Calculs de déterminants

Exercice 1 (⋆ Cal ©)**.** Calculer les déterminants suivants sous forme factorisées

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & j & 1 \end{vmatrix} \quad \text{avec } j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{3}}$$

Exercice 2 (⋆⋆ Cal ©)**.** Soit $P\colon x \mapsto \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+7 \end{vmatrix}$, calculer P sous forme factorisée.

Exercice 3 (Cal, Rai, Com ⋆⋆)**.** Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & & (0) \\ x & 1+x^2 & x & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & x & 1+x^2 & x \\ (0) & & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_n$$

Exercice 4 (⋆⋆ Cal, Rai, Com)**.** Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$:

$$D_n = \begin{vmatrix} 2\cos(\theta) & 1 & & (0) \\ 1 & 2\cos(\theta) & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2\cos(\theta) \end{vmatrix}_n$$

Exercice 5 (⋆ Cal, Rai YT)**.** Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, et f_M l'application canonique associé à M.

1. Calculer $\chi_M\colon x \mapsto \det(xI_3 - M)$.
2. Pour chaque λ racine de χ_M, trouver une base de $\operatorname{Ker}(M - \lambda I_3)$.
3. En calculant un déterminant, montrer que la réunion des bases obtenues forme une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
4. Montrer qu'il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $M = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
5. En déduire une expression de M^p et M^{-1} pour $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 (⋆⋆ Cal)**.** Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, montrer que $\det(M_n) = (a^2 - b^2)^n$ avec

$$M_n = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & & & \iddots & 0 \\ \vdots & & a & b & & \vdots \\ \vdots & & b & a & & \vdots \\ 0 & \iddots & & & \ddots & 0 \\ b & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{pmatrix}_{2n} = \left(\begin{array}{c|c} aI_n & bK_n \\ \hline bK_n & aI_n \end{array}\right) \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$$

Où K_n est la matrice qui contient que des 0 sauf sur la seconde diagonale qui contient des 1.

Exercice 7 (𝄞⋆⋆)**.** On pose $D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & \dots & 0 \\ c & a & b & \ddots & (0) & \vdots \\ 0 & c & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b & 0 \\ \vdots & (0) & \ddots & c & a & b \\ 0 & \dots & \dots & 0 & c & a \end{vmatrix}_n$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, trouver une relation entre D_{n+2}, D_{n+1} et D_n. En déduire la valeur de D_n lorsque $a = 2$, $b = 3$ et $c = -1$.

Exercice 8 (⋆⋆ Cal)**.** Soit $(u_n)_n$ une suite, on pose, pour $n \geqslant 3$, $M_n = (u_{i+j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$. Calculer $\det(M_n)$, lorsque $(u_n)_n$ est géométrique, arithmétique, ou une suite récurrente linéaire double.

Exercice 9 (⋆⋆ Cal ©)**.** Soit $A_n = (\min(i,j))_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\det(A_n)$.

Exercice 10 ($\star$ Cal)**.** Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ la matrice est-elle inversible ?

$$M = \begin{pmatrix} 1 & m & -1 & m \\ -1 & 1 & -m & -m \\ m & 1 & 1 & m \\ m & -1 & 1 & -m \end{pmatrix}$$

Exercice 11 ($\star\star$ Cal YT)**.** Soit $J \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note $P(x) = \det(A + xJ)$ avec $x \in \mathbb{R}$. Montrer que P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1.
2. On pose $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $a_{i,i} = c$, $a_{i,j} = b$ si $j > i$ et $a_{i,j} = a$ si $i < j$. Calculer $P(-a)$ et $P(-b)$
3. En déduire $\det(A)$ (dans le cas où $a \neq b$).

Exercice 12 ($\star\star$ Cal)**.** Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose $M = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x^3 & 1 & x & x^2 \\ x^2 & x^3 & 1 & x \\ x & x^2 & x^3 & 1 \end{pmatrix}$. On note (C_1, C_2, C_3, C_4) les colonnes de M.

1. Exprimer $\det(C_1 + C_3, C_2, C_3 - C_1, C_4)$ en fonction de $\det(M)$.
2. En déduire $\det(M)$.

Calculs théoriques de déterminants

Exercice 13 (𝄞$\star\star$ Rai, Cal ©)**.** Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, on définit le déterminant de Vandermonde par :

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & {a_2}^2 & \cdots & {a_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & {a_{n-1}}^2 & \cdots & {a_{n-1}}^{n-1} \\ 1 & a_n & {a_n}^2 & \cdots & {a_n}^{n-1} \end{vmatrix}$$

1. Que vaut $V(a_1, \ldots, a_n)$ s'il existe $i \neq j$ tel que $a_i = a_j$?

On suppose maintenant les $(a_i)_i$ deux à deux distincts.

2. Montrer que $f : x \mapsto V(a_1, \ldots, a_{n-1}, x)$ est une fonction polynomiale.
3. Trouver les racines de f ainsi que son coefficient dominant.
4. Conclure.

Exercice 14 (𝄞$\star$ Cal ©)**.** On reprend les notations de l'exercice précédent. En effectuant des opérations sur les colonnes, calculer $V(a_1, a_2, \ldots, a_n)$: on fera apparaître un maximum de zéros avant de développement sur une ligne ou une colonne.

Exercice 15 ($\star$ Cal)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère $A = (i^j)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\det(A)$

Exercice 16 ($\star$ ©)**.**

1. Soit $M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si n est impair alors $\det(M) = 0$.
2. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = -I_n$. Montrer que n est pair et donner les valeurs possibles de $\det(M)$.
3. Soit $(M, N) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $MN + NM = 0_n$ montrer que n est pair.
4. Que vaut le déterminant d'une matrice nilpotente ?

Exercice 17 ($\star\star$ Mod)**.** Montrer que les points de $\mathbb{R}^2$ (x_1, y_1), (x_2, y_2), et (x_3, y_3) sont alignés si et seulement si

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

Donner une CNS similaire pour que quatre points de $\mathbb{R}^3$ soient coplanaires.

Exercice 18 ($\star\star$ Rec)**.** Soit $M = (M_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\overline{M} = (\overline{M})_{i,j} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Démontrer que $\det(\overline{M}) = \overline{\det(M)}$
2. Soient $(M, N) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$ telles que $MN = NM$, montrer que $\det(M^2 + N^2) \geqslant 0$.

Exercice 19 ($\star\star$ Cal ©)**.** Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ avec $p < n$, calculer $\det(AB)$.

Exercice 20 ($\star\star$ Rai)**.**

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ (une matrice dont tous les coefficients sont entiers). Démontrer que $\det(A) \in \mathbb{Z}$.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ une matrice dont tous les coefficients valent 1 ou -1. Démontrer que 2^{n-1} divise $\det(A)$.

Déterminant d'endomorphismes ou de familles

Exercice 21 ($\star$ Cal)**.** Soit $f\colon P \mapsto (X+1)P' - P$.

1. Montrer que f définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Calculer $\det(f)$.
3. Est-ce que f est un automorphisme ?

Exercice 22 ($\star\star$ Cal, Rai)**.** Soit $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ des nombres deux à deux distincts. On considère $\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ \quad P \quad \longmapsto (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)) \end{cases}$.

1. Calculer le déterminant de la matrice de φ dans les bases canoniques.
2. En déduire que pour tout $(b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $i \in [\![0\,; n]\!]$, $P(a_i) = b_i$.

Exercice 23 ($\star\star$ Cal YT)**.** Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

1. Calculer $\det(A)$
2. On pose $u_1 = (1,1,0,0)$, $u_2 = (0,1,1,0)$, $u_3 = (0,0,1,1)$ et $u_4 = (-1,0,0,1)$, à l'aide d'un déterminant, montrer que $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
3. Déterminer $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$.
4. Calculer à nouveau $\det(A)$, est-ce cohérent avec la question 1 ?

Exercice 24 ($\star\star$ Cal)**.** Calculer le déterminant de $M \longmapsto M^T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 25 ($\star\star$ Cal, Rai)**.** Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Que vaut $\det(f_A)$? Montrer que $g\colon M \mapsto AM$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et montrer que $\det(g) = \det(A)^2$.

Exercice 26 ($\star$ Cal ©)**.** Montrer que $(X^2, X(X-1), (X-1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 27 ($\star$ Cal ©)**.** On pose $e_1 = (1, \cos(a), \cos^2(a))$, $e_2 = (1, \cos(b), \cos^2(b))$, $e_3 = (1, \cos(c), \cos^2(c))$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que (e_1, e_2, e_3) soit une base de $\mathbb{R}^3$.