Produits de matrices

Exercice 1 ($\star$ Cal)**.** On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Quels produits matriciels sont possibles ? Les calculer.
2. Donner la transposée des six matrices.

Exercice 2 (𝄞$\star$ Cal)**.** Soit J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Calculer J^2 et en déduire J^p pour $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 ($\star$ Cal ©)**.** Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

1. Pour $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, calculer $R_\theta R_{\theta'}$.
2. En déduire ${R_\theta}^n$ pour $(\theta, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$.
3. Démontrer que R_θ est inversible.
4. Reprendre les questions précédentes avec $H_x = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(x) & \operatorname{sh}(x) \\ \operatorname{sh}(x) & \operatorname{ch}(x) \end{pmatrix}$.

Exercice 4 ($\star\star$ Rai ©)**.** Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on pose $B = AA^\top$.

1. Montrer que les coefficients de la diagonale de B sont positifs ou nuls.
2. Montrer que B est symétrique.
3. Montrer que si B est antisymétrique alors A est la matrice nulle.
4. Démontrer, par un contre-exemple, que le résultat de la question 3 est faux avec $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$.

Exercice 5 ($\star$ Cal)**.** Calculer les puissances des matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 ($\star$ Rai ©)**.** Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$ telles que $AB = BA$.

1. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^p B = BA^p$
2. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(AB)^p = A^p B^p$

Exercice 7 (𝄞$\star\star$ Rai, Rec ©)**.** Soient A et B deux matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$.

1. Montrer que AB est nilpotente (utiliser le résultat de l'exercice 6).
2. Montrer que $A + B$ est nilpotente.

Exercice 8 ($\star$ Cal)**.** On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$ ainsi que D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Idem avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 9 ($\star\star$ Rai)**.** Soient $p \in \mathbb{N}$ et T_p l'ensemble des matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que pour tout $(i, j) \in [\![1 ; n]\!]^2$, $j < i + p$ implique $A_{i,j} = 0$.

1. Que représente, T_0, T_1, T_2 et T_n ?
2. Démontrer que si $A \in T_p$ et $B \in T_q$, alors $AB \in T_{p+q}$.
3. Soit $N \in T_1$, montrer que N est nilpotente.

Exercice 10 ($\star$ Cal, Com ©)**.** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on suppose que A^2 est une combinaison linéaire de A et I_n, c'est-à-dire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^2 = aA + bI_n$.

1. Démontrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p est également une combinaison linéaire de A et I_n.
2. On suppose que $b \neq 0$, démontrer que A est inversible et que A^{-1} est aussi une combinaison linéaire de A et I_n.

Exercice 11 (𝄞$\star\star$ Rai ©)**.** Soient $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ et $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

1. Quelle est la taille de la matrice $X^\top AX$?
2. Démontrer que $X^\top AX = 0$.

Inverse de matrices

Exercice 12 ($\star$ Cal)**.** Calculer, lorsque c'est possible, l'inverse des matrices suivantes $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 13 ($\star$ Rai ©)**.** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle qu'il existe une matrice B non nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AB = 0_n$. Montrer que A n'est pas inversible.

Exercice 14 (𝄞$\star$ Rai ©)**.**
1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Écrire $I_n - A^p$ comme un produit de deux matrices.
2. Montrer que si N est nilpotente d'ordre p alors $I_n - N$ est inversible et donner son inverse.
3. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en utilisant la question précédente, démontrer que P est inversible et calculer son inverse.
4. Soit A inversible et N nilpotente qui commutent, démontrer que $A+N$ est inversible et donner son inverse.

Exercice 15 ($\star$ Cal, Rai)**.** Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - 3A$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Équations et systèmes matriciels

Exercice 16 ($\star$ Cal ©)**.** Résoudre l'équation $X^2 - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 17 ($\star\star$ Cal, Rai ©)**.** On souhaite résoudre l'équation $X^2 = A$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$
1. Montrer que $X^2 = A$ implique $AX = XA$.
2. En déduire que la matrice X a au plus 5 coefficients non nuls.
3. En déduire les solutions de l'équation.

Divers

Exercice 18 ($\star\star$ Cal, Rec, Rai ©)**.** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par : $u_0 = 1$, $v_0 = 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n)$ et $v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
1. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$.
2. En déduire X_n en fonction de A, de n et de X_0.
3. On pose $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer les puissances successives de J.
4. En déduire les puissances successives de A.
5. En déduire l'expression de u_n et de v_n en fonction de n.

Exercice 19 ($\star\star$ Rai, Cal)**.** Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$. Trouver toutes les matrices qui commutent avec $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Exercice 20 (𝄞$\star\star$ Rai, Rec ©)**.** Soit D une matrice diagonale de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont la diagonale est $(d_1, d_2, \ldots, d_n) \in \mathbb{K}^n$.
1. Si tous les d_i sont deux à deux distincts, déterminer l'ensemble les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec D.
2. Si tous les d_i sont égaux, déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec D.

Exercice 21 (𝄞$\star\star\star$ Rai, Rec ©)**.** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
1. Si pour tout $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $AB = BA$, montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n$
2. Si pour tout $B \in GL_n(\mathbb{K})$, $AB = BA$, montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n$.