

Développements limités

Exercice 1 (★ Cal). Calculer les DLs demandés :

- | | | |
|---|---|---|
| a) $DL_5(0)$ de $x \mapsto x^2 e^x$ | ⊙ | o) $DL_2(0)$ de $x \mapsto \frac{\sin(x) - 1}{\cos(x) + 1}$ |
| b) $DL_5(0)$ de $x \mapsto \frac{\sin(x) - x}{x^3}$ | ⊙ | p) $DL_5(0)$ de $x \mapsto e^x \arctan(x)$ |
| c) $DL_5(0)$ de $x \mapsto \ln\left(\frac{1+x^2}{1-x}\right)$ | ⊙ | q) $DL_3(0)$ de $x \mapsto \operatorname{ch}(x)^{\operatorname{sh}(x)}$ |
| d) $DL_3(0)$ de $x \mapsto \sqrt{\operatorname{ch}(\sin(x))}$ | ⊙ | r) $DL_2(3)$ de $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ |
| e) $DL_6(0)$ de $x \mapsto (\cos(x))^3$ | ⊙ | s) $DL_3(0)$ de $x \mapsto (1 + \sin(x))^{\frac{1}{x}}$ |
| f) $DL_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ de \sin | ⊙ | t) $DL_3(0)$ de $x \mapsto \frac{x}{\cos(x)}$ |
| g) $DL_2(1)$ de $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$ | ⊙ | u) $DL_3(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1 + \sin(x)}$ |
| h) $DL_2(1)$ de $x \mapsto \ln(1 + \sqrt{x})$ | ⊙ | v) $DL_3(0)$ de $x \mapsto \frac{e^x}{\sqrt{1+x}}$ |
| i) $DL_4(0)$ de $x \mapsto e^{\sqrt{1+x^2}}$ | ⊙ | w) $DL_3(0)$ de $x \mapsto \ln(1 + \sin(x))$ |
| j) $DL_6(0)$ de $x \mapsto \sin(x)^4$ | ⊙ | x) $DL_3(0)$ de $x \mapsto (\sqrt{1+x})^x$ |
| k) $DL_3(0)$ de $x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$ | ⊙ | y) $DL_4(0)$ de $x \mapsto \frac{x^2}{\ln(1+x^2)}$ |
| l) $DL_3(2)$ de $x \mapsto \frac{1}{x}$ | ⊙ | z) $DL_3(0)$ de $x \mapsto \frac{\tan(x) - x}{1+x}$ |
| m) $DL_4(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1+x+x^2}$ | ⊙ | |
| n) $DL_4(0)$ de $x \mapsto e^{\sin(x)}$ | ⊙ | |

Exercice 2 (★★ Rai, Cal ⊙). Montrer que $f: x \mapsto xe^{x^2}$ admet une bijection réciproque définie sur \mathbb{R} et calculer $DL_5(0)$ de f^{-1} .

Que vaut $(f^{-1})^{(i)}(0)$ pour $0 \in \llbracket 0; 5 \rrbracket$.

Exercice 3 (★★ Cal). Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que le développement limité en 0 de $x \mapsto \cos(x) - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ ait le plus de premiers termes nuls.

Exercice 4 (♠★★ Cal ⊙). Montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{4^k} \binom{2k}{k} x^k + \mathcal{O}(x^n)$$

En déduire le développement limité de \arcsin à l'ordre n en 0.

Calcul de limites et d'équivalents

Exercice 5 (★ Cal). Déterminer si les fonctions ont des limites au point indiqué :

- | | |
|---|--|
| 1. $x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}$ en 0 | 3. $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}$ en 1 |
| 2. $x \mapsto \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$ en 0 | |

Exercice 6 (★ Cal). Donner un équivalent en 0 de

- | | |
|---|---|
| 1. $x \mapsto \ln(1+x) - x$ | 3. $x \mapsto \ln(\sin(x))$ |
| 2. $x \mapsto \frac{\tan(x) \ln(1+x^2)}{x^4}$ | 4. $x \mapsto \operatorname{sh}(\sin(x)) - x$ ⊙ |

Exercice 7 (★ Cal ⊙). Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- Donner la limite de $x \mapsto x^a$ en $+\infty$.
- Donner un équivalent simple de $f: x \mapsto \frac{x^a}{x^b + 1}$ en $+\infty$.

Exercice 8 (★ Cal ⊙). Donner un développement asymptotique de \arctan en $+\infty$ à la précision $\mathcal{O}(1/x^3)$.

Exercice 9 (★ Cal, CCINP PSI ⊙). Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right)^{x \ln x}$.

Exercice 10 (★★ Cal). Étudier la limite de $x \mapsto (\sin x)^{1/\cos x}$ en $\frac{\pi^-}{2}$.

Application à l'étude de fonctions

Exercice 11 (★ Rai, Rep ⊙). Montrer que $x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$ peut être prolongée en une fonction dérivable sur \mathbb{R} . On donnera la valeur en 0 de la fonction prolongée ainsi que sa dérivée en 0.

Exercice 12 (★ Rai, Rep ⊙). Considérons $f: x \mapsto \arctan(e^x)$.

- Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R} et déterminer sa dérivée.
- Déterminer un DL à l'ordre 3 en 0 de f .
- Quelle est l'allure de la courbe en ce point ?

Exercice 13 (★ Cal, Rai YT). On pose $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$. Donner l'équation de la tangente de f au point d'abscisse 0 et étudier la position relative de la courbe et de la tangente au voisinage de ce point.

Exercice 14 (★ Rai, Cal ©). Montrer que les fonctions suivantes ont des asymptotes en $+\infty$ et étudier leur position relative par rapport à leur asymptote :

$$x \mapsto (x+1)e^{\frac{1}{x}} \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{x^2}{x+1} \arctan(x)$$

Exercice 15 (★★ Cal, Rai). Soit $f: x \mapsto \frac{x^3}{1-x^{10}}$. Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Suites

Exercice 16 (♣★ Cal). Soit $x \in \mathbb{R}$ Quelles sont les limites des suites définies par :

1. $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$
2. $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$
3. $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$
4. $3 \times 2^{1/n} - 2 \times 3^{1/n}$
5. $\cos(1/n)^{n^2}$

Exercice 17 (★ Cal, Rai). Donner un équivalent des suites définies par :

1. $\ln(n+1)$
2. $\sin(1/n) - 1/n$ ©
3. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ©
4. $e^{e^{-n}} - e$ ©
5. $(n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}}$
6. $\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$
7. $\left(1 + \cos\frac{1}{n}\right)^n$
8. $(n+1)^{5/2} - n^{5/2}$

Exercice 18 (★★ Rai, Rec YT). 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'équation $x + e^x = n$ admet une unique solution $x_n \in \mathbb{R}$.

2. Déterminer la limite de $(x_n)_n$
3. Déterminer un équivalent de x_n
4. Former un développement asymptotique de x_n

Exercice 19 (★ Rai). Soit $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n} \leq u_n \leq \sqrt{n} + 1$. Donner un équivalent de $(u_n)_n$.

Exercice 20 (♣★★ Rai, Rec ©). Soit $u_0 \in]0; \pi/2[$, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0; \pi/2[$.
2. Montrer que $(u_n)_n$ décroît et converge et déterminer sa limite.
3. En effectuant un développement limité, déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$, tel que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$.

4. En appliquant le théorème de Cesàro (exercice 29 du TD7), déterminer un équivalent de u_n^α puis un équivalent de u_n .

Divers

Exercice 21 (★★ Rec, Rai). On pose $f(x) = e^{-1/x^2} \sin(e^{1/x^2})$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que $f(x) = o(x^n)$
2. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} .
3. Est-ce que f est de classe \mathcal{C}^1 ?
4. Une fonction qui possède un $DL_2(0)$ est-elle forcément de classe \mathcal{C}^2 ?
5. On peut primitiver un DL, peut-on dériver un DL d'une fonction dérivable ?
6. Soit f et g définies sur I telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f et g ont le même $DL_n(0)$, est-ce $f = g$ (sur un voisinage de 0) ?

Exercice 22 (★★★ Rec, Rai). Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. On suppose que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, si $|z| \geq R$, alors $|P(z)| \geq |P(0)|$.
2. On note $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$. Montrer que $z \mapsto |P(z)|$ sur D est continue (au sens défini lors de l'exercice 26 du TD 10)
3. En utilisant le résultat de l'exercice 26 du TD 10, montrer que $z \mapsto |P(z)|$ admet un minimum sur \mathbb{C} . Notons $z_0 \in \mathbb{C}$ un point où la fonction admet un minimum.
4. En utilisant la formule de Taylor (pour les polynômes) et à l'aide d'un développement limité de P en z_0 , trouver une contradiction. En déduire le théorème de d'Alembert-Gauss.