Chapitre 15

Applications linéaires

Prérequis indispensables de ce chapitre :

- Ensembles et applications : image d'un ensemble, image réciproque d'un ensemble, injectivité, surjectivité, bijectivité
- Systèmes linéaires
- Matrices
- Polynômes
- Espaces vectoriels
- Espaces vectoriels de dimension finie

Objectifs :

- Définir les applications linéaires (des fonctions particulières qui vont d'un espace vectoriel à un autre)
- Étude d'applications linéaires particulières

Les applications linéaires sont le chaînon manquant pour comprendre le lien entre espaces vectoriels de dimension finie et matrices.

Table des matières

Dans tout ce chapitre, sauf indication contraire, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E et F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1 Généralités

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition d'une application linéaire

1. Une fonction $u\colon E \longrightarrow F$ est dite **linéaire** si $\forall (x,x',\lambda)\in E^2\times\lambda\in\mathbb{K} \quad u(\lambda x+x')=\lambda u(x)+u(x')$
2. On note $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
3. Si $E=F$ et $f\in\mathscr{L}(E,E)$, f est appelée **endomorphisme de** E. On note $\mathscr{L}(E)=\mathscr{L}(E,E)$.
4. Si $f\in\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ alors f est appelée **forme linéaire sur** E. On note $E^*=\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$.

Exemple 1.
1. Soient $E=F=\mathbb{R}$ et $f\colon x\longmapsto 3x$, f est linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. $f\colon (x,y)\longmapsto (x,x+y,x-y)$ est linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $\Phi\colon f\mapsto \int_a^b f$ est une forme linéaire sur $\mathscr{C}^0([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$.
4. $\Delta\colon \begin{cases}\mathscr{C}^\infty([\,0\,;1\,],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{C}^\infty([\,0\,;1\,],\mathbb{R})\\ \qquad f \qquad\qquad \longmapsto f'\end{cases}$ est un endomorphisme.
5. $f\colon A\longmapsto A^\top$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
6. $f\colon (x_1,x_2,\dots,x_n)\longmapsto \sum_{k=1}^n x_k$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque 1. Si $u\in\mathscr{L}(E,F)$, alors $u(0_E)=0_F$, pour tout $(x,x')\in E^2$ et $\lambda\in\mathbb{K}$, $u(x+x')=u(x)+u(x')$, $u(\lambda x)=\lambda u(x)$, et pour tout $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in E^n$, et $(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$, $u\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k\right)=\sum_{k=1}^n \lambda_k u(e_k)$.

Proposition n° 1 : opérations sur les applications linéaires
1. L'ensemble $\mathscr{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(E,F)$.
2. Si $f\in\mathscr{L}(E,F)$, $g\in\mathscr{L}(F,G)$, alors $g\circ f\in\mathscr{L}(E,G)$ et $\forall\lambda\in\mathbb{K}\quad (\lambda g)\circ f=\lambda(g\circ f)=g\circ(\lambda f)$.
3. Si $f\in\mathscr{L}(E,F)$, $(g,h)\in\mathscr{L}(F,G)^2$, alors $(g+h)\circ f=g\circ f+h\circ f$.
4. Si $(g,h)\in\mathscr{L}(E,F)^2$ et $f\in\mathscr{L}(F,G)$, alors $f\circ(g+h)=f\circ g+f\circ h$

1.2 Applications linéaires et sous-espaces vectoriels

Théorème n° 1 : image directe et réciproque d'un SEV par une fonction linéaire

Soit $f\in\mathscr{L}(E,F)$. Soit A un sous-espace vectoriel de E et B un sous-espace vectoriel de F.
1. L'ensemble $f(A)$ est un SEV de F.
2. L'ensemble $f^{-1}(B)$ est un SEV de E.

Définition du noyau et de l'image

Soit $f\in\mathscr{L}(E,F)$.
1. On appelle **image de** f l'ensemble de F : $\mathrm{Im}(f)=f(E)=\{y\in F\mid \exists x\in E\quad y=f(x)\}$
2. On appelle **noyau de** f l'ensemble de E : $\mathrm{Ker}(f)=f^{-1}(\{0_F\})=\{x\in E\mid f(x)=0_F\}$

Alors $\mathrm{Ker}(f)$ est un SEV de E et $\mathrm{Im}(f)$ est un SEV de F.

Exemple 2. Soit $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto (x, x+y, x-y) \end{cases}$. Déterminer $\dim(\mathrm{Ker}(f))$ et $\dim(\mathrm{Im}(f))$.

Remarque 2. Ce résultat donne une nouvelle méthode pour montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel.

Exemple 3. $F = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(0) = 0\}$ et $G = \{f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f'' + f = 0\}$ sont des espaces vectoriels.

Remarque 3. Si $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid f(x) = \lambda x\}$.

Proposition n° 2 : caractérisation de l'injectivité/surjectivité des applications linéaires

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. f est surjective ssi $\mathrm{Im}(f) = F$.
2. f est injective ssi $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Exemple 4. La fonction $f\colon P \longmapsto P' \in \mathscr{L}(\mathbb{K}[X])$ est-elle injective ?

Définition d'isomorphisme, automorphisme et du groupe linéaire

- Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est bijective, on dit que f est un **isomorphisme de** E **sur** F et que E et F sont **isomorphes**.
- Si $f \in \mathscr{L}(E)$ est bijective, on dit que f est un **automorphisme de** E.
- On appelle **groupe linéaire**, noté $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

Proposition n° 3 : composition et inverse d' isomorphismes

Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$ deux isomorphismes :

- $g \circ f$ est un isomorphisme de E dans G et $f^{-1} \circ g^{-1}$ est sa bijection réciproque.
- f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.

2 Endomorphismes

Proposition n° 4 : propriétés des endomorphismes

Soit $(f,g,h) \in \mathscr{L}(E)^3$.

1. $\mathrm{Id}_E \in \mathscr{L}(E)$
2. Si $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda f + g \in \mathscr{L}(E)$ et $g \circ f \in \mathscr{L}(E)$
3. $f \circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E \circ f = f$
4. Si $n \in \mathbb{N}$, $f^n = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}} \in \mathscr{L}(E)$
   par convention $f^0 = \mathrm{Id}_E$
5. $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

Proposition n° 5 : propriétés de GL(E)

Soit $(f,g) \in \mathrm{GL}(E)^2$, $k \in \mathbb{Z}$

1. $\mathrm{Id}_E \in \mathrm{GL}(E)$
2. $f \circ g \in \mathrm{GL}(E)$
3. $f^{-1} \in \mathrm{GL}(E)$.
4. $f^k \in \mathrm{GL}(E)$ si $k \in \mathbb{N}$
5. $f^k = (f^{-1})^{-k} \in \mathrm{GL}(E)$ si $k \in \mathbb{Z}_-$.

2.1 Homothéties

Définition d'une homothétie

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, l'application $\lambda \mathrm{Id}_E\colon \begin{cases} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto \lambda x \end{cases}$ est appelée **homothétie de** E **de rapport** λ.

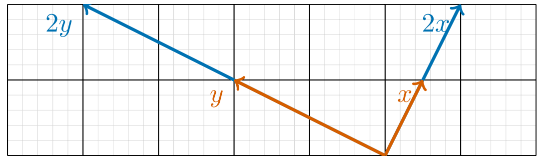


FIGURE 1 – Homothétie de rapport 2 dans le plan réel.

Proposition n° 6 : propriétés des homothéties

1. Toute homothétie de E est un endomorphisme de E.
2. La somme/composée de deux homothéties est une homothétie de rapport la somme/le produit des rapports.
3. Si $\lambda \neq 0$, l'homothétie de rapport λ est un automorphisme de E, son inverse est l'homothétie de rapport $1/\lambda$.
4. Les homothéties de E commutent avec tous les endomorphismes de E.

Remarque 4. Réciproquement, si $f \in \mathscr{L}(E)$ commute avec tous les endomorphismes de E, alors f est une homothétie (hors programme).

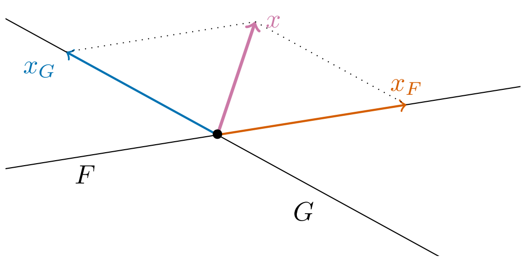
2.2 Projections

Définition de la projection sur un SEV parallèlement à un supplémentaire

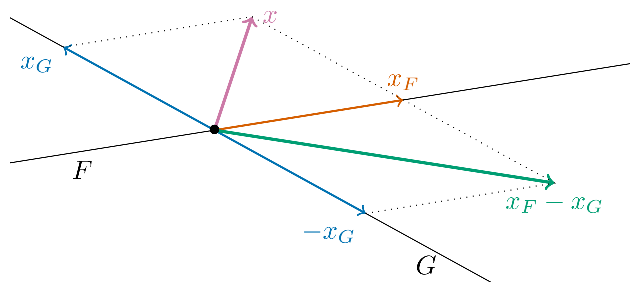
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires dans E : $F \oplus G = E$

$$\forall x \in E \qquad \exists!(x_F, x_G) \in F \times G \quad x = x_F + x_G$$

On appelle **projection/projecteur** sur F parallèlement à G (ou de direction G) l'application $p_F^G = p_F : \begin{cases} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x_F \end{cases}$.



(a) $p_F(x) = x_F$



(b) $s_F(x) = x_F - x_G$

FIGURE 2 – Projection sur F parallèlement à G et symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Exemple 5. Quelle est la projection sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$?

Attention aux projections

Contrairement à la physique/SI, la projection n'est pas forcément orthogonale (le cas orthogonal sera vu après). De plus, la projection d'un vecteur est un vecteur !

Proposition n° 7 : propriétés des projections

Supposons $E = F \oplus G$, notons p_F et p_G les projections associées.

1. $p_F \in \mathscr{L}(E)$
2. $p_F \circ p_F = p_F$
3. $\mathrm{Id}_E = p_F + p_G$
4. $p_F \circ p_G = 0_{\mathscr{L}(E)}$
5. $\mathrm{Ker}(p_F) = G$
6. $\mathrm{Ker}(p_F - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}(p_F) = F$

Remarque 5. En particulier, $\mathrm{Ker}(p_F) \oplus \mathrm{Im}(p_F) = E$.

Proposition n° 8 : caractérisation des projections
Soit $p \in \mathscr{L}(E)$. Sont équivalents :

1. $p \circ p = p$.
2. $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$, et p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Comment montrer qu'une application est une projection ?
Pour vérifier que p est une projection, on vérifie qu'elle est linéaire et que $p \circ p = p$ (pour cela, on calcule $p(p(x))$ pour $x \in E$). En calculant $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$, on saura sur quoi on projette et parallèlement à quoi.

Exemple 6. Montrer que $p \colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto (\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}) \end{cases}$ est une projection et donner la somme directe associée.

2.3 Symétries

Définition d'une symétrie

Supposons $E = F \oplus G$: pour tout $x \in E$, il existe un unique $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$. On appelle **symétrie** par rapport à F parallèlement à G l'application $s_F^G = s_F \colon \begin{cases} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x_F - x_G \end{cases}$

Proposition n° 9 : propriétés des symétries
Supposons $E = F \oplus G$, notons s_F et s_G les symétries associées.

1. $s_F = 2p_F - \mathrm{Id}_E$
2. $s_F \in \mathscr{L}(E)$
3. $s_F = -s_G$
4. $s_F \circ s_F = \mathrm{Id}_E$
5. $s_F \circ s_G = -\mathrm{Id}_E$
6. $\mathrm{Ker}(s_F - \mathrm{Id}_E) = F$
7. $\mathrm{Ker}(s_F + \mathrm{Id}_E) = G$

Remarque 6. En particulier, $\mathrm{Ker}(s_F - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s_F + \mathrm{Id}_E) = E$

Proposition n° 10 : caractérisation des symétries
Soit $s \in \mathscr{L}(E)$, sont équivalents :

1. $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.
2. $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$ et s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

Exemple 7. Soit $s \colon \begin{cases} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto M^\top \end{cases}$. Montrer que s est une symétrie et donner la somme directe associée.

3 Applications linéaires en dimension finie

3.1 Applications linéaires, familles génératrices et bases

Définition de l'image d'une famille finie de vecteurs

Soient $\mathscr{F} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une famille de E et $u \in \mathscr{L}(E,F)$. On appelle **image de la famille $\mathscr{F}$ par u** la famille de vecteurs de F : $u(\mathscr{F}) = (u(e_1), \dots, u(e_p))$.

Proposition n° 11 : l'image d'une famille libre par une fonction linéaire injective
Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ **injective** et $\mathcal{L}$ une famille libre de E. Alors, $u(\mathcal{L})$ est une famille libre de F.

On suppose maintenant que E est de dimension finie.

Proposition n° 12 : famille génératrice de l'image d'une application linéaire
Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{G} = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ engendre E. Alors, $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{vect}(u(\mathscr{G})) = \mathrm{vect}(u(g_1), \dots, u(g_n))$.
De plus, si u est **surjective**, alors, $u(\mathscr{G})$ est une famille génératrice de F (F est alors aussi de dimension finie).

Exemple 8. Soit $u \colon \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] \longrightarrow \mathbb{K}_{n-1}[X] \\ \quad P \quad \longmapsto P' \end{cases}$, déterminer $\mathrm{Im}(u)$, en déduire que u est surjective.

Théorème n° 2 : un isomorphisme transforme une base en base
Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{B}$ une base de E. Sont équivalents :

1. u est un isomorphisme
2. $u(\mathscr{B})$ est un base de F.

Alors, F est de dimension finie et $\dim(F) = \dim(E)$.

Remarque 7. Ce résultat sert à déterminer la dimension d'un espace vectoriel.

Théorème n° 3 : une fonction linéaire est entièrement caractérisée par l'image d'une base
Soient $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathscr{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ une famille de F. Alors il existe une unique application $u \colon E \longrightarrow F$ linéaire telle que pour tout $i \in [\![1\,; n]\!]$, $u(e_i) = f_i$.

Comment montrer que deux applications linéaires sont égales ?
Soient $(f,g) \in \mathscr{L}(E,F)^2$, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E. Si pour tout $i \in [\![1\,; n]\!]$, $f(e_i) = g(e_i)$, alors $f = g$.

Remarque 8. Si E et F sont de dimension finies et $\dim(E) = \dim(F)$, alors E et F sont isomorphes.

Proposition n° 13 : dimension de $\mathscr{L}(E,F)$
Si E et F sont deux EV de dim finie, alors $\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension finie et $\dim(\mathscr{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F)$.

Proposition n° 14 : une application est entièrement caractérisée sur deux SEV supplémentaires
Si $E = E_1 \oplus E_2$ où E_1 et E_2 sont des SEV de E et que $u_1 \in \mathscr{L}(E_1,F)$, $u_2 \in \mathscr{L}(E_2,F)$, alors il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ tel que $u_{|E_1} = u_1$ et $u_{|E_2} = u_2$.

3.2 Rang d'une application linéaire

Définition
On appelle **rang** de $u \in \mathscr{L}(E,F)$ la dimension de son image, on note $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}(u))$.

Exemple 9. Le rang d'une application linéaire est nul si et seulement si la fonction est nulle.

Exemple 10. Soit $u\colon \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) & \longmapsto (x_1, x_1) \end{cases}$. Que vaut $\mathrm{rg}(u)$?

Proposition n° 15 : propriétés du rang

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

- Si $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E alors $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u(\mathscr{B})) = \mathrm{rg}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$.
- Si E et F sont de dimension finie alors $\mathrm{rg}(u) \leqslant \min(\dim(F), \dim(E))$.

Comment déterminer le rang d'une application linéaire ?

Si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et qu'on connaît $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E, calculer $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$

Exemple 11. Quel est le rang de $f\colon (x, y) \longmapsto (x, x+y, x-y)$?

Proposition n° 16 : rang et composition d'applications linéaires

Soient E et F de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$.

1. $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$
2. Si g est un isomorphisme, alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$
3. Si f est un isomorphisme, alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(g)$

3.3 Théorème du rang

Théorème n° 4 : (version géométrique) du rang

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, si S est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans E , alors f induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}(f)$.

Théorème n° 5 du rang

Soient E de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors $$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$$

Exemple 12. Soit $u\colon \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) & \longmapsto (x_1, x_1) \end{cases}$. Quelle est la dimension du noyau de $\mathrm{Ker}(u)$?

Attention la somme des dimension ne caractérise pas le fait d'être supplémentaires

Le théorème du rang ne dit pas que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans E.

Théorème n° 6 : caractérisation de la bijectivité en même dimension finie

Soient E et F sont de dimension finie avec $\dim(E) = \dim(F)$ et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Sont équivalents :

1. f est injective de E dans F.
2. f est surjective de E dans F.
3. f est bijective de E dans F.

Remarque 9. $E = F$ de dimension finie est un cas particulier courant de cette situation.

Exemple 13. Montrer que $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto (y+z, z+x, x+y) \end{cases}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Remarque 10. Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ avec E et F de dimension finie, alors f est surjective ssi $\operatorname{rg}(f) = \dim(F)$ et f est injective ssi $\operatorname{rg}(f) = \dim(E)$.

Proposition n° 17 : inversible à droite ou à gauche implique inversible pour un endomorphisme

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ où E est un EV de dimension finie.

- S'il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$ alors f est un automorphisme et $f^{-1} = g$.
- S'il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ alors f est un automorphisme et $f^{-1} = g$.

4 Équations linéaires, formes linéaires et hyperplan

Définition d'une équation linéaire

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $b \in F$, on appelle équation linéaire l'équation $u(x) = b$ d'inconnue $x \in E$.

Proposition n° 18 : structure des solutions des équations linéaires

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $b \in F$.

1. Si $b \notin \mathrm{Im}(u)$, alors l'ensemble des solutions de l'équation $u(x) = b$ est l'ensemble vide.
2. Si $b \in \mathrm{Im}(u)$, il existe $x_0 \in E$ tel que $b = u(x_0)$ et l'ensemble des solutions de $u(x) = b$ est $x_0 + \mathrm{Ker}(u)$.

Exemples : retour sur quelques équations linéaires

1. Système linéaire.
2. Équation différentielle linéaire d'ordre 1
3. Équation différentielle linéaire d'ordre 2
4. Suite arithmético-géométrique

Proposition n° 19 : caractérisation des hyperplans

Soit H un sous-espace vectoriel de E un espace vectoriel de dimension finie. Sont équivalents :

1. H est un hyperplan.
2. $H \neq E$ et pour tout $x_0 \in E \backslash H$, $E = \mathrm{vect}(x_0) \oplus H$.
3. Il existe $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ telle que $H = \mathrm{Ker}\, \varphi$ et φ est une forme linéaire **non nulle**.

Proposition n° 20 : équation d'un hyperplan de $\mathbb{K}^n$

Si $H \subset \mathbb{K}^n$, H est un hyperplan ssi il existe $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n \backslash \{0_{\mathbb{K}^n}\}$, $H = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0 \right\}$