Évènements

Exercice 1 ($\star$)**.** Une urne contient 4 boules rouges et 4 boules blanches. On tire deux boules au hasard, que l'on met dans un sac. Ensuite, on tire au hasard une de ces deux boules.

1. Quelle est la probabilité qu'elle soit blanche ?
2. Sachant qu'elle l'est, quelle est la probabilité que la boule encore dans le sac le soit aussi ?

Exercice 2 ($\star$)**.** On considère un mobile qui se déplace sur les sommets d'un triangle A, B, C. On suppose qu'à l'instant 0 le mobile se trouve en A. Ensuite les déplacements s'effectuent de la manière suivante : à l'instant n, le mobile se trouve à l'un des sommets. À l'instant $n+1$, il reste sur ce sommet avec une probabilité $1/5$, va sur l'un des deux sommets avec une probabilité de $2/5$ pour chacun des sommets. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'évènement A_n : «après n déplacements le mobile se trouve en A», de même pour B_n et C_n, on pose $a_n = \mathbb{P}(A_n)$, $b_n = \mathbb{P}(B_n)$ et $c_n = \mathbb{P}(C_n)$ et $X_n = (a_n, b_n, c_n)^\top$.

1. Déterminer X_0.
2. Déterminer $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_{n+1} = MX_n$. Que vaut $\det(M)$?
3. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer J^n pour $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire l'expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Quelles sont les limites des suites $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ et $(c_n)_n$?

Exercice 3 ($\star\star$)**.** On considère une classe de 42 élèves, on suppose qu'aucun n'est né un 29 février, quelle est la probabilité qu'au moins deux élèves aient leur anniversaire le même jour.

Exercice 4 ($\star\star$)**.** Une agente du lycée Lavoisier doit fermer une porte, elle a n clés dans un trousseau et une seule fonctionne. Elle essaie donc les clés au hasard. Quelle est la probabilité que la porte s'ouvre à la k-ième tentative.

Exercice 5 ($\star\star$)**.** Les mails envoyés au lycée sont dirigés aléatoirement vers la boîte aux lettres d'un(e) des trois secrétaires du lycée. Quelle est la probabilité que chaque secrétaire reçoive au moins un des n messages envoyés ?

Exercice 6 ($\star\star$)**.** Un mobile se déplace aléatoirement dans l'ensemble des sommets d'un triangle ABC de la façon suivante : si à l'instant n il est sur l'un quelconque des trois sommets, alors à l'instant $n+1$, soit il y reste avec une probabilité de $2/3$, soit il se place sur l'un des deux autres sommets, et ceci avec la même probabilité pour chacun de ces deux sommets. Initialement (c'est-à-dire à l'instant 0), le mobile se trouve en A. On définit, pour tout n de $\mathbb{N}$, les événements A_n (resp. B_n, C_n) : «le mobile se trouve en A (resp. en B, en C) à l'instant n» et les probabilités $a_n = \mathbb{P}(A_n)$, $b_n = \mathbb{P}(B_n)$ et $c_n = \mathbb{P}(C_n)$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $a_n + b_n + c_n$.
2. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
3. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - b_n) \quad \text{et} \quad a_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - c_n)$$
4. En déduire une expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Exercice 7 ($\star\star$)**.** Une urne contient 15 boules : une noire, 5 blanches et 9 rouges.

1. On tire simultanément et au hasard trois boules de cette urne. Calculer la probabilité des événements suivants :
   - A : «le tirage est tricolore»
   - B : «parmi les boules tirées figurent exactement une noire et au moins une rouge»
   - C : «les trois boules tirées sont de la même couleur.»
2. On suppose désormais que le tirage s'effectue successivement avec remise. Déterminer les probabilités des événements A, B et C définis ci-dessus.

Exercice 8 ($\star\star$)**.** Une puce se déplace sur les sommets d'un triangle ABC. Elle commence au sommet A à l'instant 0, et saute à chaque instant sur un sommet différent de celui où elle est, de façon équiprobable. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité de l'événement E_n : «la puce revient au sommet A pour la première fois à l'instant n».

Loi de variable aléatoire, espérance, variance

Exercice 9 ($\star$)**.** Si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathcal{U}([\![0\,;n]\!])$, avec X et Y indépendantes, déterminer $\mathbb{P}(X=Y)$.

Exercice 10 ($\star$)**.** Si $X \sim \mathscr{U}([\![1\,;10]\!])$, quelle est la loi de $Y = \lfloor \sqrt{X} \rfloor$ et que vaut $\mathbb{E}(Y)$?

Exercice 11 ($\star$ Mod, Cal ©)**.** Un service après-vente dispose d'équipes de dépannage qui interviennent auprès de la clientèle sur appel téléphonique. Les appels se produisent de façon indépendante, et la probabilité qu'un retard se produise dans le dépannage à la suite d'un appel est $p = 1/4$.

1. Un même client a appelé le service à 8 dates différentes. Soit X le nombre de retards que ce client a subi. Définir la loi de probabilité de X. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
2. On considère un ensemble de 8 clients différents. 2 d'entre eux sont mécontents parce qu'ils ont subi un retard. On contacte 4 clients parmi les 8. Soit M le nombre de clients mécontents parmi les 4 contactés. Expliciter la loi de M et calculer $\mathbb{E}(M)$.

Exercice 12 ($\star$ Rai, Mod ©)**.** Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules rouges. Un joueur tire successivement n boules avec remise. En tirant une boule rouge, il gagne 2 points, sinon il en perd 3. Soit X_n le nombre de boules rouges et Y_n le nombre de points obtenus. Déterminer la loi de X_n, $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$. Exprimer Y_n en fonction de X_n. En déduire la loi de Y_n, $\mathbb{E}(Y_n)$ et $\mathbb{V}(Y_n)$.

Exercice 13 ($\star$ Cai, Rai ©)**.** Une puce, initialement à 0, se déplace de $+1$ ou de $+2$ à chaque saut de façon équiprobable et de façon indépendante. Soit X_n la position occupée par la puce après n sauts et Y_n le nombre de fois où la puce a sauté d'une seule case au cours des n premiers sauts. Donner la loi de Y_n, $\mathbb{E}(Y_n)$ et $\mathbb{V}(Y_n)$. Exprimer X_n en fonction de Y_n et n. En déduire $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$ puis la loi de X_n.

Exercice 14 ($\star\star$ Cal ©)**.** Soit $X \sim \mathscr{B}(n,p)$. Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{1+X}\right)$.

Exercice 15 ($\oint\star\star$ ©)**.** Soit X une variable aléatoire tel que $X(\Omega) \subset [\![0\,;n]\!]$, montrer que $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k)$.

Exercice 16 ($\star\star$ Mod, Cal ©)**.** 1600 voyageurs se présentant en même temps à la gare de A pour aller à la gare B grâce à deux trains identiques. On suppose que chaque individu choisit au hasard l'un des deux trains et qu'il n'en changera pas. Combien faut-il de places assises dans chaque train pour qu'il y ait moins de 1% de chance que des voyageurs soient obligés de rester debout ?

Exercice 17 ($\star$ Rai ©)**.** Soit X une variable aléatoire, montrer que $\mathbb{E}(X)^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2)$.

Exercice 18 ($\star\star$)**.** On dispose de deux urnes U_1 et U_2, de six boules numérotées de 1 à 6 ainsi que d'un dé équilibré. Initialement, l'urne U_1 contient les boules numérotées 1 et 2, l'urne U_2 contient les boules numérotées $3, 4, 5$ et 6. On appelle échange l'expérience consistant à lancer une fois le dé et à changer d'urne la boule portant le numéro obtenu avec le dé. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans U_1 après n échanges successifs.

1. Les cinq premiers lancers du dé donnent : $1, 3, 2, 3, 5$. Quel est le contenu de U_1 à l'issue du cinquième échange ?
2. Quelle est la loi de X_1 ? Calculer $\mathbb{E}(X_1)$.
3. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [\![1\,;5]\!]$, on a :
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1}=0) &= \frac{1}{6}\mathbb{P}(X_n=1), \quad \mathbb{P}(X_{n+1}=6) = \frac{1}{6}\mathbb{P}(X_n=5) \\ \mathbb{P}(X_{n+1}=k) &= \frac{7-k}{6}\mathbb{P}(X_n=k-1) + \frac{k+1}{6}\mathbb{P}(X_n=k+1) \end{aligned}$$
5. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \dfrac{2}{3}\mathbb{E}(X_n) + 1$. Calculer alors $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de n, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

Indépendance, loi jointe

Exercice 19 ($\star$)**.** Soient $X \sim \mathscr{B}(p)$ et $Y \sim \mathscr{B}(q)$ avec $(p,q) \in]\,0\,;1\,[^2$ tel que X et Y sont indépendantes. On pose $Z = \min(X,Y)$. Calculer la loi de Z.

Exercice 20 ($\oint\star\star$)**.** Soient $p \in [\,0\,;1\,]$, $n \in \mathbb{N}^*$, $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathscr{B}(m,p)$ avec X et Y indépendantes. Calculer la loi de $X+Y$.

Exercice 21. On considère une urne contenant quatre boules rouges et trois boules noires. On pioche une à une sans remise les boules de l'urne. Pour tout entier $i \in [\![1 ; 3]\!]$. On note X_i le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la i-ième boule noire et $T = X_2 - X_1$

1. Donner la loi de X_1 ainsi que son espérance et sa variance.
2. Expliciter la loi conjointe de (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2.
3. Que représente T ? Donner son espérance.
4. Donner la loi conjointe de (T, X_1) puis la loi de T.
5. Donner la loi de X_3.

Exercice 22 ($\star\star$ ©)**.** Soit un entier $n \geqslant 3$. Une urne contient $n-2$ boules blanches et 2 boules noires. On tire toutes les boules une à une sans remise. Soient X (resp. Y) la VA égale au rang d'apparition de la première (resp. seconde) boule noire.

1. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Déterminer la loi jointe du couple (X, Y).
3. En déduire les lois marginales de X et Y ainsi que leurs espérances et variances.

Exercice 23. Une variable aléatoire X est elle indépendante avec elle-même ? (on traitera le cas X quasi certaine à part).

Exercice 24. Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges. On effectue des tirages sans remise de cette urne. On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche, Y le nombre de boules rouges restant à ce moment dans l'urne et Z le rang de sortie de la deuxième boule blanche.

1. Déterminer la loi de X, ainsi que $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
2. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.
3. Déterminer la loi de Z ainsi $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathbb{V}(Z)$.
4. Reprendre les questions précédentes dans le cas d'un tirage avec remise.

Exercice 25. Un joueur lance une pièce équilibrée autant de fois que nécessaire . On note X_N la variable aléatoire réelle discrète égale au nombre de fois où, au cours des N premiers lancers, deux résultats successifs ont été différents (X_N le «nombre de changements» au cours des N premiers lancers). Par exemple, si les 9 premiers lancers ont donné successivement : P , P, F, P, F, F, F, P, P alors la variable X_9 aura pris la valeur 4 (quatre changements, aux 3-ième 4-ième, 5-ième et 8-ième lancers).

1. Déterminer la loi de X_1, X_2, X_3, X_4.
2. Justifier que $X_N(\Omega) = [\![0 ; N-1]\!]$.
3. Montrer que $\mathbb{P}(X_N = 0) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{N-1}$ et $\mathbb{P}(X_N = 1) = 2(N-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{N}$.
4. (a) Justifier que pour tout $k \in [\![0 ; N-1]\!]$, $\mathbb{P}_{(X_N=k)}(X_{N+1} = k) = \dfrac{1}{2}$
   (b) En déduire que pour tout $k \in [\![0 ; N-1]\!]$
   $$\mathbb{P}((X_{N+1} - X_N = 0) \cap (X_N = k)) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_N = k)$$
   (c) En sommant cette relation pour $k \in [\![0 ; N-1]\!]$, montrer que $\mathbb{P}(X_{N+1} - X_N = 0) = \dfrac{1}{2}$.
   (d) Que représente la variable $X_{N+1} - X_N$? En déduire que $X_{N+1} - X_N \sim \mathscr{B}(1/2)$. En déduire $\mathbb{E}(X_{N+1}) = \dfrac{1}{2} + \mathbb{E}(X_N)$, puis donner $\mathbb{E}(X_N)$ en fonction de N.
5. (a) Montrer que les variables $X_{N+1} - X_N$ et X_N sont indépendantes.
   (b) En déduire par récurrence sur N que $X_N \sim \mathscr{B}(N-1, \dfrac{1}{2})$.

Exercice 26 ($\star\star$ Cal, Mod ©)**.** Un étudiant résout un QCM constitué de n questions avec quatre réponses possibles. Pour chaque question, et indépendamment les unes des autres, il a la probabilité p de savoir résoudre et donc d'avoir la bonne réponse. Si en revanche, il ne sait pas résoudre la question, il choisit arbitrairement l'une des quatre réponses possibles. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de questions qu'il savait résoudre et Y le nombre de questions qu'il a correctement résolues parmi celles où il a répondu au hasard. On note $Z = X + Y$ le nombre de questions correctes au total.

1. Reconnaître la loi de X.
2. Calculer $\mathbb{P}(Y = j | X = k)$.
3. Décrire l'évènement $(Z = i)$ en fonction des évènements $(Y = j) \cap (X = k)$.
4. En déduire la loi de Z.

5. En déduire la valeur de p minimal pour que $\mathbb{E}(Z) \geqslant \frac{n}{2}$ (*i.e.* il passe le test).

Exercice 27. On tire, avec remise, cinq boules d'une urne contenant dix boules numérotés de 1 à 10. On note X la variable aléatoire égale au maximum des cinq numéros obtenus et Y la variable aléatoire égale au minimum des cinq numéros obtenus.

1. Déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.
2. Calculer $\mathbb{P}(X \leqslant k)$ pour $k \in X(\Omega)$ et $\mathbb{P}(Y \geqslant k)$ pour $k \in Y(\Omega)$. En déduire les lois de X et Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 28. Un sac contient n billes numérotées de 1 à n. On tire une bille au hasard, on note son numéro et on la remet dans le sac. On appelle X la variable aléatoire qui prend pour valeur ce numéro. Lorsque ce numéro est k, on tire sans remise k billes que l'on distribue au hasard dans p boites $B_1, ..., B_p$. On désigne par Y_i la variable aléatoire égale au nombre de billes reçues par la boite B_i pour $i \in [\![1 ; p]\!]$.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y_i) pour $i \in [\![1 ; p]\!]$
2. En déduire pour $i \in [\![1 ; p]\!]$ la loi de Y_i ainsi que $\mathbb{E}(Y_i)$ et $\mathbb{V}(Y_i)$.
3. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $\frac{Y_i}{X}$.

Exercice 29 ($\star$)**.** Soit X une variable aléatoire. Trouver le minimum de $m \mapsto \mathbb{E}((X-m)^2)$.