Développements limités

Exercice 1 ($\star$ Cal)**.** Calculer les DLs demandés :

a) $DL_5(0)$ de $x \mapsto x^2 \mathrm{e}^x$ ©

b) $DL_5(0)$ de $x \mapsto \dfrac{\sin(x) - x}{x^3}$ ©

c) $DL_5(0)$ de $x \mapsto \ln\left(\dfrac{1+x^2}{1-x}\right)$

d) $DL_3(0)$ de $x \mapsto \sqrt{\mathrm{ch}(\sin(x))}$ ©

e) $DL_6(0)$ de $x \mapsto (\cos(x))^3$ ©

f) $DL_3(\frac{\pi}{4})$ de sin ©

g) $DL_2(1)$ de $x \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ ©

h) $DL_2(1)$ de $x \mapsto \ln(1+\sqrt{x})$

i) $DL_4(0)$ de $x \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{1+x^2}}$

j) $DL_6(0)$ de $x \mapsto \sin(x)^4$ ©

k) $DL_3(0)$ de $x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$ ©

l) $DL_3(2)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

m) $DL_4(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x+x^2}$ ©

n) $DL_4(0)$ de $x \mapsto \mathrm{e}^{\sin(x)}$

o) $DL_2(0)$ de $x \mapsto \dfrac{\sin(x)-1}{\cos(x)+1}$

p) $DL_5(0)$ de $x \mapsto \mathrm{e}^x \arctan(x)$

q) $DL_3(0)$ de $x \mapsto \mathrm{ch}(x)^{\mathrm{sh}(x)}$ ©

r) $DL_2(3)$ de $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$

s) $DL_3(0)$ de $x \mapsto (1+\sin(x))^{\frac{1}{x}}$

t) $DL_3(0)$ de $x \mapsto \dfrac{x}{\cos(x)}$ ©

u) $DL_3(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+\sin(x)}$ ©

v) $DL_3(0)$ de $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+x}}$

w) $DL_3(0)$ de $x \mapsto \ln(1+\sin(x))$

x) $DL_3(0)$ de $x \mapsto (\sqrt{1+x})^x$

y) $DL_4(0)$ de $x \mapsto \dfrac{x^2}{\ln(1+x^2)}$

z) $DL_3(0)$ de $x \mapsto \dfrac{\tan(x)-x}{1+x}$

Exercice 2 ($\star\star$ Rai, Cal ©)**.** Montrer que $f\colon x \mapsto x\mathrm{e}^{x^2}$ admet une bijection réciproque définie sur $\mathbb{R}$ et calculer $DL_5(0)$ de f^{-1}.
Que vaut $(f^{-1})^{(i)}(0)$ pour $0 \in [\![0\,;5]\!]$.

Exercice 3 ($\star\star$ Cal)**.** Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que le développement limité en 0 de $x \mapsto \cos(x) - \dfrac{1+ax^2}{1+bx^2}$ ait le plus de premiers termes nuls.

Exercice 4 (𝄞$\star\star$ Cal ©)**.** Montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{4^k}\binom{2k}{k} x^k + \mathcal{O}(x^n)$$

En déduire le développement limité de arcsin à l'ordre $2n+1$ en 0.

Calcul de limites et d'équivalents

Exercice 5 ($\star$ Cal)**.** Déterminer si les fonctions ont des limites au point indiqué :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{x^2}$ en 0
2. $x \mapsto \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - \mathrm{e}}{x}$ en 0
3. $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$ en 1

Exercice 6 ($\star$ Cal)**.** Donner un équivalent en 0 de

1. $x \mapsto \ln(1+x) - x$
2. $x \mapsto \dfrac{\tan(x)\ln(1+x^2)}{x^4}$
3. $x \mapsto \ln(\sin(x))$
4. $x \mapsto \mathrm{sh}(\sin(x)) - x$ ©

Exercice 7 ($\star$ Cal ©)**.** Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Donner la limite de $x \mapsto x^a$ en $+\infty$.
2. Donner un équivalent simple de $f\colon x \mapsto \dfrac{x^a}{x^b+1}$ en $+\infty$.

Exercice 8 ($\star$ Cal ©)**.** Donner un développement asymptotique de arctan en $+\infty$ à la précision $\mathcal{O}\left(1/x^3\right)$.

Exercice 9 ($\star$ Cal, CCINP PSI ©)**.** Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$.

Exercice 10 ($\star\star$ Cal)**.** Étudier la limite de $x \mapsto (\sin x)^{1/\cos x}$ en $\dfrac{\pi}{2}^-$.

Application à l'étude de fonctions

Exercice 11 ($\star$ Rai, Rep ©)**.** Montrer que $x \mapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ peut être prolongée en une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On donnera la valeur en 0 de la fonction prolongée ainsi que sa dérivée en 0.

Exercice 12 ($\star$ Rai, Rep ©)**.** Considérons $f\colon x \mapsto \arctan(\mathrm{e}^x)$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.
2. Déterminer un DL à l'ordre 3 en 0 de f .
3. Quelle est l'allure de la courbe en ce point ?

Exercice 13 (⋆ Cal, Rai YT)**.** On pose $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$. Donner l'équation de la tangente de f au point d'abscisse 0 et étudier la position relative de la courbe et de la tangente au voisinage de ce point.

Exercice 14 (⋆ Rai, Cal ©)**.** Montrer que les fonctions suivantes ont des asymptotes en $+\infty$ et étudier leur position relative par rapport à leur asymptote : $x \mapsto (x+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ et $x \mapsto \dfrac{x^2}{x+1}\arctan(x)$

Exercice 15 (⋆⋆ Cal, Rai)**.** Soit $f\colon x \mapsto \dfrac{x^3}{1-x^{10}}$. Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Suites

Exercice 16 (𝄞𝄞⋆ Cal)**.** Soit $x \in \mathbb{R}$ Quelles sont les limites des suites définies par :

1. $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$
2. $\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$
3. $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$
4. $3\times 2^{1/n} - 2\times 3^{1/n}$
5. $\cos(1/n)^{n^2}$

Exercice 17 (⋆ Cal, Rai)**.** Donner un équivalent des suites définies par :

1. $\ln(n+1)$
2. $\sin(1/n) - 1/n$ ©
3. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ©
4. $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-n}}} - \mathrm{e}$ ©
5. $(n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}}$
6. $\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$
7. $\left(1+\cos\dfrac{1}{n}\right)^n$
8. $(n+1)^{5/2} - n^{5/2}$

Exercice 18 (⋆⋆ Rai, Rec YT)**.**

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'équation $x + \mathrm{e}^x = n$ admet une unique solution $x_n \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer la limite de $(x_n)_n$
3. Déterminer un équivalent de x_n
4. Former un développement asymptotique de x_n

Exercice 19 (⋆ Rai)**.** Soit $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{n}{u_n}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{n}+1$. Donner un équivalent de $(u_n)_n$.

Exercice 20 (𝄞⋆⋆ Rai, Rec ©)**.** Soit $u_0 \in \left]0\,;\pi/2\right[$, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left]0\,;\pi/2\right[$.
2. Montrer que $(u_n)_n$ décroît et converge et déterminer sa limite.
3. En effectuant un développement limité, déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$, tel que ${u_{n+1}}^\alpha - {u_n}^\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.
4. En appliquant le théorème de Cesàro (exercice 29 du TD7), déterminer un équivalent de ${u_n}^\alpha$ puis un équivalent de u_n.

Divers

Exercice 21 (⋆⋆ Rec, Rai)**.** On pose $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}\sin(\mathrm{e}^{1/x^2})$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que $f(x) \underset{0}{=} \mathcal{O}(x^n)$
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Est-ce que f est de classe $\mathscr{C}^1$?
4. Une fonction qui possède un $DL_2(0)$ est-elle forcément de classe $\mathscr{C}^2$?
5. On peut primitiver un DL, peut-on dériver un DL d'une fonction dérivable ?
6. Soit f et g définies sur I telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f et g ont le même $DL_n(0)$, est-ce $f = g$ (sur un voisinage de 0) ?

Exercice 22 (⋆⋆⋆⋆ Rec, Rai)**.** Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. On suppose que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, si $|z| \geqslant R$, alors $|P(z)| \geqslant |P(0)|$.
2. On note $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant R\}$. Montrer que $z \mapsto |P(z)|$ sur D est continue (au sens défini lors de l'exercice 26 du TD 10)
3. En utilisant le résultat de l'exercice 26 du TD 10, montrer que $z \mapsto |P(z)|$ admet un minimum sur $\mathbb{C}$. Notons $z_0 \in C$ un point où la fonction admet un minimum.
4. En utilisant la formule de Taylor (pour les polynômes) et à l'aide d'un développement limité de P en z_0, trouver une contradiction. En déduire le théorème de d'Alembert-Gauss.