Exemples d'applications linéaires

Exercice 1 ($\star$ YT)**.** Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

1. $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P(X) \longmapsto P(X)+1 \end{cases}$
2. $g\colon \begin{cases} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \longmapsto M^2 \end{cases}$
3. $h\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \longmapsto (x,xy) \end{cases}$

Exercice 2 ($\star$ Cou, Cal ©)**.** On considère dans $\mathbb{R}^2$ les trois vecteurs $u=(1,1)$, $v=(2,-1)$ et $w=(1,4)$.

1. Démontrer que (u,v) est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Pour quelle(s) valeur(s) du réel a existe-t-il une application linéaire $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ telle que $f(u)=(2,1)$, $f(v)=(1,-1)$ et $f(w)=(5,a)$?

Exercice 3 ($\star$ Cal ©)**.** Soit $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \longmapsto (x+2y, x-y) \end{cases}$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit (e_1,e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $(f(e_1),f(e_2))$ est libre.
3. Montrer que $(f(e_1),f(e_2))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 4 ($\star$ Cal ©)**.** Soient $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $f_d\colon \begin{cases} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M \longmapsto AM \end{cases}$ et $f_g\colon \begin{cases} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M \longmapsto MA \end{cases}$

1. Montrer que f_d et f_g sont des endomorphismes de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f_d)$ et $\mathrm{Ker}(f_g)$.
3. Déterminer $\mathrm{Im}(f_d)$ et $\mathrm{Im}(f_g)$.

Exercice 5 ($\star$ Rai ©)**.** Soit $\Phi\colon \begin{cases} \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f \longmapsto f''-2f'+f \end{cases}$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. Déterminer son noyau.

Exercice 6 ($\star$ Cou, YT)**.** Montrer qu'il existe une unique application linéaire $f\colon\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$ telle que $f(1,0,0)=(0,1)$, $f(1,1,0)=(1,0)$ et $f(1,1,1)=(1,1)$. Déterminer $f(x,y,z)$, $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 7 (𝄞$\star\star$ Rai ©)**.** Soit $\Delta\colon \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \longmapsto P(X+1)-P(X) \end{cases}$.

1. Montrer que Δ est un endomorphisme.
2. Trouver $\mathrm{Ker}(\Delta)$
3. Trouver $\mathrm{Im}(\Delta)$
4. Est-ce que $\mathrm{Ker}(\Delta)$ et $\mathrm{Im}(\Delta)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_n[X]$?

Exercice 8 ($\star$ Cal)**.** Soit $f\colon (x,y)\mapsto(x+y,x-y)$, montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et déterminer f^{-1}.

Exercice 9 ($\star$ Cou, Cal, Rai ©)**.** Soit p l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui a tout vecteur $u=(x,y,z)$ associe le vecteur $p(u)=(2x+y+2z, y, -x-y-z)$. Soit (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que p est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer $p(e_1)$, $p(e_2)$ et $p(e_3)$.
3. Calculer $p^2(e_1)$, $p^2(e_2)$ et $p^3(e_3)$, que peut-on en déduire sur p ?
4. Que vaut $\mathrm{rg}(p)$?

Exercice 10 ($\star\star$ Rai)**.** Soit $E=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, posons

$$\Psi\colon \begin{cases} E \longrightarrow E \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{cases} \quad \text{et} \quad \Phi\colon \begin{cases} E \longrightarrow E \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (0,u_0,u_1,u_2,\ldots) \end{cases}$$

1. Montrer que Φ et Ψ sont des endomorphismes de E suivants (appelés les tapis roulants).
2. Vérifier que $\Psi\circ\Phi=\mathrm{Id}_E$, alors que $\Phi\circ\Psi\neq\mathrm{Id}_E$.
3. Ψ est-elle injective ? surjective ? même question pour Φ.

Exercice 11 ($\star$ Cal ©)**.** Soit $F=\mathrm{vect}((1,1,2),(1,1,3))$ et $G=\mathrm{vect}((1,0,0))$, montrer que $\mathbb{R}^3=F\oplus G$ puis donner la projection de F parallèlement à G puis la symétrie de F parallèlement à G.

Exercice 12 ($\star$ Rai, YT)**.** Soit $(a_0,a_1,\ldots,a_n)$ des réels deux à deux distincts. Montrer que $\Phi\colon \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P \longmapsto (P(a_0),P(a_1),\ldots,P(a_n)) \end{cases}$ est un isomorphisme.
$\star\star$ Retrouver l'isomorphisme réciproque.

Exercice 13 ($\star$ Rai)**.** Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ des réels deux à deux distincts. Montrer que
$$\Phi\colon \begin{cases} \mathbb{R}_{2n-1}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ \quad P \quad \longmapsto (P(a_1), P'(a_1), P(a_2), P'(a_2), \ldots, P(a_n), P'(a_n)) \end{cases}$$
est un isomorphisme.

Exercice 14 ($\star$ Rai YT)**.** Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On définit u l'application de E par $u(P) = P + (1 - X)P'$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(u)$.
3. Que vaut $\mathrm{rg}(u)$?
4. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(u)$.
5. Montrer que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 15 ($\star\star\star$ Mod, Rec, Rai)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ il existe un unique $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P = \sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}$.

Résultats théoriques

Exercice 16 ($\star$ Rai ©)**.** Soient E,F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soient $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$. Démontrer que $g \circ f = 0 \iff \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.

Exercice 17 ($\star$ Rai ©)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$, montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe.

Exercice 18 (𝄞$\star\star$ Rai ©)**.** Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

1. Démontrer que pour tout $x \in E$ non nul, il existe un unique scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$
2. Comparer λ_x et λ_y lorsque (x, y) est liée.
3. Comparer λ_x et λ_y lorsque (x, y) est libre (on pourra considérer $x+y$).
4. En déduire que f est une homothétie.
5. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 19 (𝄞$\star\star\star$)**.** Soit E un espace vectoriel de dimension finie, on prend f dans le centre de $\mathscr{L}(E)$, c'est-à-dire que $f \in \mathscr{L}(E)$ commute avec tous les endomorphismes de E. On suppose que f n'est pas une homothétie, à l'aide de l'exercice 18, trouver une contradiction. Conclure

Endomorphismes particuliers

Exercice 20 ($\star\star$ Rai ©)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p et q deux projecteurs qui commutent. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur. Trouver F et G sous-espaces vectoriels de E tel que $p \circ q$ est la projection sur F parallèlement à G.

Exercice 21 (𝄞$\star\star$ Rai ©)**.** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que $f^r = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et que $f^{r-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ (on dit que f est nilpotente d'indice r) : il existe $x \in E$ tel que $f^{r-1}(x) \neq 0$.

1. Montrer que $(x, f(x), \ldots, f^{r-1}(x))$ est une famille libre de E.
2. Comparer r et n.
3. Calculer f^n

Exercice 22 ($\star\star$ Rai, YT)**.** Soit $B \in \mathbb{R}[X] \backslash \{0\}$, pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $f(P)$ le reste de la division euclidienne de P par B. Montrer que f est un projecteur. Sur quel SEV f projette et parallèlement à quel autre SEV ?

Exercice 23 ($\star$ Rai, Cou)**.** On note $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, pour $f \in E$, on note $g\colon x \mapsto f(-x)$, puis on note $s\colon f \mapsto g$

1. Montrer que s est une symétrie.
2. s est donc une symétrie par rapport à F parallèlement à G, pour F et G deux SEV qui sont supplémentaires. Déterminer F et G.
3. Quel est la projection de exp sur F ?

Exercice 24 ($\star\star\star$ Mod, Rec)**.** Soient $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ des réels. On note F l'ensemble f des fonctions continues sur $[\, a_1 \,; a_n \,]$ telles que f soit affine sur $[\, a_i \,; a_{i+1} \,]$ pour tout $i \in [\![\, 1 \,; n-1 \,]\!]$. Montrer que F est de dimension finie et que $\dim(F) = n$.

Noyau, image, rang

Exercice 25 ($\star$ Cou)**.** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ et que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 26 (⋆⋆ Rai ©)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $(f,g) \in \mathscr{L}(E)^2$, montrer que $\text{rg}(f+g) \leqslant \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$ puis que $|\text{rg}(f) - \text{rg}(g)| \leqslant \text{rg}(f-g)$.

Exercice 27 (⋆⋆ Cou, Rai, Rec ©)**.** Soient E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimensions finies, appliquer le théorème du rang à $\begin{cases} F \times G \longrightarrow F+G \\ (f,g) \longmapsto f+g \end{cases}$. Quel résultat du cours venez-vous de démontrer ?

Exercice 28 (𝄞⋆⋆ Rai ©)**.** Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, E étant un espace vectoriel de dimension $2n$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. $u^2 = 0$ et $n = \text{rg}(u)$
2. $\text{Im}(u) = \text{Ker}(u)$.

Exercice 29 (⋆⋆ Rai, Cou)**.** Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ où E est un EV de dimension finie et F un SEV de E. Montrer que $\dim(u(F)) = \dim(F) - \dim(F \bigcap \text{Ker}(u))$.

Exercice 30 (⋆⋆ Rai, Rec ©)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-EV, $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que $f^2 - 5f + 6\text{Id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. Montrer que $E = \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E) \bigoplus \text{Ker}(f - 3\text{Id}_E)$.
2. Écrire f comme une combinaison linéaire de deux projecteurs.
3. En déduire que f est un isomorphisme et trouver son isomorphisme réciproque.

Exercice 31 (⋆ Cou)**.** Si $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) \longmapsto (x-y+z, t-y, x+z-t) \end{cases}$, déterminer $\text{rg}(f)$.

Exercice 32 (⋆⋆ Rec, Rai)**.** Trouver un isomorphisme entre $S_n(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices symétriques carrées de tailles n) et $\mathbb{R}^N$ pour un certain entier N, en déduire $\dim(S_n(\mathbb{R}))$

Formes linéaires, hyperplan, et trace d'une matrice

Exercice 33 (⋆ Cal)**.** Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on définit la trace de la matrice A par $\text{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$, montrer que tr est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ pour tout $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$.

Dans les exercices qui suivent, on pourra utiliser librement les notations et les résultats de l'exercice 33.

Exercice 34 (⋆ Cal)**.** Soit $F = \text{vect}((1,1,1),(1,2,0))$, écrire F comme le noyau d'une forme linéaire non nul.

Exercice 35 (⋆ Cou ©)**.** Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle est un hyperplan en trouver un supplémentaire.

Exercice 36 (⋆ Cal)**.** Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ montrer que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Exercice 37 (𝄞⋆⋆ Rai, Rec)**.** Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, pour $A \in E$, on définit $\varphi_A\colon M \in E \mapsto \text{tr}(AM)$.

1. Montrer que $\varphi_A \in E^\star$.
2. Montrer que $A \in E \mapsto \varphi_A \in E^\star$ est linéaire et injective.
3. Soit $\psi : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ une application linéaire, qu'en déduit-on ?

Exercice 38 (⋆ ⋆ ⋆ Rec ©)**.** Soit $\varphi \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^\star$ telle que pour tous A, $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(AB) = \varphi(BA)$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \alpha\text{tr}$.

Exercice 39 (⋆⋆ Rai, Rec)**.** Soit E un espace vectoriel de dimension finie et H un hyperplan, ψ et φ deux formes linéaires telles que $H = \text{Ker}(\psi) = \text{Ker}(\varphi)$. Montrer que ψ et φ sont proportionnelles.

Sujet type concours

Exercice 40 ($\star\star$ Rai, Rec)**.** On note

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

1. Montrer que F est un espace vectoriel de dimension finie.
2. On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calculer A^2 et A^3
3. Trouver une base de F ainsi que $\dim(F)$.
4. On note f l'application qui à $M \in F$ associe AM. Montrer que f est un endomorphisme de F.
5. Calculer f^3.
6. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
7. f est-elle bijective ? injective ? surjective ?
8. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
9. Résoudre l'équation $f(M) = I_3 + A^2$ d'inconnue $M \in F$.
10. Résoudre l'équation $f(M) = A + A^2$ d'inconnue $M \in F$.
11. $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont-ils supplémentaires dans F ?
12. Si oui donner la projection sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$.

Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on définit $\mathrm{Ker}(M) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ MX = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$, comme le noyau $X \mapsto MX \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$

13. Trouver une base de $\mathrm{Ker}(A)$, de $\mathrm{Ker}(A - \sqrt{2}I_3)$ et sde $\mathrm{Ker}(A + \sqrt{2}I_3)$
14. En posant P la matrice dont les colonnes sont exactement constitués des vecteurs appartenant aux bases de $\mathrm{Ker}(A)$, $\mathrm{Ker}(A - \sqrt{2}I_3)$ et $\mathrm{Ker}(A + \sqrt{2}I_3)$. Montrer que P est inversible et calculer $P^{-1}AP$.