Convergence de séries et calculs de sommes

Exercice 1 ($\star$ Cou, Cal ©)**.** Nature des séries de terme général :

a) $\sin(1/n) - \ln(1+1/n)$

b) $\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+n-1}$

c) e^{-n^2}

d) $\dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

e) $\sin(2\pi\sqrt{n^2+1})$

f) $\star\star$ $(n\sin(1/n))^{n^a}$

g) $\dfrac{1}{n\ln(n)}$

h) $\dfrac{\ln(n)^{2024}}{n}$

i) $\dfrac{n}{\ln(n)^{2024}}$

j) $\dfrac{\ln(n)^{2024}}{n^{1.5}}$

k) $\dfrac{1}{\ln(n)^{2024}n^{1/2}}$

l) $\arctan(n+2024) - \arctan(n)$

m) $\dfrac{\cos(n^4)}{n^3}$

n) $n^{2024}\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$

o) $\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$

p) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e}$

q) $\dfrac{\tan(1/n^2)}{-\ln(1-1/n)}$

Exercice 2 ($\star$ Cou, Cal)**.** Prouver la convergence et calculer la somme des séries suivantes avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $x \in]-1\,;1[$:

1. $\sum \frac{1-\mathrm{e}}{\mathrm{e}^n}$
2. $\sum \left(\frac{2}{n(n+1)} - \frac{5}{3^n}\right)$
3. $\sum x^n \sin(n\theta)$
4. $\sum \dfrac{9}{10^{n+1}}$
5. $\sum \dfrac{3^n}{n!}$
6. $\sum \dfrac{(-1)^n}{(n+2)!}$
7. $\sum \dfrac{n^2}{n!}$
8. $\sum nx^n$

Exercice 3 (𝄞$\star$ Rec, Cou, Cal)**.** Avec l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ converge de somme égale à $\cos(x)$.

Exercice 4 ($\star\star$ Rai ©)**.** Soit $(u_n)_n$ une suite réelle.

1. Si $(u_n)_n$ est positive et que $\sum u_n$ converge. Montrer que $\sum {u_n}^2$ converge.
2. Montrer que la réciproque est fausse.
3. Si $\sum u_n$ converge absolument, montrer que $\sum {u_n}^2$ converge.

Exercice 5 ($\star\star$ Rai, Rec)**.** Soient $(\alpha, \beta) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$, nature de $\sum \dfrac{\alpha^n}{\beta^n + n}$.

Exercice 6 ($\star\star$ Rai, Cal)**.** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$. Déterminer les couples (a,b) pour lesquels la série $\sum u_n$ converge et calculer la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Séries à termes positifs

Exercice 7 ($\star$ Rai ©)**.** Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs convergentes. Montrer que $\sum \sqrt{u_n v_n}$ converge.

Exercice 8 (𝄞$\star\star$ Rai, Rec ©)**.** Soit $(v_n)_n$ une suite de réels strictement positifs et $r > 0$.

1. Si pour tout $n \geqslant n_0$, $v_{n+1} \leqslant r v_n$ (resp. $\geqslant$), montrer que pour tout $n \geqslant n_0$, $v_n \leqslant r^{n-n_0} v_{n_0}$. (resp. $\geqslant$)

Soit $(u_n)_n$ une suite de complexes non nuls tel que $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.

2. Si $\ell < 1$, montrer que $\sum u_n$ converge.
3. Si $\ell > 1$, montrer que $\sum u_n$ diverge.
4. Montrer que si $\ell = 1$, on ne peut rien conclure.

Exercice 9 ($\star\star$ Rai, Rec)**.** Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

Exercice 10 (𝄞$\star\star$ Rec, Rai ©)**.** Soit $\sum u_n$ une série convergente, où $(u_n)_n$ est une suite positive décroissante. Montrer que $nu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Exercice 11 (𝄞$\star$ Cal, Rai)**.** On pose $u_n = \dfrac{n!}{(n/e)^n\sqrt{n}}$ et $v_n = \ln(u_n)$, montrer que la suite $(v_n)_n$ converge. En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que $n! \sim C\,(n/e)^n\sqrt{n}$.

Exercice 12 (𝄞$\star\star$ Rai ©)**.** Soient[1] $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ pour $n \geqslant 2$.

1. Si $\alpha > 1$, montrer la convergence de $\sum u_n$
2. Si $\alpha < 1$, montrer la divergence de $\sum u_n$.

1. Les séries de la forme $\sum u_n$, appelées *séries de Bertrand*, ne sont pas au programme. Par contre, il est **indispensable** de savoir étudier leur convergence.

3. Si $\alpha = 1$, étudier $\sum u_n$ avec une comparaison série-intégrale.

Exercice 13 ($\star\star$ Rai ©)**.** Soit $(u_n)_n$ une suite strictement positive, on suppose que $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.

1. Si $\ell < 1$, montrer que $\sum u_n$ est convergente.
2. Si $\ell > 1$, montrer que $\sum u_n$ est divergente.

Exercice 14 ($\star\star$ Rai ©)**.** Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ trois séries réelles.

1. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et que $\sum u_n$ et $\sum w_n$ convergent, montrer que $\sum v_n$ converge.
2. Redémontrer qu'une série réelle absolument convergente converge.

Exercice 15 ($\star$ Cal ©)**.** En admettant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Après avoir justifier que ces séries convergent, calculer :

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}$
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

Divers

Exercice 16 (𝄞$\star\star$ Cal, Rai ©)**.**

1. Quel est l'ensemble de définition de $\zeta\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$?
2. Montrer que ζ est strictement décroissante.
3. À l'aide d'une comparaison série intégrale, déterminer les limites de ζ en 1^+ et $+\infty$ ainsi qu'un équivalent de ζ en 1^+.

Exercice 17 ($\star\star$ Rai, Rec)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite telle que $u_1 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} u_n$.

1. Étudier la convergence de $(u_n)_n$
2. Posons $v_n = \ln(n^{\frac{1}{3}} u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, à l'aide d'une série, montrer que $(v_n)_n$ converge.
3. En déduire un équivalent de $(u_n)_n$
4. $\sum u_n$ converge ?

Exercice 18 ($\star\star$ Rai)**.** Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries avec $\sum v_n$ une série à termes strictement positifs.

1. Si $\sum v_n$ diverge, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $S'_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.
   (a) Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, montrer que $S_n = \mathcal{O}(S'_n)$
   (b) Si $u_n = o(v_n)$, montrer que $S_n = o(S'_n)$
   (c) Si $u_n \sim v_n$, montrer que $S_n \sim S'_n$
2. Si $\sum v_n$ converge, on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $R'_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.
   (a) Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, montrer que $R_n = \mathcal{O}(R'_n)$
   (b) Si $u_n = o(v_n)$, montrer que $R_n = o(R'_n)$
   (c) Si $u_n \sim v_n$, montrer que $R_n \sim R'_n$

Exercice 19 ($\star\star\star\star$ Rec)**.** Soit[2] $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection.

1. Soit $\sum u_n$ une série réelle à termes positifs convergente. Montrer que $\sum u_{\sigma(n)}$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
2. Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente, montrer que $\sum u_{\sigma(n)}$ converge absolument et que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
3. Soit $\sum u_n$ une série réelle convergente mais non absolument convergente comme $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ (dont on peut montrer que sa somme est $\ln(2)$).
   (a) Montrer que[3] $\sum {u_n}^+$ et $\sum {u_n}^-$ sont toutes les deux divergentes.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$, construire $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection telle que $x = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$.
   (c) Construire $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection telle que $\sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.
   On peut aussi construire σ telle que $\sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$.
4. Conclure que les séries c'est vachement bizarre quand même.

2. Sont autorisés à chercher cet exercice seulement ceux qui ont déjà fait au moins 9 exercices de ce TD.

3. Si $x \in \mathbb{R}$, $x^+ = \max(x, 0)$ et $x^- = -\min(0, x)$ sont les parties positives et négatives de x, $x = x^+ - x^-$ et $|x| = x^+ + x^-$.