Chapitre 22

Espaces Préhilbertiens réels

Le but de ce chapitre est d'étudier les produits scalaires dans des espaces vectoriels quelconques, contrairement à la physique ou à la SI où vous êtes habitués à utiliser un produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$ ou dans $\mathbb{R}^3$.

Table des matières

Dans tout ce chapitre E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.

1 Produit scalaire et norme associée

Définition d'un produit scalaire, d'un espace préhilbertien réel et d'un espace euclidien

On dit que $\varphi\colon E\times E \longrightarrow \mathbb{R}$ (on note souvent $\langle x,y\rangle = (x|y) = x\cdot y = \varphi(x,y)$) est un produit scalaire sur E si φ est

- **symétrique** si pour tout $(x,y)\in E^2$, $\varphi(x,y)=\varphi(y,x)$
- **bilinéaire** si pour tout $x\in E$, $y\longmapsto \varphi(x,y)$ est linéaire, pour tout $y\in E$, $x\longmapsto\varphi(x,y)$ est linéaire.
- **positive** si pour tout $x\in E$, $\varphi(x,x)\geqslant 0$
- **définie** si pour tout $x\in E$, $\varphi(x,x)=0 \implies x=0_E$

(E,φ) est appelé **préhilbertien réel**. Si E est de dimension finie alors (E,φ) est appelé **espace euclidien**.

Exemples de produits scalaires usuels sur les espaces usuels

- $(X,Y)\longmapsto X^\top Y = \sum_{i=1}^{n} X_iY_i$ est un produit scalaire (dit usuel) sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})=\mathbb{R}^n$.
- $(f,g)\longmapsto \int_a^b fg$ est un produit scalaire sur $\mathscr{C}^0([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ (où $a<b$).
- $(A,B)\longmapsto \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} A_{i,j}B_{i,j} = \operatorname{tr}(AB^\top)$ est un produit scalaire (dit usuel) sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Exemple 1. $(P,Q)\mapsto \int_0^{\pi/2} P(t)Q(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Exemple 2. $(X,Y)\mapsto$ cov(X,Y) est une forme symétrique, bilinéaire et positive.

Définition de la norme associée au produit scalaire

L'application $\|\ \ \|\colon \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R}\\ x \longmapsto \sqrt{\langle x,x\rangle}\end{cases}$ est appelée **norme associée au produit scalaire**. Ainsi, $\|x\|^2=\langle x,x\rangle$.

À partir de maintenant, $(E,\langle\ \ ,\ \ \rangle)$ désigne un préhilbertien réel et $\|\ \ \|$ est la norme associée à E.

Proposition n° 1 : propriétés de la norme associée à un produit scalaires, identité remarquable

Pour tout $(x,y)\in E^2$ et $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in E^n$ et $\lambda\in\mathbb{R}$:

1. $\|x\|\geqslant 0$ et $\|\lambda x\| = |\lambda|\times\|x\|$
2. $\|x\|=0 \implies x=0_E$
3. $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$
4. $\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2 + 2\times\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\langle x_i,x_j\rangle$
5. $\langle x,y\rangle = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2)$ *(formule de polarisation)*

Théorème n° 1 : inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour tout $(x,y)\in E^2$: $\langle x,y\rangle^2 \leqslant \langle x,x\rangle\times\langle y,y\rangle$ et $|\langle x,y\rangle|\leqslant \|x\|\times\|y\|$

De plus, $|\langle x,y\rangle| = \|x\|\times\|y\|$ ssi (x,y) est liée (*i.e.* il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $x=\lambda y$ ou $y=\lambda x$).

- Inégalité de Cauchy-Schwarz sur $\mathscr{C}^0([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$:

$$\forall (f,g)\in\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})^2 \qquad \left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right) \qquad \text{et} \qquad \left|\int_a^b fg\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2}\times\sqrt{\int_a^b g^2}$$

- Inégalité de Cauchy-Schwarz sur $\mathbb{R}^n$: soient $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, alors

$$\left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n {x_i}^2\right)\times\left(\sum_{i=1}^n {y_i}^2\right) \qquad \text{et} \qquad \left|\sum_{i=1}^n x_iy_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n {x_i}^2}\times\sqrt{\sum_{i=1}^n {y_i}^2}$$

Remarque 1. Soit $(x,y)\in(E\backslash\{0_E\})^2$, $\|x\|$ est la longueur du vecteur x et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il existe $\theta\in\mathbb{R}$, tel que $\cos(\theta)=\langle x,y\rangle/(\|x\|\times\|y\|)$, ainsi $\langle x,y\rangle=\|x\|\|y\|\cos(\theta)$. On dit que θ est l'angle (non orienté) des vecteurs x et y. À partir du produit scalaire, on définit donc les notions d'angles et de longueurs.

Proposition n° 2 : inégalité triangulaire et cas d'égalité

Pour tout $(x,y)\in E^2$ $\qquad \|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$

De plus : $\qquad \forall(x,y)\in E^2 \qquad \|x+y\|=\|x\|+\|y\| \iff \exists\lambda\geqslant 0 \quad x=\lambda y \quad \text{ou} \quad y=\lambda x$

2 Orthogonalité

2.1 Vecteurs orthogonaux, famille orthogonale, SEVs orthogonaux, orthogonal d'un SEV

Définition de l'orthogonalité et d'une famille orthogonale

On dit que x et y sont **orthogonaux** si $\langle x,y\rangle=0$, dans ce cas on note $x\perp y$.
On dit que $\mathscr{F}=(x_i)_{i\in I}$, une famille de vecteurs de E, est **orthogonale** si les vecteurs de $\mathscr{F}$ sont deux à deux orthogonaux, autrement dit si : $\qquad \forall(i,j)\in I^2 \qquad i\neq j \implies \langle x_i,x_j\rangle=0$

Exemple 3.
- Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de E (y compris à lui même).
- Muni du produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$, $(1,3,1)$ et $(0,1,-3)$ sont orthogonaux.

Théorème n° 2 de Pythagore *(le logo colle au théorème pour une fois)*

Si $(x_1,x_2,\ldots,x_p)$ est une famille orthogonale finie de E, alors : $\qquad \left\|\sum_{i=1}^p x_i\right\|^2=\sum_{i=1}^p\|x_i\|^2.$

Remarque 2. La réciproque est fausse (sauf si $p=2$). Prendre $x=(1,0,0)$, $y=(1,1,0)$, $z=(-1,1,0)$ dans $\mathbb{R}^3$.

Proposition n° 3 : liberté d'une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul

Soit $\mathscr{F}$ une famille orthogonale de E **ne contenant pas le vecteur nul**, alors $\mathscr{F}$ est libre.

Définition de sous-espaces orthogonaux

On dit que F et G sont **orthogonaux** si pour tout $(f,g)\in F\times G$, $\langle f,g\rangle=0$ (on note $F\perp G$ dans ce cas).

Remarque 3. Si $F\perp G$, alors $F\oplus G$. Si $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ est une famille orthogonale, alors $\operatorname{vect}(x_1,\ldots,x_p)\perp\operatorname{vect}(x_{p+1},\ldots,x_n)$.

Définition de l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Soit X une partie de E. L'**orthogonal** de X est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les éléments de X :
$X^\perp=\{y\in E \qquad \forall x\in X \quad \langle y,x\rangle=0\}$

Exemple 4. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, si $X = \{(1,0,0)\}$ que vaut $X^\perp$ et dans le cas où $X = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$?

Remarque 4. Il ne faut pas confondre le fait que deux SEV soient orthogonaux avec l'orthogonal d'un SEV : si $F \perp G$ cela ne veut pas dire que $G = F^\perp$. Cependant, $F \perp G$ ssi $G \subset F^\perp$.

Proposition n° 4 : propriétés de l'orthogonal

Soit $X \subset E$ et F et G deux sev de E.

1. $X^\perp$ est un SEV de E
2. $F \perp F^\perp$
3. $F \oplus F^\perp$
4. $F \subset (F^\perp)^\perp$
5. $E^\perp = \{0_E\}$
6. $\{0_E\}^\perp = E$
7. $F \subset G \Longrightarrow G^\perp \subset F^\perp$

Attention à la dimension infinie

Si E est de dimension infinie, l'inclusion 4. peut être stricte.

2.2 Famille orthonormées/orthonormales, algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Définition d'une famille orthonormée (ou orthonormale)

Un vecteur $x \in E$ est dit **unitaire** si $\langle x, x\rangle = 1$ (c'est équivalent à $\|x\| = 1$).
Une famille $\mathscr{F} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ orthogonale de vecteurs unitaires de E est dite **orthonormée** (ou **orthonormale**) :
$\forall (i,j) \in [\![1 ; p]\!]^2 \qquad \langle x_i, x_j\rangle = \delta_{i,j}$

Exemple 5. Pour les produits scalaires usuels, les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ sont orthonormées.

Comment obtenir des bases orthonormées ? Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $\mathscr{B} = (f_1, f_2, \ldots, f_r)$ une base de F. Construisons par étapes $\mathscr{B}' = (g_1, g_2, \ldots, g_r)$ une base orthonormée de F telle que pour tout $q \in [\![1 ; r]\!]$, $\mathrm{vect}\,(f_1, f_2, \ldots, f_q) = \mathrm{vect}\,(g_1, g_2, \ldots, g_q)$:

1. Posons $g_1 = f_1/\|f_1\|$.
2. Posons $u = f_2 - \langle f_2, g_1\rangle g_1$, puis $g_2 = u/\|u\|$.
3. Posons $u = f_3 - \langle f_3, g_1\rangle g_1 - \langle f_3, g_2\rangle g_2$ puis $g_3 = u/\|u\|$.

$\vdots$

q. À $(g_1, g_2, \ldots, g_{q-1})$ déjà créée, posons $u = f_q - \sum_{i=1}^{q-1} \langle f_q, g_i\rangle g_i$ puis $g_q = \dfrac{u}{\|u\|}$.

$\vdots$

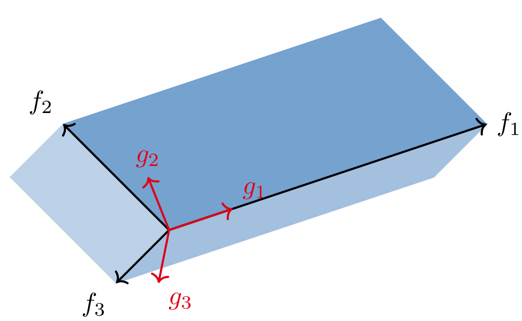

FIGURE 1 – Principe de Gram-Schmidt : g_1 est unitaire et proportionnel à f_1, g_2 est unitaire et appartient au plan défini par f_1 et f_2, g_3 est unitaire et appartenant à l'espace engendré par f_1, f_2 et f_3.

Remarque 5. Il n'y a pas unicité d'une telle famille, car à chaque étape, on peut poser $g_q = \pm u/\|u\|$, on a unicité si on rajoute la condition $\langle g_q, f_q \rangle > 0$.

Remarque 6. Comme $u = f_q - \sum_{i=1}^{q-1} \langle f_q, g_i \rangle g_i$, alors $\|u\|^2 = \|f_q\|^2 - \sum_{i=1}^{q-1} \langle f_q, g_i \rangle^2$ et $g_q = (f_q - \sum_{i=1}^{q-1} \langle f_q, g_i \rangle g_i)/\|u\|$

Exemple 6. Appliquer Gram-Schmidt à $\mathscr{F} = (f_1, f_2, f_3)$ dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel avec $f_1 = (1,1,0,0)$, $f_2 = (0,1,1,0)$ et $f_3 = (0,1,1,1)$.

3 Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

Remarque 7. Soients $F = \mathrm{vect}\,(f_1, f_2, \ldots, f_r)$ et $x \in E$: $\qquad x \in F^\perp \iff \forall i \in [\![1 ; r]\!] \quad x \perp f_i.$

Théorème n° 3 : supplémentaire orthogonal

Si F est un SEV de **dimension finie** de E. Alors, $\qquad E = F \oplus F^\perp$

La projection sur F parallèlement à $F^\perp$, appelé **projection orthogonale**, est notée p_F.

En notant $(g_1, g_2, \ldots, g_r)$ une base orthonormée de F, on a $\qquad p_F(x) = \sum_{i=1}^{r} \langle x, g_i \rangle g_i$

Remarque 8. Il n'y a pas unicité des supplémentaires de F. Mais il y a unicité du supplémentaire orthogonal : si $E = F \oplus G$ et $F \perp G$, alors $G = F^\perp$. On dit que $F^\perp$ est **le supplémentaire orthogonal** de F.

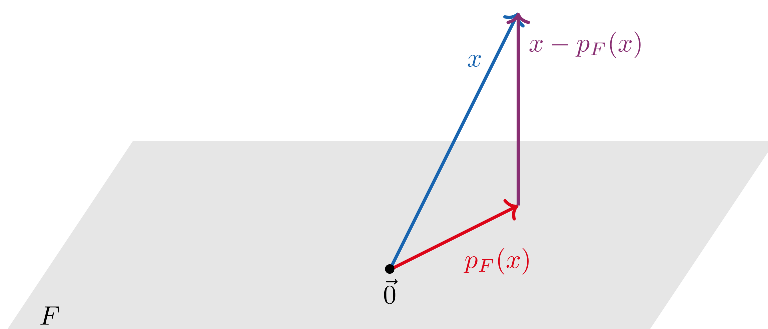

Figure 2 – La projection orthogonale sur F du vecteur x.

Caractérisation du projeté orthogonal avec une base (quelconque) de F

Soients F un sous-espace vectoriel de **dimension finie** de E de base $(f_1, f_2, \ldots, f_r)$ et $x \in E$.

- $p_F(x)$ est l'unique vecteur de F tel que $\qquad x - p_F(x) \in F^\perp$.
- $p_F(x)$ est l'unique vecteur de F tel que $\qquad$ pour tout $i \in [\![1 ; r]\!]$, $\langle x - p_F(x), f_i \rangle = 0$

Remarque 9. On peut calculer $p_F(x)$: en écrivant $p_F(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f_i$ et en résolvant le système d'inconnues $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$.

Théorème n° 4 : minimisation de la distance entre un vecteur et un SEV F de dim finie

Si F est un SEV de **dimension finie** de E et $x \in E$, alors $p_F(x)$ est l'unique vecteur de F tel que

$$\|x - p_F(x)\| = \inf_{f \in F} \|x - f\|$$

Remarque 10. Ainsi, $p_F(x)$ est le vecteur de F le plus proche de x pour la norme. $\|x - p_F(x)\|$ est la **distance** entre le vecteur x et l'espace vectoriel F. On note $d(x, F) = \inf_{f\in F}\|x - f\| = \|x - p_F(x)\|$.

Exemple 7. Si $E = \mathbb{R}[X]$ calculer la distance de X^2 à $F = \mathbb{R}_1[X]$ dans E muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

4 Spécificités des espaces euclidiens

Dans toute cette partie, on considère $(E, \langle\ \ ,\ \ \rangle)$ un espace euclidien.

Théorème n° 5 : existence de base orthonormée/théorème de la base incomplète orthonormée
Il existe $\mathscr{B}$ une base de E orthonormée. Toute famille $\mathscr{L}$ orthonormée peut être complétée en une base orthonormée.

Proposition n° 5 : calculs dans une base orthonormée
Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soient $(x, y) \in E^2$,Notons $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y)$.

1. $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$
2. $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle \times \langle y, e_i\rangle$
3. $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle^2$
4. $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} \langle x, e_1\rangle \\ \vdots \\ \langle x, e_n\rangle \end{pmatrix}$
5. $\langle x, y\rangle = X^\top Y$
6. $\|x\| = \sqrt{X^\top X}$

Théorème n° 6 : dimension du supplémentaire orthogonal
Si F un sous-espace vectoriel de E, alors $\dim\left(F^\perp\right) = \dim(E) - \dim(F)$

Remarque 11. Soient E un espace euclidien et F un sous espace vectoriel de E, alors $F = (F^\perp)^\perp$

5 Exercice classique et méthodes

Exercice classique

Calculer $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^3 - at - b)^2\,\mathrm{d}t$.

Méthode pour résoudre cet exercice classique

1. Reconnaître l'EV E le produit scalaire et le SEV de dimension finie F correspondant à la situation.
2. Faire le lien entre la question et $d(x, F)$ où $x \in E$ et calculer la distance $d(x, F)$ grâce au projeté orthogonal.

Méthode pour calculer la projection orthogonale
Soient F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E un préhilbertien et $x \in E$.

1. Si on connaît la décomposition $x = f + g$ où $f \in F$ et $g \in F^\perp$, alors $f = p_F(x)$.
2. Si $(g_1, g_2, \ldots, g_r)$ est une base orthonormée de F, alors $p_F(x) = \sum_{k=1}^{r} \langle x, g_k\rangle g_k$.
3. Si $(f_1, f_2, \ldots, f_r)$ est une base quelconque de F. Alors, $p_F(x) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k f_k$, avec $\langle x - p_F(x), f_i\rangle = 0$ pour tout $i \in [\![1\,; n]\!]$. On résout donc un système linéaire à r équations et r inconnues.
4. Si on connaît $p_{F^\perp}$ (par une des méthodes précédentes), alors $p_F = \mathrm{Id}_E - p_{F^\perp}$.