Familles libres, bases, génératrices et dimensions

Exercice 1 ($\star$ Cal, Rai)**.** Pour chacun des sous-espaces vectoriels E considérés ci-dessous, déterminer une base de E et donner sa dimension.

1. $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2y + z - t = 0\}$
2. $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + z = 0 \text{ et } x + 3y + 2z = 0\}$
3. $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3z = 2x = y\}$
4. $E = \operatorname{vect}(\operatorname{ch}, \operatorname{sh}, \exp, \exp \circ (-\operatorname{Id}_{\mathbb{R}}))$
5. $E = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid M^T = M\}$
6. L'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
7. L'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
8. $E = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid m_{11} + m_{22} = 0\}$.
9. (𝄞$\star\star$ YT) $T_n(\mathbb{R})$, $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ (ensembles des matrices triangulaires supérieures, antisymétriques ou symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$)
10. $\mathbb{C}^n$ vu comme un $\mathbb{R}$-ev.

Exercice 2 ($\star$ Rai ©)**.** On se place dans $E = \mathbb{R}^3$

1. Donner un exemple d'une famille génératrice de E non libre.
2. Donner un exemple d'une famille libre de E non génératrice.
3. Donner un exemple d'une famille non libre de E de trois vecteurs non colinéaires deux à deux.

Exercice 3 ($\star\star$ Rai, Rec ©)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $H = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid \sum_{k=1}^{n} M_{k,k} = 0\}$. Démontrer que H est un sous-espace vectoriel et en trouver une base puis la dimension.

Exercice 4 ($\star$ Cal)**.** Soit $\mathscr{B} = ((0,1,x),(0,x,1),(x,5x,x))$. Déterminer les $x \in \mathbb{R}$ tels que $\mathscr{B}$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5 ($\star$ Cal ©)**.** Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$ et a et b deux réels distincts. On désigne par F le SEV de E constitué des polynômes dont a et b sont racines. Déterminer la dimension de F.

Exercice 6 ($\star$ Cal ©)**.** On considère les familles de $E = \mathbb{R}^4$ suivantes $\mathscr{F}_1 = ((1,1,1,1),(1,2,3,4),(1,0,0,0))$, et $\mathscr{F}_2 = ((1,1,1,1),(1,2,3,4),(1,4,7,10))$ dire si $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ peuvent être complétées en des bases de E et si oui, complétez-les.

Exercice 7 ($\star\star\star$ Rec, Rai)**.** Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe une base de F dont tous les éléments ont des degrés différents. Montrer qu'il existe une base de F dont tous les éléments sont de même degré.

Exercice 8 ($\star\star$ Rec ©)**.** Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que la famille $(I_n, M, M^2, \dots, M^d)$ soit forcément liée.

Exercice 9 ($\star\star$ Mod, Rec)**.** On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles. Notons F l'ensemble des suites réelles périodique de période $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et trouver une base de F. En déduire que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas de dimension finie.

Exercice 10 ($\star\star$ Rec ©)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et non vide Montrer que $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension infinie. En déduire que c'est aussi le cas de $\mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$ et de $\mathscr{F}(I,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^I$.

Exercice 11 ($\star\star\star$ Rai, Rec)**.** Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.

1. Justifier que E peut aussi être considéré comme un $\mathbb{R}$-EV.
2. Donner une relation entre $\dim_{\mathbb{R}}(E)$ et $\dim_{\mathbb{C}}(E)$. À partir d'une $\mathbb{C}$-base de E, donner une $\mathbb{R}$-base de E.
3. La réciproque est-elle vraie : tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel peut-il être vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ? Sinon, quels sont ceux qui le peuvent ?

Exercice 12 ($\star\star$ Rai, Rec ©)**.** Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, posons $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$. Montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ en en donnant une base. En déduire sa dimension.

Exercice 13 ($\star$ Rai ©)**.** Soient $a \in \mathbb{R}$ et $E_a = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(a) = 0\}$.

1. Vérifier que E_a est un SEV de $\mathbb{R}[X]$.
2. Si $a \neq b$, est-ce que E_a et E_b sont en somme directe ?
3. $\star\star$ Toujours si $a \neq b$, montrer que $E = E_a + E_b$
4. $\star\star$ E_a est-il un EV de dimension finie ?

Dimension, somme, somme directe, supplémentaires

Exercice 14 ($\star$ Cal)**.** Soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + 2z = 0\}$ et $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid t + z = 0 \text{ et } x + y - t = 0\}$. Déterminer $\dim(F)$,

$\dim(G)$, $\dim(F\cap G)$. Démontrer que $F+G=\mathbb{R}^4$, la somme est-elle directe ?

Exercice 15 ($\star$ Rai ©)**.** Soient F et G deux SEV de $\mathbb{R}_4[X]$ tous les deux de dimension 3. Montrer qu'il existe $P\in F\cap G$ avec $P\neq 0$.

Exercice 16 ($\star$ Cal)**.** Soient $F=\mathrm{vect}((1,-1,0))$ et $G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x-y+z=0\}$, démontrer que F et G sont supplémentaires et donner une base adaptée à la décomposition de $\mathbb{R}^3=F\oplus G$.

Exercice 17 ($\star$ Cal ©)**.** Déterminer un supplémentaire de $\mathrm{vect}((1,1,1,1),(2,1,-1,0))$ dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 18 ($\star$ Rai ©)**.** Soit $E=\mathbb{R}_3[X]$, on pose $F=\mathrm{vect}(X-1)$ et $G=\{P\in E\,|\,P(2)=0\}$.

1. Justifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Déterminer leur dimension.
3. Montrer que F et G sont supplémentaires de E.

Exercice 19 ($\star$ Rai ©)**.** Soient $n\in\mathbb{N}^*$, et $E=\mathbb{R}^n$, posons :

$$A=\{(\lambda,\cdots,\lambda)|\lambda\in\mathbb{R}\}\quad\text{et}\quad B=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n|x_1+\cdots+x_n=0\}$$

1. Déterminer $\dim(A)$.
2. Montrer que B est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
3. Montrer que A et B sont supplémentaires.
4. Déterminer la dimension de B puis une base de B.

Exercice 20 ($\star$ Cou)**.** Soient E un $\mathbb{K}$-EV de dimension finie, F et G deux SEVs de E tels que $\dim(F)+\dim(G)>\dim(E)$. Montrer que F et G ont au moins un vecteur en commun non nul.

Exercice 21 ($\star\star$ Rai ©)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-EV de dimension finie n. Soient H et H' deux hyperplans de E distincts.

1. Montrer que $\dim(H+H')=n$.
2. En déduire $\dim(H\cap H')$.
3. Quelle est la dimension des supplémentaires de H et de H' ?
4. Montrer qu'il existe $(u,v)\in H\times H'$ tel que $u\notin H'$ et $v\notin H$.
5. Montrer que $w=u+v\notin H\cup H'$.
6. Proposer un supplémentaire commun à H et à H'.

Exercice 22 (𝄞$\star\star$ Rai, Rec ©)**.** Soit $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une famille de $n+1$ réels deux à deux distincts.

1. On suppose qu'il existe $(L_0,L_1,\dots,L_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $L_i(a_j)=\delta_{i,j}$. Montrer qu'alors $(L_0,L_1,\dots,L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer qu'une telle famille existe et est unique.
3. Soit $(b_i)_{0\leqslant i\leqslant n}\in\mathbb{R}^{n+1}$, montrer qu'il existe un unique polynôme $P\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $i\in[\![0\,;n]\!]$, $P(a_i)=b_i$.

Exercice 23 ($\star\star\star$ Rec, Rai)**.** Soit $(a_0,a_1,\dots,a_n)$ une famille de réels deux à deux distincts. Posons $E=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $F=\{f\in E,\ \forall i\in[\![0\,;n]\!],\ f(a_i)=0\}$. Trouver un supplémentaire de F (utiliser l'exercice 22).

Rang

Exercice 24 ($\star$ Cal)**.** Calculer le rang des familles suivantes :

- $\mathscr{F}=((1,1,1),(0,1,2),(-1,0,1),(0,1,2))$
- $\mathscr{F}=(I_n,J,J^2,J^3)$ avec $J\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice contenant que des 1.
- $\mathscr{F}=(\cos,\sin,x\mapsto\sin(2x))$.
- $\mathscr{F}=((1,j,j^2),(j,j^2,1),(j^2,1,j))$ dans $\mathbb{C}^3$ vu comme un $\mathbb{C}$-EV. puis dans $\mathbb{C}^3$ vu comme un $\mathbb{R}$-EV où $j=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

Sujet de concours

Exercice 25 ($\star$ Rai)**.** Posons $E=\mathbb{R}_4[X]$, $A=X^4+4X+3$. et

$$F=\{\alpha X^4+(\alpha+\beta)X+\beta\,|\,(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\}\quad\text{et}\quad G=\{P\in E\,|\,P'(1)=0\}$$

1. Montrer que si $Q\in F$, alors $X+1|Q$.
2. Décomposer A en produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ puis de $\mathbb{C}[X]$.
3. Montrer que F est un SEV de $\mathbb{R}_4[X]$. Déterminer une base de F et $\dim(F)$.
4. Montrer que G est un SEV de $\mathbb{R}_4[X]$ et que $\dim(G)\leqslant 4$. Montrer que la famille $(1,(X-1)^2,(X-1)^3,(X-1)^4)$ est une famille libre de polynômes de G. Puis que c'en est une base. Que vaut $\dim(G)$?
5. Déterminer une base de $F\cap G$ et déterminer $\dim(F\cap G)$.
6. En déduire que $\mathbb{R}_4[X]=F+G$.