Chapitre 14

Analyse asymptotique

Objectifs :

- Définir les $\sim$, o et $\mathcal{O}$ (déjà vus pour les suites) pour les fonctions.
- Définir les développements limités et établir les développements usuels à connaître par cœur.
- Savoir les utiliser pour le calcul de limites et les études de fonctions.

Un développement limité d'une fonction f en un point a à l'ordre n est, dit grossièrement, une fonction polynomiale (si elle existe) de degré au plus n qui approxime le mieux f au voisinage de a.

Table des matières

Dans tout ce chapitre, $n \in \mathbb{N}$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ ou une extrémité de I, f et g, h et k définies sur $I\backslash\{a\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si on divise par g, on sous-entend que g ne s'annule pas sur un voisinage de a (sauf éventuellement en a).

1 Fonctions négligeables : o

Définition d'une fonction négligeable devant une autre

On dit que f est **négligeable** devant g au voisinage de a si $f(x)/g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

On note $f \underset{a}{=} o(g)$ ou $f(x) \underset{a}{=} o(g(x))$, lire «*$f$ est un petit o de g au voisinage de a*».

Exemple 1. $x^2 \underset{+\infty}{=} o(x^4)$ $\qquad$ $x^4 \underset{0}{=} o(x^2)$

Remarque 1. Si $a \in \mathbb{R}$, $\quad f \underset{a}{=} o(g) \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \cap [\,a-\delta\,;a+\delta\,]\backslash\{a\} \quad |f(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|$.

Exemple 2. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ si et seulement si $f(x) \underset{a}{=} \ell + o(1)$.

Attention $o(g)$ est une notation

Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $h \underset{a}{=} o(g)$ n'implique pas que $f = h$. De plus, $f \underset{a}{=} h + o(g)$ veut dire $f = h + k$ où $k \underset{a}{=} o(g)$.

Proposition n° 1

1. Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et si $f \underset{a}{=} o(\lambda g)$ alors $f \underset{a}{=} o(g)$. $\qquad$ Bref, $o(\lambda g) = o(g)$
2. Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et si $h \underset{a}{=} o(g)$ alors $\lambda f + h \underset{a}{=} o(g)$ (pour $\lambda \in \mathbb{R}$) $\qquad$ Bref, $\lambda o(g) + o(g) = o(g)$
3. Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et si $g \underset{a}{=} o(h)$ alors $f \underset{a}{=} o(h)$. $\qquad$ Bref, $o(o(h)) \underset{a}{=} o(h)$
4. Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et si $h \underset{a}{=} o(k)$ alors $fh \underset{a}{=} o(gk)$. $\qquad$ Bref, $o(g)o(k) = o(gk)$
5. $f = o(h)$ si et seulement si $fg = o(hg)$. $\qquad$ Bref, $g o(h) = o(gh)$
6. $f = o(g + o(g))$ si et seulement si $f = o(g)$. $\qquad$ Bref, $o(g + o(g)) = o(g)$

Remarque 2. Les croissances comparées s'interprètent avec les o : soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, alors :

1. Si $\beta > 0$, $\qquad \ln^\alpha(x) \underset{+\infty}{=} o(x^\beta) \qquad x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(\mathrm{e}^{\beta x})$
2. Si $\alpha < \beta$, $\qquad x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(x^\beta), \qquad x^\beta \underset{0}{=} o(x^\alpha), \qquad \ln(x)^\alpha \underset{+\infty}{=} o(\ln(x)^\beta) \qquad$ et $\qquad \mathrm{e}^{\alpha x} \underset{+\infty}{=} o(\mathrm{e}^{\beta x})$

Exemple 3. Si $f(x) \underset{0}{=} 51x^3 + o(x^2) + o(x^3) + 2 + x + o(x^2 + x^4)$, simplifier cette écriture.

2 Développements limités en un point $a \in \mathbb{R}$

Dans cette partie, a est un réel appartenant à I.

2.1 Définitions et première propriétés

Définition d'un développement limité

On dit que f a un **développement limité** à l'ordre n en a s'il existe $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^n) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

La fonction polynomiale $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$ est la **partie régulière** du développement limité.

On note $DL_n(a)$ un développement limité à l'ordre n en a.

Exemple 4. Soit $f(x) = 1 + 5x + 3x\sqrt{x}$.

Exemples importants à connaître sans hésitation

- $\dfrac{1}{1-x} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + \mathcal{O}(x^n) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \mathcal{O}(x^n)$ $\quad DL_n(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$
- $\dfrac{1}{1+x} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \mathcal{O}(x^n) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \mathcal{O}(x^n)$ $\quad DL_n(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$
- $\dfrac{1}{1+x^2} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + \mathcal{O}(x^{2n}) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \mathcal{O}(x^{2n})$ $\quad DL_{2n}(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$

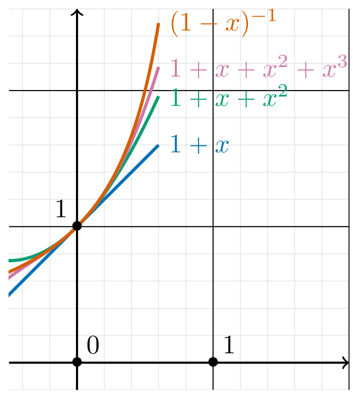


FIGURE 1 – Plusieurs polynômes approximant $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ en 0.

Exemple 5. Si $f(x) \underset{a}{=} 3+5(x-a)+8(x-a)^2-13(x-a)^3+\mathcal{O}((x-a)^3)$, alors $f(x) \underset{a}{=} 3+5(x-a)+8(x-a)^2+\mathcal{O}((x-a)^2)$.

Remarque 3. Si la fonction f admet un $DL_n(a)$ et si $m < n$ alors elle admet un $DL_m(a)$. Il suffit de tronquer le développement limité $DL_n(a)$ à l'ordre souhaité.

Proposition n° 2 : au plus unicité du développement limité

Si $f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + \mathcal{O}((x-a)^n) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k (x-a)^k + \mathcal{O}((x-a)^n)$, alors pour tout $k \in [\![0\,; n]\!]$, $a_k = b_k$.

Remarque 4. Si f est paire (resp. impaire) et a un $DL_n(0)$, alors les coefficients d'indices impairs (resp. pairs) sont nuls.

Proposition n° 3 : condition nécessaire et suffisante pour avoir un $DL_0(a)$ ou un $DL_1(a)$

1. f admet un $DL_0(a)$ ssi f est continue en a. Alors $\quad f(x) \underset{a}{=} f(a) + \mathcal{O}(1)$.
2. f admet un $DL_1(a)$ ssi f est dérivable en a. Alors $\quad f(x) \underset{a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \mathcal{O}(x-a)$.

Proposition n° 4 : translation d'un développement limité

$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + \mathcal{O}((x-a)^n)$ ($DL_n(a)$ de f) ssi $f(a+h) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + \mathcal{O}(h^n)$ ($DL_n(0)$ de $h \mapsto f(a+h)$)

Exemple 6. $DL_3(1)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{2-x}$

Remarque 5. Les $DL_n(0)$ seront les seuls à apprendre. Car, grâce à eux, on pourra trouver des $DL_n(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Péril imminent au $\mathcal{o}$

Dans un DL, n'oubliez jamais le $\mathcal{o}$, par exemple, « $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2$ » est horriblement faux !

2.2 $DL_n(a)$ obtenus par primitive

Théorème n° 1 : primitive d'un DL

Si $a \in I$ et $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ un $DL_{n-1}(a)$: $f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n-1} a_k (x-a)^k + \mathcal{o}((x-a)^{n-1})$, alors F, une primitive de f, admet un $DL_n(a)$:

$$F(x) \underset{a}{=} F(a) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + \mathcal{o}((x-a)^n)$$

Remarque 6. Ne pas oublier la constante d'intégration $F(a)$ lors de la primitivation d'un DL.

Exemples importants de DL obtenus par primitive d'un DL connu (à connaître par cœur)

- $\ln(1+x) \underset{0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \dfrac{x^k}{k} + \mathcal{o}(x^n) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + \mathcal{o}(x^n)$ $\quad DL_n(0)$
- $\ln(1-x) \underset{0}{=} -\sum_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k} + \mathcal{o}(x^n) = -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + \cdots - \dfrac{x^n}{n} + \mathcal{o}(x^n)$ $\quad DL_n(0)$
- $\arctan(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{2k+1} + \mathcal{o}(x^{2n+1}) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathcal{o}(x^{2n+1})$ $\quad DL_{2n+1}(0)$

2.3 Développements limités obtenus par la formule de Taylor-Young

Théorème n° 2 : formule de Taylor-Young

Une fonction $f \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$ admet un $DL_n(a)$:

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathcal{o}((x-a)^n)$$

Exemples d'utilisation de la formule de Taylor-Young (DL à connaître par cœur)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Les fonctions, exponentielle et $x \mapsto (1+x)^\alpha$, cos et sin admettent des DL en 0 :

- $e^x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} + \mathcal{o}(x^n) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \mathcal{o}(x^n)$ $\quad DL_n(0)$
- $\cos(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \mathcal{o}(x^{2n}) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \mathcal{o}(x^{2n})$ $\quad DL_{2n}(0)$
- $\sin(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \mathcal{o}(x^{2n+1}) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathcal{o}(x^{2n+1})$ $\quad DL_{2n+1}(0)$
- $(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{i=0}^{k-1} (\alpha - i) \right) \dfrac{x^k}{k!} + \mathcal{o}(x^n)$ $\quad DL_n(0)$

  $(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \mathcal{o}(x^n)$

Exemple 7. Si $f: x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, alors $f^{(k)}(0) = k!$.

2.4 Opérations sur les $DL_n(0)$

Proposition n° 5 opérations sur les développements limités

Soient $f, g: I \to \mathbb{R}$ admettant des $DL_n(0)$: $f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$ et $g(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n)$

1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f + g$ admet un $DL_n(0)$: $(\lambda f + g)(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k + b_k) x^k + o(x^n)$
2. fg admet un $DL_n(0)$: $f(x)g(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) x^k + o(x^n)$
3. De plus, si $b_0 \neq 0$, alors $1/g$ et f/g admettent des $DL_n(0)$.

Exemple 8.
1. Donner le $DL_3(0)$ de $f: x \mapsto \mathrm{e}^x \sin(x)$.
2. Trouver $DL_4(0)$ de $f: x \mapsto \cos^2(x)$
3. Trouver le $DL_2(0)$ de $\tan^2$ puis le $DL_5(0)$ de tan.
4. $DL_4(0)$ de $x \mapsto (\ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2})/x^3$

Exemples de nouveaux développements limités à connaître

- $\mathrm{ch}(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$ $DL_{2n}(0)$
- $\mathrm{sh}(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$ $DL_{2n+1}(0)$
- $\tan x \underset{0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \dfrac{17x^7}{315} + o(x^7)$
  À connaître au moins à l'ordre 3

Comment calculer le développement limité d'une composée ?

Soient f et g deux fonctions ayant des DL en 0 et $f(0) = 0$. Pour faire le $DL_n(0)$ de $g \circ f$:

1. Écrire le $DL_n(0)$ de f, poser une nouvelle variable $u = f(x)$ avec $u \xrightarrow[x \to 0]{} f(0) = 0$ (f continue).
2. Par produits successifs, calculer les $DL_n(0)$ de u^k. Soit p le plus petit entier tel que $o(u^p) \underset{0}{=} o(x^n)$.
3. Écrire le $DL_p(0)$ de g : $g(u) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{p} a_k u^k + o(u^p)$ puis remplacer u^k par son $DL_n(0)$ et $o(u^p)$ par $o(x^n)$.

Exemple 9.
1. $DL_4(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x) + \sin(x)}$
2. $DL_4(0)$ de $x \mapsto \cos(\sin(x))$
3. $DL_5(0)$ de $x \mapsto \sqrt{\mathrm{ch}(x)}$

3 Fonctions équivalentes : $\sim$

Définition de l'équivalence

On dit que f est **équivalente** à g en a si $f(x)/g(x) \xrightarrow[x \to a]{} 1$. On note $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$.

Remarque 7. Si $a \in \mathbb{R}$, $f \underset{a}{\sim} g \iff \exists \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \cap [a-\delta\,; a+\delta] \quad |f(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|$

Exemple 10. Soit $f(x) = x^2 + x + 1/x$ et $g(x) = \sqrt{x^2+3}$ Chercher des équivalents de f en 0^+ et en $+\infty$ et de g en $\pm\infty$.

Péril imminent : les équivalents à zéro, sont à bannir

Les équivalents à 0 ou $+\infty$ n'existent pas.

Proposition n° 6 : propriétés des équivalents

Soient f, g, h, $k\colon I \to \mathbb{R}$ non nulles au voisinage de a et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $f \underset{a}{\sim} f$
2. si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $g \underset{a}{\sim} f$,
3. $f \underset{a}{\sim} g$ et si $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{\sim} h$.
4. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $h \underset{a}{\sim} k$ alors $fh \underset{a}{\sim} gk$ et $f/h \underset{a}{\sim} g/k$.
5. Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$ (si $f > 0$ et $g > 0$ ou $\alpha \in \mathbb{N}$)
6. $f \underset{a}{\sim} g \iff f \underset{a}{=} g + o(g)$.
7. Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $h \underset{a}{=} o(f)$ ssi $h \underset{a}{=} o(g)$
8. Soit $\ell \in \mathbb{R}^*$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ ssi $f(x) \underset{a}{\sim} \ell$.

Remarque 8. On utilise la propriété 7 pour simplifier un o. Par exemple, si $f(x) \underset{+\infty}{=} o(x+1)$ alors $f(x) \underset{+\infty}{=} o(x)$.

Exemple 11. $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$, $\cos(x) \underset{0}{\sim} 1$, $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$, $\mathrm{e}^x - 1 \underset{0}{\sim} x$, $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$, si $\alpha \neq 0$, $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$, $1 - \cos(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$ (équivalents usuels à connaître)

Attention aux compositions d'équivalents

Il n'y a pas de résultat du genre : si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $h \circ f \underset{a}{\sim} h \circ g$.

Exemple 12. On a $x^2 + x \underset{+\infty}{\sim} x^2$. Que pouvez-vous dire de $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2+x}$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}$?

Péril imminent pas d'addition des équivalents

Les sommes d'équivalents c'est mal. (à recopier autant de fois que nécessaire)

Exemple 13. $x + 1 \underset{+\infty}{\sim} x$, et $-x \underset{+\infty}{\sim} -1 - x$, à votre avis $(x+1) - x$ est équivalent à $x + (-1 - x)$ en $+\infty$?

Remarque 9. En cas d'envie pressante d'addition (retenez-vous), écrire des DL et les sommer.

Proposition n° 7 : propriétés des équivalents

Supposons que $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$

1. Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, alors $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.
2. f et g ont le même signe au voisinage de a.
3. Si $f \leqslant h \leqslant g$ au voisinage de a, alors $h(x) \underset{a}{\sim} f(x)$
4. Si $u(x) \xrightarrow[x \to b]{} a$, alors $f(u(x)) \underset{x \to b}{\sim} g(u(x))$

Exemple 14. Déterminer des équivalents des fonctions/suites suivantes au point donné :

1. $f(x) = \sqrt{x^3+1}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en $+\infty$
2. $g(x) = \ln(1+x)$ en $+\infty$
3. $h(x) = \sqrt{\ln(1+x^2)}$ en 0
4. $k(x) = \ln(1+x) + \ln(1+x^2)$ en 0
5. $u_n = \dfrac{n(n+1)}{2} + \ln(n)$ en $+\infty$
6. $\sin(1/n)$ quand $n \to +\infty$
7. $\sin(2x)$ en 0
8. $\sin(1+x)$ en -1
9. $\underline{H}(\omega) = \dfrac{1}{1 + jRC\omega}$ quand $\omega \to +\infty$.

Remarque 10. Écrire $\mathrm{e}^x \underset{0}{\sim} 1 + x$ est juste, tout comme $\mathrm{e}^x \underset{0}{\sim} 1 + \dfrac{x}{\pi}$ mais ceci est maladroit, l'équivalent nous renseigne seulement sur le terme prépondérant. Ici, on écrira donc $\mathrm{e}^x \underset{0}{\sim} 1$.

4 Domination : $\mathcal{O}$

Définition de la domination

On dit que f est **dominée** par g au voisinage de a si f/g est bornée au voisinage de a.
On note $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ ou $f(x) \underset{a}{=} \mathcal{O}(g(x))$ et on lit «f est un grand O de g au voisinage de a»

Remarque 11. Si $a \in \mathbb{R}$, $\quad f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g) \quad \iff \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \cap [\, a - \delta\,; a + \delta\,] \backslash \{a\} \quad |f(x)| \leqslant M|g(x)|$

Exemple 15. $x \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(\mathrm{e}^{x})$. Comparer $x \mapsto x^3 \sin(x)$ et $x \mapsto x^3$ en 0.

Proposition n° 8 : propriétés des $\mathcal{O}$

Soient f, g, h, $k \colon I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$ ou une extrémité de I. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Si $f \underset{a}{=} o(g)$ alors $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$.
2. Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ et $g \underset{a}{=} \mathcal{O}(f)$.
3. Si $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ et si $h \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ alors $f + \lambda h \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$.
4. Si $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ et si $g \underset{a}{=} \mathcal{O}(h)$ alors $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(h)$.
5. Si $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ et si $h \underset{a}{=} \mathcal{O}(k)$ alors $fh \underset{a}{=} \mathcal{O}(gk)$.
6. f est bornée au voisinage de a ssi $f = \mathcal{O}(1)$.

Remarque 12. Écrire $\sin(x) = x + \mathcal{O}(x^3)$ est plus précis que d'écrire $\sin(x) = x + o(x^2)$ ou même $\sin(x) = x + o(x)$.

5 Application des développements limités

Définition d'un développement asymptotique

Un développement asymptotique est comme un développement limité mais x peut tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$ et il peut y avoir des termes non polynomiaux comme $1/x^p$. Dans les faits, on fait comme si on avait des DL.

Exemple 16.

1. Développement asymptotique à la précision de $o(1/n^2)$ de $(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}})_n$.
2. Développement asymptotique de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ en $+\infty$ à la précision de $o(x^{-3})$.

Une limite classique à connaître

Soit $x \in \mathbb{R}$, trouver la limite de $(u_n)_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.

Comment trouver un équivalent ? (f est équivalente à son premier terme non nul dans son DL)

Si $f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=p}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$ avec $a_p \neq 0$, alors $f(x) \underset{a}{\sim} a_p (x-a)^p$

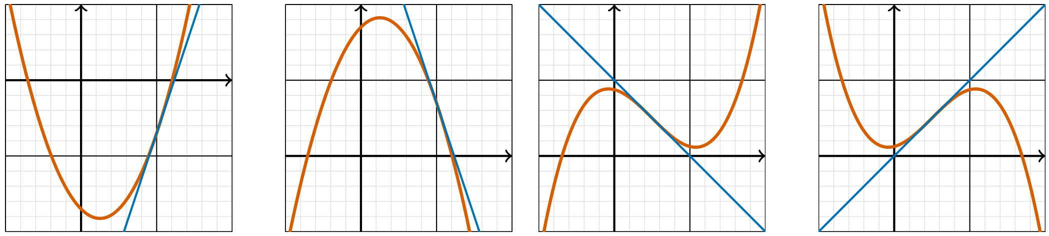
Comment trouver une limite ?

f a la même limite en a qu'un équivalent trouvé grâce à la méthode précédente.

Exemple 17. Quelle est la limite de $\dfrac{\sin(x) - x}{x^3}$ en 0 ?

Comment étudier la courbe d'une fonction grâce à un DL ?

Si f a un $DL_p(a)$: $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + a_p(x-a)^p + o((x-a)^p)$ avec $a_p \neq 0$ et $p \geqslant 2$.
Au voisinage de a, $f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a))$ est du même signe que $a_p(x-a)^p$.
On connaît donc la position de la fonction par rapport à sa tangente en a (voir figure 2).
Si jamais, $f'(a) = 0$, on a un point critique, suivant la parité de p et du signe de a_p, soit on a un maximum local, soit un minimum local, soit un point d'inflexion.



(a) $a_p > 0$ et p pair (b) $a_p < 0$ et p pair (c) $a_p > 0$ et p impair (d) $a_p < 0$ et p impair

FIGURE 2 – Différents cas, la position de la tangente dépend du signe de a_p et de la parité de p.

Exemple 18. Posons $f\colon x \mapsto 1 + 2x - 5\sqrt{1 + x^3 + x^4}$, tracer l'allure de f au voisinage de 0 ?

Définition d'une asymptote

On dit que $x \mapsto ax + b$ est une **asymptote** de f en $+\infty$ si $f(x) - (ax + b) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ (idem en $-\infty$).

Comment trouver l'asymptote de f en $+\infty$?

1. Trouver un développement asymptotique de f de la forme $f(x) \underset{+\infty}{=} \alpha x + \beta + \gamma x^{-p} + o(x^{-p})$ avec $p > 0$.
2. Alors $x \mapsto \alpha x + \beta$ est une asymptote de f en $+\infty$.
3. Si $\gamma \neq 0$, le signe de γ permet de connaître la position de f par rapport à son asymptote.

Remarque 13. Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ (ou $-\infty$) avec $a \in \mathbb{R}$, alors $x = a$ est une asymptote verticale de f.

Exemple 19. Montrer que $f\colon x \mapsto x\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ admet une asymptote en $+\infty$ et déterminer la position de f par rapport à cette asymptote.

Comment déterminer le développement limité d'une fonction réciproque ?

Soit $f\colon I \to J$ bijective.

1. Justifier avec la formule de Taylor-Young que f^{-1} admet un $DL_n(a)$: $f^{-1}(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$.

   Si $a = 0$ et f est impaire, alors f^{-1} est aussi impaire et donc $a_{2k} = 0$ pour tout k.
2. Écrire le développement limité de f.
3. Par composition, écrire le développement limité de $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}$. Conclure par unicité des coefficients.

Exemple 20. Montrer que sh est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et trouver le $DL_3(0)$ de sh^{-1}. Calculer $(\mathrm{sh}^{-1})^{(k)}(0)$ pour $k \in [\![0 ; 3]\!]$.

Comment déterminer un DA d'une suite définie par récurrence ou implicitement ?

On effectue un DA à un très petit ordre (avec une limite, un équivalent, un encadrement), puis on réinjecte ce DA de façon à en obtenir un plus précis puis on recommence.

Exemple 21. Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2}$, montrer que $u_n \in [\![n-1 ; n]\!]$, puis trouver un DA à la précision $o(1/n)$.

Exemple 22.

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x^3 + nx = 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée x_n.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant x_n \leqslant \dfrac{1}{n}$. En déduire la limite de $(x_n)_n$ puis que $x_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
3. Montrer que $x_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^4} + o\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$.