

Familles libres, bases, génératrices et dimensions

Exercice 1 (★ Cal, Rai). Pour chacun des sous-espaces vectoriels E considérés ci-dessous, déterminer une base de E et donner sa dimension.

- $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2y + z - t = 0\}$
- $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + z = 0 \text{ et } x + 3y + 2z = 0\}$
- $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3z = 2x = y\}$
- $E = \text{vect}(\text{ch}, \text{sh}, \text{exp}, \text{exp} \circ (-\text{Id}_{\mathbb{R}}))$
- (YT) $E = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid M^T = M\}$
- L'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- L'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
- $E = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid m_{11} + m_{22} = 0\}$.
- (♯★★ YT) $T_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (ensembles des matrices triangulaires supérieures, antisymétriques ou symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)
- \mathbb{C}^n vu comme un \mathbb{R} -ev.

Exercice 2 (★ Rai ©). On se place dans $E = \mathbb{R}^3$

- Donner un exemple d'une famille génératrice de E non libre.
- Donner un exemple d'une famille libre de E non génératrice.
- Donner un exemple d'une famille non libre de E de trois vecteurs non colinéaires deux à deux.

Exercice 3 (★★ Rai, Rec ©). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \sum_{k=1}^n M_{k,k} = 0\}$. Démontrer que H est un sous-espace vectoriel et en trouver une base puis la dimension.

Exercice 4 (★ Cal). Soit $\mathcal{B} = ((0, 1, x), (0, x, 1), (x, 5x, x))$. Déterminer les $x \in \mathbb{R}$ tels que \mathcal{B} soit une base de \mathbb{R}^3 .

Exercice 5 (★ Cal ©). Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$ et a et b deux réels distincts. On désigne par F le SEV de E constitué des polynômes dont a et b sont racines. Déterminer la dimension de F .

Exercice 6 (★ Cal ©). On considère les familles de $E = \mathbb{R}^4$ suivantes $\mathcal{F}_1 = ((1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4), (1, 0, 0, 0))$, et $\mathcal{F}_2 = ((1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4), (1, 4, 7, 10))$ dire si \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 peuvent être complétées en des bases de E et si oui, complétez-les.

Exercice 7 (★★★ Rec, Rai). Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe une base de F dont tous les éléments ont des degrés différents. Montrer qu'il existe une base de F dont tous les éléments sont de même degré.

Exercice 8 (★★ Rec ©). Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que la famille $(I_n, M, M^2, \dots, M^d)$ soit forcément liée.

Exercice 9 (★★★ Rai, Rec). Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n .

- Justifier que E peut aussi être considéré comme un \mathbb{R} -EV.
- Donner une relation entre $\dim_{\mathbb{R}}(E)$ et $\dim_{\mathbb{C}}(E)$. À partir d'une \mathbb{C} -base de E , donner une \mathbb{R} -base de E .
- La réciproque est-elle vraie : tout \mathbb{R} -espace vectoriel peut-il être vu comme un \mathbb{C} -espace vectoriel ? Sinon, quels sont ceux qui le peuvent ?

Exercice 10 (★★ Rai, Rec ©). Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, posons $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$. Montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ en en donnant une base. En déduire sa dimension.

Exercice 11 (★ Rai ©). Soient $a \in \mathbb{R}$ et $E_a = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(a) = 0\}$.

- Vérifier que E_a est un SEV de $\mathbb{R}[X]$.
- Si $a \neq b$, est-ce que E_a et E_b sont en somme directe ?
- ★★ Toujours si $a \neq b$, montrer que $E = E_a + E_b$
- ★★ E_a est-il un EV de dimension finie ?

Dimension, somme, somme directe, supplémentaires

Exercice 12 (★ Cal). Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + 2z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t + z = 0 \text{ et } x + y - t = 0\}$. Déterminer $\dim(F)$, $\dim(G)$, $\dim(F \cap G)$. Démontrer que $F + G = \mathbb{R}^4$, la somme est-elle directe ?

Exercice 13 (★ Rai ©). Soient F et G deux SEV de $\mathbb{R}_4[X]$ tous les deux de dimension 3. Montrer qu'il existe $P \in F \cap G$ avec $P \neq 0$.

Exercice 14 (★ Cal). Soient $F = \text{vect}((1, -1, 0))$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$, démontrer que F et G sont supplémentaires et donner une base adaptée à la décomposition de $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Exercice 15 (\star Cal \odot). Déterminer un supplémentaire de $\text{vect}((1, 1, 1, 1), (2, 1, -1, 0))$ dans \mathbb{R}^4 .

Exercice 16 (\star Rai \odot). Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, on pose $F = \text{vect}(X - 1)$ et $G = \{P \in E \mid P(2) = 0\}$.

1. Justifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .
2. Déterminer leur dimension.
3. Montrer que F et G sont supplémentaires de E .

Exercice 17 (\star Rai \odot). Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $E = \mathbb{R}^n$, posons :

$$A = \{(\lambda, \dots, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad B = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$$

1. Déterminer $\dim(A)$.
2. Montrer que B est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .
3. Montrer que A et B sont supplémentaires.
4. Déterminer la dimension de B puis une base de B .

Exercice 18 (\star Cou). Soient E un \mathbb{K} -EV de dimension finie, F et G deux SEVs de E tels que $\dim(F) + \dim(G) > \dim(E)$. Montrer que F et G ont au moins un vecteur en commun non nul.

Exercice 19. [$\star\star$ Rai \odot] Soit E un \mathbb{K} -EV de dimension finie n . Soient H et H' deux hyperplans de E distincts.

1. Montrer que $\dim(H + H') = n$.
2. En déduire $\dim(H \cap H')$.
3. Quelle est la dimension des supplémentaires de H et de H' ?
4. Montrer qu'il existe $(u, v) \in H \times H'$ tel que $u \notin H'$ et $v \notin H$.
5. Montrer que $w = u + v \notin H \cup H'$.
6. Proposer un supplémentaire commun à H et à H' .

Exercice 20 ($\star\star\star$ Rec). Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et F et F' deux sous-espaces vectoriels tels que $\dim(F) = \dim(F')$ montrer que F et F' admette un supplémentaire commun.

Exercice 21 ($\clubsuit\star\star$ Rai, Rec \odot). Soit $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ une famille de $n + 1$ réels deux à deux distincts.

1. On suppose qu'il existe (L_0, L_1, \dots, L_n) une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$. Montrer qu'alors (L_0, L_1, \dots, L_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer qu'une telle famille existe et est unique.
3. Soit $(b_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$, montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $P(a_i) = b_i$.

Exercice 22 ($\star\star\star$ Rec, Rai). Soit (a_0, a_1, \dots, a_n) une famille de réels deux à deux distincts. Posons $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $F = \{f \in E, \forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, f(a_i) = 0\}$. Trouver un supplémentaire de F (utiliser l'exercice 21).

Rang

Exercice 23 (\star Cal). Calculer le rang des familles suivantes :

- $\mathcal{F} = ((1, 1, 1), (0, 1, 2), (-1, 0, 1), (0, 1, 2))$
- $\mathcal{F} = (I_n, J, J^2, J^3)$ avec $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice contenant que des 1.
- $\mathcal{F} = (\cos, \sin, x \mapsto \sin(2x))$.
- $\mathcal{F} = ((1, j, j^2), (j, j^2, 1), (j^2, 1, j))$ dans \mathbb{C}^3 vu comme un \mathbb{C} -EV. puis dans \mathbb{C}^3 vu comme un \mathbb{R} -EV où $j = e^{i \frac{2\pi}{3}}$.

Sujet de concours

Exercice 24 (\star Rai). Posons $E = \mathbb{R}_4[X]$, $A = X^4 + 4X + 3$. et

$$F = \{\alpha X^4 + (\alpha + \beta)X + \beta \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\} \quad \text{et} \quad G = \{P \in E \mid P'(1) = 0\}$$

1. Montrer que si $Q \in F$, alors $X + 1 \mid Q$.
2. Décomposer A en produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ puis de $\mathbb{C}[X]$.
3. Montrer que F est un SEV de $\mathbb{R}_4[X]$. Déterminer une base de F et $\dim(F)$.
4. Montrer que G est un SEV de $\mathbb{R}_4[X]$ et que $\dim(G) \leq 4$. Montrer que la famille $(1, (X - 1)^2, (X - 1)^3, (X - 1)^4)$ est une famille libre de polynômes de G . Puis que c'en est une base. Que vaut $\dim(G)$?
5. Déterminer une base de $F \cap G$ et déterminer $\dim(F \cap G)$.
6. En déduire que $\mathbb{R}_4[X] = F + G$.