès que la famille a $\dim(E)$ d'éléments, on a une base.

Comment trouver une base de $F + G$?

Prendre une base de F une base de G, alors l'union des deux est génératrice, puis extraire de cette famille génératrice une base.

Comment calculer le rang d'une famille de vecteurs ?

Pour calculer $\operatorname{rg}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ retirer un vecteur de la famille s'il est combinaison linéaire des autres. Puis continuer tant qu'on trouve des vecteurs que l'on peut exprimer comme combinaison linéaire des autres. S'arrêter, dès qu'on obtient une famille libre, le rang est alors égal au nombre de vecteurs qui restent.