Chapitre 14
Analyse asymptotique

Objectifs :
- Définir les $\sim$, o et $\mathcal{O}$ (déjà vus pour les suites) pour les fonctions.
- Définir les développements limités et établir les développements usuels à connaître par cœur.
- Savoir les utiliser pour le calcul de limites et les études de fonctions.

Un développement limité d'une fonction f en un point a à l'ordre n est, dit grossièrement, une fonction polynomiale (si elle existe) de degré au plus n qui approxime le mieux f au voisinage de a.

Attention : utiliser un lecteur de pdf adapté

Ce polycopié contient une animation, il est donc conseillé d'utiliser un lecteur de pdf capable de lire les animations (comme Adobe Reader, Foxit PDF Reader, Okular ou autres).

Table des matières

Dans tout ce chapitre, $n \in \mathbb{N}$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ ou une extrémité de I, f et g, h et k définies sur $I \backslash \{a\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si on divise par g, on sous-entend que g ne s'annule pas sur un voisinage de a (sauf éventuellement en a).

1 Fonctions négligeables : o

Définition d'une fonction négligeable devant une autre

On dit que f est **négligeable** devant g au voisinage de a si $f(x)/g(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$.

On note $f \underset{a}{=} o(g)$ ou $f(x) \underset{a}{=} o(g(x))$, lire «*$f$ est un petit o de g au voisinage de a*».

Exemples 1.
- $x^2 \underset{+\infty}{=} o(x^4)$ $\qquad$ $x^4 \underset{0}{=} o(x^2)$
- $f(x) \underset{a}{=} o(1)$ ssi $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$.
- Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ si et seulement si $f(x) \underset{a}{=} \ell + o(1)$.

Remarque 1. Si $a \in \mathbb{R}$, $\quad f \underset{a}{=} o(g) \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \cap [\, a - \delta \,; a + \delta \,] \backslash \{a\} \quad |f(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|$.

Attention $o(g)$ est une notation

Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $h \underset{a}{=} o(g)$ n'implique pas que $f = h$. De plus, $f \underset{a}{=} h + o(g)$ veut dire $f = h + k$ où $k \underset{a}{=} o(g)$.

Proposition n° 1 : propriétés algébriques des o

1. Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et si $f \underset{a}{=} o(\lambda g)$ alors $f \underset{a}{=} o(g)$. $\qquad$ Bref, $o(\lambda g) = o(g)$
2. Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et si $h \underset{a}{=} o(g)$ alors $\lambda f + h \underset{a}{=} o(g)$ (pour $\lambda \in \mathbb{R}$) $\qquad$ Bref, $\lambda o(g) + o(g) = o(g)$
3. Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et si $g \underset{a}{=} o(h)$ alors $f \underset{a}{=} o(h)$. $\qquad$ Bref, $o(o(h)) \underset{a}{=} o(h)$
4. Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et si $h \underset{a}{=} o(k)$ alors $fh \underset{a}{=} o(gk)$. $\qquad$ Bref, $o(g)o(k) = o(gk)$
5. $f = o(h)$ si et seulement si $fg = o(hg)$. $\qquad$ Bref, $go(h) = o(gh)$
6. $f = o(g + o(g))$ si et seulement si $f = o(g)$. $\qquad$ Bref, $o(g + o(g)) = o(g)$

Exemple 2. Si $f(x) \underset{0}{=} 51x^3 + o(x^2) + o(x^3) + 2 + x + o(x^2 + x^4)$, simplifier cette écriture.

Remarque 2. Les croissances comparées s'interprètent avec les o : soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, alors :

1. Si $\beta > 0$, $\qquad \ln^{\alpha}(x) \underset{+\infty}{=} o(x^{\beta}) \qquad x^{\alpha} \underset{+\infty}{=} o(\mathrm{e}^{\beta x})$
2. Si $\alpha < \beta$, $\qquad x^{\alpha} \underset{+\infty}{=} o(x^{\beta})$, $\qquad x^{\beta} \underset{0}{=} o(x^{\alpha})$, $\qquad \ln(x)^{\alpha} \underset{+\infty}{=} o(\ln(x)^{\beta})$ $\qquad$ et $\qquad \mathrm{e}^{\alpha x} \underset{+\infty}{=} o(\mathrm{e}^{\beta x})$

2 Développements limités en un point $a \in \mathbb{R}$

Dans cette partie, a est un réel appartenant à I.

2.1 Définitions et premières propriétés

Définition d'un développement limité

On dit que f a un **développement limité** à l'ordre n en a s'il existe $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^n) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

La fonction polynomiale $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$ est la **partie régulière** du développement limité.

On note $DL_n(a)$ un développement limité à l'ordre n en a.

Exemple 3. Soit $f(x) = 1 + 5x + 3x\sqrt{x}$.

Exemples importants à connaître sans hésitation

- $\dfrac{1}{1-x} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$ $\quad DL_n(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$
- $\dfrac{1}{1+x} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$ $\quad DL_n(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$
- $\dfrac{1}{1+x^2} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n}) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$ $\quad DL_{2n}(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$

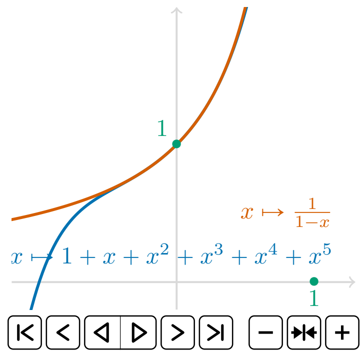


FIGURE 1 – Plusieurs polynômes approximant $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ en 0.

Exemple 4. Si $f(x) \underset{a}{=} 3+5(x-a)+8(x-a)^2-13(x-a)^3+o((x-a)^3)$, alors $f(x) \underset{a}{=} 3+5(x-a)+8(x-a)^2+o((x-a)^2)$.

Remarque 3. Si la fonction f admet un $DL_n(a)$ et si $m < n$ alors elle admet un $DL_m(a)$. Il suffit de tronquer le développement limité $DL_n(a)$ à l'ordre souhaité.

Proposition n° 2 : au plus unicité du développement limité

Si $f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$, alors pour tout $k \in [\![0\,; n]\!]$, $a_k = b_k$.

Remarque 4. Si f est paire (resp. impaire) et a un $DL_n(0)$, alors les coefficients d'indices impairs (resp. pairs) sont nuls.

Proposition n° 3 : condition nécessaire et suffisante pour avoir un $DL_0(a)$ ou un $DL_1(a)$

1. f admet un $DL_0(a)$ ssi f est continue en a. Alors $\quad f(x) \underset{a}{=} f(a) + o(1)$.
2. f admet un $DL_1(a)$ ssi f est dérivable en a. Alors $\quad f(x) \underset{a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$.

Proposition n° 4 : translation d'un développement limité

$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$ $(DL_n(a)$ de $f)$ ssi $f(a+h) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + o(h^n)$ $(DL_n(0)$ de $h \mapsto f(a+h))$

Exemple 5. $DL_3(1)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{2-x}$

Remarque 5. Les $DL_n(0)$ seront les seuls à apprendre. Car, grâce à eux, on pourra trouver des $DL_n(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Péril imminent au o

Dans un DL, n'oubliez jamais le o, par exemple, « $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2$ » est horriblement faux !

2.2 $DL_n(a)$ obtenus par primitive

Théorème n° 1 : primitive d'un développement limité

Si $a \in I$ et $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ a un $DL_{n-1}(a)$: $f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x-a)^k + o((x-a)^{n-1})$, alors F, une primitive de f, admet un $DL_n(a)$:
$$F(x) \underset{a}{=} F(a) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + o((x-a)^n)$$

Remarque 6. Ne pas oublier la constante d'intégration $F(a)$ lors de la primitivation d'un DL.

Exemples importants de DL obtenus par primitive d'un DL connu (à connaître par cœur)

- $\ln(1+x) \underset{0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$ $\qquad DL_n(0)$
- $\ln(1-x) \underset{0}{=} -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$ $\qquad DL_n(0)$
- $\arctan(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$ $\qquad DL_{2n+1}(0)$

2.3 Développements limités obtenus par la formule de Taylor-Young

Théorème n° 2 : formule de Taylor-Young

Une fonction $f \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$ admet un $DL_n(a)$:
$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Exemples d'utilisation de la formule de Taylor-Young (DL à connaître par cœur)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Les fonctions, exponentielle et $x \mapsto (1+x)^\alpha$, cos et sin admettent des DL en 0 :

- $\mathrm{e}^x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ $\qquad DL_n(0)$
- $\cos(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2n}) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$ $\qquad DL_{2n}(0)$
- $\sin(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + o(x^{2n+1}) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$ $\qquad DL_{2n+1}(0)$
- $(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha-i)\right)\frac{x^k}{k!} + o(x^n)$ $\qquad DL_n(0)$

  $(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

Exemple 6. Si $f\colon x \mapsto \frac{1}{1-x}$, alors $f^{(k)}(0) = k!$

2.4 Opérations sur les $DL_n(0)$

Proposition n° 5 opérations sur les développements limités

Soient $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ admettant des $DL_n(0)$: $f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$ et $g(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n)$

1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f + g$ admet un $DL_n(0)$: $(\lambda f + g)(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k + b_k) x^k + o(x^n)$
2. fg admet un $DL_n(0)$: $f(x)g(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) x^k + o(x^n)$
3. De plus, si $b_0 \neq 0$, alors $1/g$ et f/g admettent des $DL_n(0)$.

Exemple 7.

1. Donner le $DL_3(0)$ de $f\colon x \mapsto \mathrm{e}^x \sin(x)$.
2. Trouver $DL_4(0)$ de $f\colon x \mapsto \cos^2(x)$
3. Trouver le $DL_2(0)$ de $\tan^2$ puis le $DL_5(0)$ de tan.
4. $DL_4(0)$ de $x \mapsto (\ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2})/x^3$

Exemples de nouveaux développements limités à connaître

1. $\operatorname{ch}(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$ $DL_{2n}(0)$
2. $\operatorname{sh}(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$ $DL_{2n+1}(0)$
3. $\tan x \underset{0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \dfrac{17x^7}{315} + o(x^7)$ $DL_7(0)$ à connaître au moins à l'ordre 3

Comment calculer le développement limité d'une composée ?

Soient f et g deux fonctions ayant des DL en 0 et $f(0) = 0$. Pour faire le $DL_n(0)$ de $g \circ f$:

1. Écrire le $DL_n(0)$ de f, poser une nouvelle variable $u = f(x)$ avec $u \xrightarrow[x \to 0]{} f(0) = 0$ (f continue).
2. Par produits successifs, calculer les $DL_n(0)$ de u^k. Soit p le plus petit entier tel que $o(u^p) \underset{0}{=} o(x^n)$.
3. Écrire le $DL_p(0)$ de g : $g(u) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{p} a_k u^k + o(u^p)$ puis remplacer u^k par son $DL_n(0)$ et $o(u^p)$ par $o(x^n)$.

Exemple 8.

1. $DL_4(0)$ de $x \mapsto \cos(\sin(x))$
2. $DL_4(0)$ de $x \mapsto \dfrac{\exp(x)}{\cos(x) + \sin(x)}$
3. $DL_5(0)$ de $x \mapsto \sqrt{\operatorname{ch}(x)}$

3 Fonctions équivalentes : $\sim$

Définition de l'équivalence

On dit que f est **équivalente** à g en a si $f(x)/g(x) \xrightarrow[x \to a]{} 1$. On note $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$.

Remarque 7. Si $a \in \mathbb{R}$, $f \underset{a}{\sim} g \iff \exists\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \cap [a - \delta ; a + \delta] \quad |f(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|$

Exemple 9. Soit $f(x) = x^2 + x + 1/x$ et $g(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ Chercher des équivalents de f en 0^+ et en $+\infty$ et de g en $\pm\infty$.

Péril imminent : les équivalents à zéro, sont à bannir

Les équivalents à 0 ou $+\infty$ n'existent pas.

Proposition n° 6 : propriétés des équivalents

Soient f, g, h, $k\colon I \to \mathbb{R}$ non nulles au voisinage de a et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $f \underset{a}{\sim} f$ (réflexivité)
2. si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $g \underset{a}{\sim} f$ (symétrie)
3. $f \underset{a}{\sim} g$ et si $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{\sim} h$ (transitivité)
4. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $h \underset{a}{\sim} k$ alors $fh \underset{a}{\sim} gk$ et $f/h \underset{a}{\sim} g/k$
5. Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$ (si $f > 0$ et $g > 0$ ou $\alpha \in \mathbb{N}$)
6. $f \underset{a}{\sim} g \iff f \underset{a}{=} g + o(g)$.
7. Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $h \underset{a}{=} o(f)$ ssi $h \underset{a}{=} o(g)$
8. Soit $\ell \in \mathbb{R}^*$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ ssi $f(x) \underset{a}{\sim} \ell$

Remarque 8. On utilise la propriété 7. pour simplifier un o. Par exemple, si $f(x) \underset{+\infty}{=} o(x+1)$ alors $f(x) \underset{+\infty}{=} o(x)$.

Exemple 10. $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$, $\cos(x) \underset{0}{\sim} 1$, $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$, $\mathrm{e}^x - 1 \underset{0}{\sim} x$, $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$, si $\alpha \neq 0$, $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$, $1 - \cos(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$ (équivalents usuels à connaître)

Attention aux compositions d'équivalents

Il n'y a pas de résultat du genre : si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $h \circ f \underset{a}{\sim} h \circ g$.

Exemple 11. On a $x^2 + x \underset{+\infty}{\sim} x^2$. Que pouvez-vous dire de $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2+x}$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}$?

Péril imminent pas d'addition des équivalents

Les sommes d'équivalents c'est mal. (à recopier autant de fois que nécessaire)

Exemple 12. $x + 1 \underset{+\infty}{\sim} x$, et $-x \underset{+\infty}{\sim} -1 - x$, à votre avis $(x+1) - x$ est équivalent à $x + (-1-x)$ en $+\infty$?

Remarque 9. En cas d'envie pressante d'addition (retenez-vous), écrire des DL et les sommer.

Proposition n° 7 : propriétés des équivalents

Supposons que $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$

1. Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, alors $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.
2. f et g ont le même signe au voisinage de a.
3. Si $f \leqslant h \leqslant g$ au voisinage de a, alors $h(x) \underset{a}{\sim} f(x)$
4. Si $u(x) \xrightarrow[x\to b]{} a$, alors $f(u(x)) \underset{x\to b}{\sim} g(u(x))$

Exemple 13. Déterminer des équivalents des fonctions/suites suivantes au point donné :

1. $f(x) = \sqrt{x^3+1}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en $+\infty$
2. $g(x) = \ln(1+x)$ en $+\infty$
3. $h(x) = \sqrt{\ln(1+x^2)}$ en 0
4. $k(x) = \ln(1+x) + \ln(1+x^2)$ en 0
5. $u_n = \dfrac{n(n+1)}{2} + \ln(n)$ en $+\infty$
6. $\sin(1/n)$ quand $n \to +\infty$
7. $\sin(2x)$ en 0
8. $\sin(1+x)$ en -1
9. $\underline{H}(\omega) = \dfrac{1}{1 + jRC\omega}$ quand $\omega \to +\infty$.

Remarque 10. Écrire $\mathrm{e}^x \underset{0}{\sim} 1 + x$ est juste, tout comme $\mathrm{e}^x \underset{0}{\sim} 1 + \dfrac{x}{\pi}$ mais ceci est maladroit, l'équivalent nous renseigne seulement sur le terme prépondérant. Ici, on écrira donc $\mathrm{e}^x \underset{0}{\sim} 1$.

4 Domination : $\mathcal{O}$

Définition de la domination

On dit que f est **dominée** par g au voisinage de a si f/g est bornée au voisinage de a.
On note $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ ou $f(x) \underset{a}{=} \mathcal{O}(g(x))$ et on lit «f est un grand O de g au voisinage de a»

Remarque 11. Si $a \in \mathbb{R}$, $\quad f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g) \quad \iff \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \cap [\, a - \delta \,;\, a + \delta \,] \backslash \{a\} \quad |f(x)| \leqslant M|g(x)|$

Exemple 14. $x \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(\mathrm{e}^{x})$. Comparer $x \mapsto x^3 \sin(x)$ et $x \mapsto x^3$ en 0.

Proposition n° 8 : propriétés des $\mathcal{O}$

Soient f, g, h, k: $I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$ ou une extrémité de I. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Si $f \underset{a}{=} o(g)$ alors $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$.
2. Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ et $g \underset{a}{=} \mathcal{O}(f)$.
3. Si $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ et si $h \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ alors $f + \lambda h \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$.
4. Si $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ et si $g \underset{a}{=} \mathcal{O}(h)$ alors $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(h)$.
5. Si $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ et si $h \underset{a}{=} \mathcal{O}(k)$ alors $fh \underset{a}{=} \mathcal{O}(gk)$.
6. f est bornée au voisinage de a ssi $f = \mathcal{O}(1)$.

Remarque 12. Écrire $\sin(x) = x + \mathcal{O}(x^3)$ est plus précis que d'écrire $\sin(x) = x + o(x^2)$ ou même $\sin(x) = x + o(x)$.

5 Application des développements limités

Définition d'un développement asymptotique

Un développement asymptotique est comme un développement limité mais x peut tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$ et il peut y avoir des termes non polynomiaux comme $1/x^p$. Dans les faits, on fait comme si on avait des DL.

Exemple 15.

1. Développement asymptotique à la précision de $o(1/n^2)$ de $(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}})_n$.
2. Développement asymptotique de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ en $+\infty$ à la précision de $o(x^{-3})$.

Une limite classique à connaître

Soit $x \in \mathbb{R}$, trouver la limite de $(u_n)_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.

Comment trouver un équivalent ? (f est équivalente à son premier terme non nul dans son DL)

Si $f(x) \underset{a}{=} \sum\limits_{k=p}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$ avec $a_p \neq 0$, alors $f(x) \underset{a}{\sim} a_p(x-a)^p$

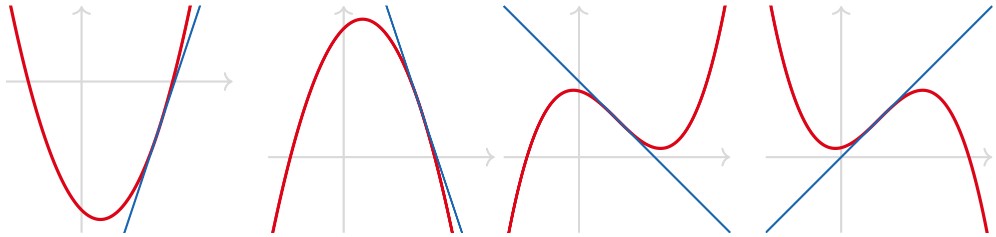
Comment trouver une limite ?

f a la même limite en a qu'un équivalent trouvé grâce à la méthode précédente.

Exemple 16. Quelle est la limite de $\dfrac{\sin(x) - x}{x^3}$ en 0 ?

Comment étudier la courbe d'une fonction grâce à un DL ?

Si f a un $DL_p(a)$: $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + a_p(x-a)^p + o((x-a)^p)$ avec $a_p \neq 0$ et $p \geqslant 2$.
Au voisinage de a, $f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a))$ est du même signe que $a_p(x-a)^p$.
On connaît donc la position de la fonction par rapport à sa tangente en a (voir figure 2).
Si jamais, $f'(a) = 0$, on a un point critique, suivant la parité de p et du signe de a_p, soit on a un maximum local, soit un minimum local, soit un point d'inflexion.



(a) $a_p > 0$ et p pair (b) $a_p < 0$ et p pair (c) $a_p > 0$ et p impair (d) $a_p < 0$ et p impair

FIGURE 2 – Différents cas, la position de la tangente dépend du signe de a_p et de la parité de p.

Exemple 17. Posons $f\colon x \mapsto 1 + 2x - 5\sqrt{1 + x^3 + x^4}$, tracer l'allure de f au voisinage de 0 ?

Définition d'une asymptote

On dit que $x \mapsto ax + b$ est une **asymptote** de f en $+\infty$ si $f(x) - (ax + b) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ (idem en $-\infty$).

Comment trouver l'asymptote de f en $+\infty$?

1. Trouver un développement asymptotique de f de la forme $f(x) \underset{+\infty}{=} \alpha x + \beta + \gamma x^{-p} + o(x^{-p})$ avec $p > 0$.
2. Alors $x \mapsto \alpha x + \beta$ est une asymptote de f en $+\infty$.
3. Si $\gamma \neq 0$, le signe de γ permet de connaître la position de f par rapport à son asymptote.

Remarque 13. Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ (ou $-\infty$) avec $a \in \mathbb{R}$, alors $x = a$ est une asymptote verticale de f.

Exemple 18. Montrer que $f\colon x \mapsto x\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ admet une asymptote en $+\infty$ et déterminer la position de f par rapport à cette asymptote.

Comment déterminer le développement limité d'une fonction réciproque ?

Soit $f\colon I \to J$ bijective.

1. Justifier avec la formule de Taylor-Young que f^{-1} admet un $DL_n(a)$: $f^{-1}(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$.

   Si $a = 0$ et f est impaire, alors f^{-1} est aussi impaire et donc $a_{2k} = 0$ pour tout k.
2. Écrire le développement limité de f.
3. Par composition, écrire le développement limité de $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}$. Conclure par unicité des coefficients.

Exemple 19. Montrer que sh est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et trouver le $DL_3(0)$ de sh^{-1}. Calculer $(\mathrm{sh}^{-1})^{(k)}(0)$ pour $k \in [\![0\,;3]\!]$.

Comment déterminer un DA d'une suite définie par récurrence ou implicitement ?

On effectue un DA à un très petit ordre (avec une limite, un équivalent, un encadrement), puis on réinjecte ce DA de façon à en obtenir un plus précis puis on recommence.

Exemple 20. Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2}$, montrer que $u_n \in [\![n-1\,; n]\!]$, puis trouver un DA à la précision $o(1/n)$.

Exemple 21.
1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x^3 + nx = 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée x_n.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant x_n \leqslant \dfrac{1}{n}$. En déduire la limite de $(x_n)_n$ puis que $x_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
3. Montrer que $x_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^4} + o\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$.