Matrices d'une application linéaire

Exercice 1 ($\star$ Cal ©)**.** Dans les bases canoniques respectives, donner les matrices des applications linéaires suivantes :

1. $\begin{cases} \mathbb{C}_4[X] \longrightarrow \mathbb{C}_3[X] \\ \quad P \quad \longmapsto P' \end{cases}$
2. $\begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad P \quad \longmapsto \displaystyle\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x \end{cases}$
3. $\begin{cases} \quad \mathbb{R}^3 \quad \longrightarrow \mathbb{R}_4[X] \\ (x,y,z) \longmapsto xX^4 + (y+z)X + z \end{cases}$
4. $\begin{cases} \mathbb{R}_4[X] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \quad P \quad \longmapsto (P(0), P''(2) - P'(4)) \end{cases}$
5. $\begin{cases} \quad \mathbb{C}^3 \quad \longrightarrow \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{C}) \\ (x,y,z) \longmapsto \begin{pmatrix} x & y-8x \\ 2y+z & x \\ x+y & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

Exercice 2 ($\star$ Cal ©)**.** Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $h \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est A.

1. Exprimer $h(x,y,z)$ pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
2. Sans calcul matriciel, calculer $h^2(e_i)$ pour $i \in \{1,2,3\}$.
3. Sans calcul matriciel, calculer $h^3(e_i)$ pour $i \in \{1,2,3\}$.
4. Que peut-on en déduire sur h^3 ?
5. À l'aide d'un produit matriciel, calculer h^3.

Exercice 3 ($\star$ Cal, YT)**.** Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est A. Soit $f_1 = e_1 - e_2 - e_3$, $f_2 = -e_1 + e_2 + 2e_3$ et $f_3 = e_1 - e_3$.

1. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de u dans cette base.
3. En déduire les puissances successives de A.

Exercice 4 ($\star\star$ CCP-PSI 2016 YT)**.** Soit $(\alpha, \beta) \in [\,0\,;1\,]^2$ tel que $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$. On note

$$A(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(A(\alpha,\beta) - I_2)$ et en déterminer une base.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $Q(x) = \det(A(\alpha,\beta) - xI_2)$. Montrer que Q est une fonction polynomiale, déterminer ses racines.
3. Déterminer une matrice P telle que

$$A(\alpha,\beta) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha-\beta \end{pmatrix} P^{-1}$$

4. En déduire les puissances successives de $A(\alpha,\beta)$. Que pouvez-vous dire de la suite $(A(\alpha,\beta)^n)_{n\geqslant 0}$?

Exercice 5 ($\star$ Cal ©)**.**
1. Démontrer que $D = \mathrm{vect}((1,1,1))$ et $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$
2. Donner la matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection sur P parallèlement à D.
3. Donner la matrice M' dans une base adaptée à $P \oplus D$.
4. Donner une relation entre M et M'.

Exercice 6 ($\star\star$ Cal ©)**.** Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On pose $f_k \colon x \mapsto \mathrm{e}^{kx}$.

1. Que vaut $\dim(F)$ avec $F = \mathrm{vect}(f_1, f_2, f_3)$?
2. Soit $\varphi \colon f \mapsto f'' + f' + 2f$, montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(F)$.
3. Donner la matrice de φ dans la base (f_1, f_2, f_3).
4. Montrer que φ est bijective et donner la matrice de φ^{-1} dans F.
5. Trouver une solution de l'équation différentielle $f''(x) + f'(x) + 2f(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{3x}$.

Exercice 7 ($\star$ Cal ©)**.** Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, on pose $\mathscr{B}' = ((0,0,0,1), (0,0,1,1), (0,1,1,1), (1,1,1,1))$ et $x = (1,2,3,4)$. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^4$. En utilisant une formule de changement de base donner $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$.

Exercice 8 ($\star\star$ Cou ©)**.** On note $f \colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x-3y \\ x+y \\ 5x-y \end{pmatrix} \end{cases}$, $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Vérifier que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ et donner $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$.
2. Montrer que $\mathscr{B}' = ((1,1),(2,3))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et donner $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$

3. Vérifier que $\mathscr{C}' = ((1,0,1),(1,-1,1),(2,1,-2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner $Q = P_{\mathscr{C}\to\mathscr{C}'}$
4. En utilisant la formule de changement de base, calculer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$.
5. Sans utiliser la formule de changement de base, calculer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$.
6. Donner également $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}'}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}}(f)$

Exercice 9 (𝄞★★ Rec, Rai ©)**.** Soit $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ de rang r, le but est de montrer que $A = QJ_rP^{-1}$ où $J_r = \sum_{k=1}^{r} E_{k,k} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et P et Q deux matrices inversibles.

1. Soit $\mathscr{B}$ base de E ($\dim(E) = n$) et $\mathscr{C}$ base de F ($\dim(F) = p$). Justifier qu'il existe $f \in \mathscr{L}(E,F)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = A$.
2. Soit S un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$, considérer $\mathscr{B}'$ une base de E adaptée à $S \oplus \mathrm{Ker}(f)$. Comment prendre $\mathscr{C}'$ base de F telle que $J_r = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$?
3. Conclure.
4. En déduire que $\mathrm{rg}(A^T) = \mathrm{rg}(A)$.

Exercice 10 (★★ Rec, Cal)**.** Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est
$$F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer de quel type d'endomorphismes particuliers est f ?
2. Déterminer des sous-espaces vectoriels qui caractérisent f.
3. Donner une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est plus simple.
4. Faire le lien entre les deux matrices de f.

Exercice 11 (★ Cou, YT)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé.

1. Donner l'expression de $u(x,y,z)$
2. Trouver une base de $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$, de $\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E)$ puis de $\mathrm{Ker}(u + 4\mathrm{Id}_E)$.
3. Montrer que la réunion de ces bases est une base de E.
4. Trouver D la matrice de u dans cette base.
5. Quel est le lien entre A et D ?
6. Calculer A^n où $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 12 (★★ Rec)**.** Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice non nulle telle que $M^2 = 0_2$. Montrer que M est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 13 (★★★ Rec)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 100 & 27 \\ -363 & -98 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.
2. En déduire une valeur explicite de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14 (★★ Rai, Rec)**.** Soit E un espace vectoriel de dimension 4 et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que f est un automorphisme de E.
2. Soit $x \in E$ non nul, montrer que $(x, f(x))$ est une famille libre.
3. Soit $e_1 \in E$ non nul. Montrer que $F = \mathrm{vect}(e_1, f(e_1))$ est stable par f (i.e. $f(F) \subset F$).
4. Soit $e_2 \in E \backslash F$. Montrer que $(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ est une base de E.
5. En déduire que toute matrice $A \in \mathscr{M}_4(\mathbb{K})$ telle que $A^2 = -I_4$ est semblable à
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rang, noyau et image

Exercice 15 (★ Cal ©)**.** Soit $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à C. Déterminer $\mathrm{rg}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 16 (★ Cal)**.** Soit $e_1 = (1,1,1,4)$, $e_2 = (2,-1,0,1)$, $e_3 = (2,0,1,4)$, $e_4 = (2,2,3,-2)$ et $e_5 = (2,2,3,-2)$, déterminer le rang de $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$.

Exercice 17 ($\star$ Rai, Cal)**.** Considérons $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A - \lambda I_2$ ne soit pas inversible.
2. Pour chaque λ déterminé à la question précédente, trouver une base de $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_2)$.
3. Notons $\mathscr{B}'$ la concaténation de ces bases. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2 = \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{K})$.
4. Donner la matrice de l'endomorphisme canoniquement associée à A dans la base $\mathscr{B}'$.
5. En déduire que A est semblable à une matrice diagonale.
6. En déduire un calcul explicite de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 18 (𝄞$\star\star$ Rai ©)**.** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |A_{i,j}| < |A_{i,i}|$. Montrer que $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ puis que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 19 ($\star$ Cal ©)**.** Soit $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \quad P \quad \longmapsto (P(1), P(2), P(3)) \end{cases}$. Donner la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}^3$. Que vaut $\mathrm{rg}(f)$?

Exercice 20 ($\star\star$ Rai)**.** On pose, pour $P \in E = \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P) = P(X+1)$.

1. Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et trouver φ^{-1}.
2. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ trouver $A_n = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$.
3. Pour $n = 3$, calculer ${A_3}^{-1}$ et ${A_3}^5$.

Exercice 21 ($\star\star$ Cou ©)**.** Soit $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Pour $X \in E$, on pose $f(X) = AX$. Montrer que $f \in \mathscr{L}(E)$.
2. Expliciter la matrice de f dans la base canonique de E.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 22 (𝄞$\star\star$ Rai, Rec ©)**.** Soit $M \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{rg}(M) = 1$.

1. Montrer qu'il existe $C \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telles que $M = CL$.
2. Si $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{q,n}(\mathbb{R})$ sont non nulles avec $q \neq 1$ est-ce que AB est non nulle ?
3. Soient $C \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ non nulles, prouver que CL est de rang 1.

Ainsi, les matrices de rang 1 de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ sont exactement les matrices CL où $C \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.

Exercice 23 ($\star$ Cal)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, trouver le rang de A.

Exercice 24 ($\star\star$ Rai ©)**.** Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que $AB = A + B$. Montrer que A et B commutent

Divers

Exercice 25 (𝄞$\star$ Cal ©)**.** Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle trace de A la somme des coefficients diagonaux de A : $\mathrm{tr}(A) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,k}$.

1. Déterminer la trace de I_n.
2. Montrer que tr est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Déterminer une base de son image puis de son noyau.
4. 𝄞𝄞Montrer que pour tout $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
5. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que toutes les matrices de u ont la même trace, on note $\mathrm{tr}(u)$ cette valeur.
6. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Exprimer le polynôme $P = \det(XI_2 - A)$ en fonction de $\mathrm{tr}(A)$ et de $\det(A)$.
7. 𝄞Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ une projection que vaut $\mathrm{tr}(p)$?
8. Est-ce que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$ pour tout $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?
9. Soit $G = \mathrm{vect}(I_n)$, montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) \oplus G$. Donner l'expression de la projection sur $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$ parallèlement à G.

Exercice 26 ($\star\star$ Cou, Cal, Rai © (CCP PC 2019))**.** Soit l'application ϕ définie, par pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\phi(P) = XP'' + (1 - X)P'$

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Donner A, la matrice de ϕ dans la base $(1, X, \cdots, X^n)$.
3. Que vaut le rang de ϕ ?

On fixe un entier $k \in [\![0 ; n]\!]$.

4. Montrer que $\phi + k\mathrm{Id}_E$ est non injective. Que vaut $\dim(\ker(\phi + k\mathrm{Id}_E))$?
5. En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $\phi(P_k) = -kP_k$.
6. Justifier que P_k est de degré k.
7. Déterminer P_0 et P_1. Vérifier que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.
8. Montrer que $\mathscr{B}' = (P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
9. Donner, D, la matrice de ϕ dans la base $\mathscr{B}'$?
10. Donner une relation entre A et D ?

Exercice 27 (𝄞$\star\star\star\star$ Rec ©)**.** On note N l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont les termes diagonaux sont nuls et $H = \left\{AB - BA \mid (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2\right\}$.

1. Montrer que $H \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$.
2. Soit $M \in \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$. En distinguant les cas suivant que M soit ou non une matrice scalaire, en utilisant l'exercice 18 du TD15 et en raisonnant par récurrence, démontrer que M est semblable à une matrice de N.
3. On pose $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice diagonale de diagonale est $(1, 2, \ldots, n)$. Montrer que $\phi\colon M \mapsto MD - DM$ est un automorphisme de N.
4. Démontrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) = H$.

Exercice 28 ($\star\star\star$ Rec, Rai ©)**.** Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p, montrer qu'il existe $H_1,\ H_2, \ldots, H_{n-p}$ des hyperplans de E tels que $F = \cap_{i=1}^{n-p} H_i$.
2. Soit maintenant $H_1,\ H_2,\ \ldots, H_p$ des hyperplans de E, montrer que $\dim(\cap_{i=1}^{p} H_i) \geqslant n - p$.