



Le but de ce chapitre est d'étudier les produits scalaires dans des espaces vectoriels quelconques, contrairement à la physique ou à la SI où vous êtes habitués à utiliser un produit scalaire dans \mathbb{R}^2 ou dans \mathbb{R}^3 .

Table des matières

1	Produit scalaire et norme associée	2
2	Orthogonalité	3
2.1	Vecteurs orthogonaux, famille orthogonale, SEVs orthogonaux, orthogonal d'un SEV	3
2.2	Famille orthonormées/orthonormales, algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt	4
3	Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie	5
4	Spécificités des espaces euclidiens	6
5	Exercice classique et méthodes	6

Dans tout ce chapitre E est un \mathbb{R} -espace vectoriel, F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E .

1 Produit scalaire et norme associée



Définition d'un produit scalaire, d'un espace préhilbertien réel et d'un espace euclidien

On dit que $\varphi: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ (on note souvent $\langle x, y \rangle = (x|y) = x \cdot y = \varphi(x, y)$) est un **produit scalaire** sur E si φ est

- **symétrique** si pour tout $(x, y) \in E^2$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$
- **bilinéaire** si pour tout $x \in E$, $y \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire, pour tout $y \in E$, $x \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire.
- **positive** si pour tout $x \in E$, $\varphi(x, x) \geq 0$
- **définie** si pour tout $x \in E$, $\varphi(x, x) = 0 \implies x = 0_E$

(E, φ) est appelé **préhilbertien réel**. Si E est de dimension finie alors (E, φ) est appelé **espace euclidien**.



Exemples à connaître de produits scalaires usuels sur les espaces usuels

- $(X, Y) \mapsto X^T Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ est un produit scalaire (dit usuel) sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$.
- $(f, g) \mapsto \int_a^b fg$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$ (où $a < b$).
- $(A, B) \mapsto \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j} b_{i,j} = \text{tr}(AB^T)$ est un produit scalaire (dit usuel) sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Exemples 1. • $(P, Q) \mapsto \int_0^{\pi/2} P(t)Q(t) \sin(t) dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

- $(X, Y) \mapsto \text{cov}(X, Y)$ est une forme symétrique, bilinéaire et positive.



Définition de la norme associée au produit scalaire

L'application $\| \cdot \|: \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{cases}$ est appelée **norme associée au produit scalaire**. Ainsi, $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$.

À partir de maintenant, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ désigne un préhilbertien réel et $\| \cdot \|$ est la norme associée à E .



Proposition n° 1 : propriétés de la norme associée à un produit scalaires, identité remarquable

Pour tout $(x, y) \in E^2$ et $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. $\|x\| \geq 0$ et $\|\lambda x\| = |\lambda| \times \|x\|$
2. $\|x\| = 0 \implies x = 0_E$
3. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$
4. $\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 + 2 \times \sum_{1 \leq i < j \leq n} \langle x_i, x_j \rangle$
5. $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$ (formule de polarisation)



Théorème n° 1 : inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour tout $(x, y) \in E^2$: $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \times \langle y, y \rangle$ et $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \times \|y\|$
 De plus, $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \times \|y\|$ ssi (x, y) est liée (i.e. il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$).

- Remarques 1.**
- Soit $(x, y) \in (E \setminus \{0_E\})^2$, $\|x\|$ est la longueur du vecteur x et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il existe $\theta \in \mathbb{R}$, tel que $\cos(\theta) = \langle x, y \rangle / (\|x\| \times \|y\|)$, ainsi $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos(\theta)$. On dit que θ est l'angle (non orienté) des vecteurs x et y . À partir du produit scalaire, on définit donc les notions d'angles et de longueurs.
 - L'inégalité de Cauchy-Schwarz est vraie pour une forme bilinéaire, symétrique positive (d'après la preuve). En revanche, le cas d'égalité a besoin du caractère «définie» du produit scalaire.

Exemples 2.

- Inégalité de Cauchy-Schwarz sur $\mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$:

$$\forall (f, g) \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})^2 \quad \left(\int_a^b fg \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2 \right) \left(\int_a^b g^2 \right) \quad \text{et} \quad \left| \int_a^b fg \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2} \times \sqrt{\int_a^b g^2}$$

- Inégalité de Cauchy-Schwarz sur \mathbb{R}^n : soient $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \times \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) \quad \text{et} \quad \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

- Inégalité de Cauchy-Schwarz pour des variables aléatoires : soient $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, alors $|\text{cov}(X, Y)| \leq \sqrt{V(X)} \sqrt{V(Y)} = \sigma(X) \sigma(Y)$



Proposition n° 2 : inégalité triangulaire et cas d'égalité

Pour tout $(x, y) \in E^2$

De plus :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \|x + y\| = \|x\| + \|y\| \iff \exists \lambda \geq 0 \quad x = \lambda y \quad \text{ou} \quad y = \lambda x$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

2 Orthogonalité

2.1 Vecteurs orthogonaux, famille orthogonale, SEVs orthogonaux, orthogonal d'un SEV



Définition de l'orthogonalité et d'une famille orthogonale

On dit que x et y sont **orthogonaux** si $\langle x, y \rangle = 0$, dans ce cas on note $x \perp y$.

On dit que $\mathcal{F} = (x_i)_{i \in I}$, une famille de vecteurs de E , est **orthogonale** si les vecteurs de \mathcal{F} sont deux à deux orthogonaux, autrement dit si :

$$\forall (i, j) \in I^2 \quad i \neq j \implies \langle x_i, x_j \rangle = 0$$

Exemples 3.

- Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de E (y compris à lui même).

- Muni du produit scalaire usuel de \mathbb{R}^3 , $(1, 3, 1)$ et $(0, 1, -3)$ sont orthogonaux.



Théorème n° 2 de Pythagore

(le logo colle au théorème pour une fois)

Si (x_1, x_2, \dots, x_p) est une famille orthogonale finie de E , alors :

$$\left\| \sum_{i=1}^p x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|x_i\|^2$$

Remarque 2. La réciproque est fausse (sauf si $p = 2$). Prendre $x = (1, 0, 0)$, $y = (1, 1, 0)$, $z = (-1, 1, 0)$ dans \mathbb{R}^3 .



Proposition n° 3 : liberté d'une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul

Soit \mathcal{F} une famille orthogonale de E ne contenant pas le vecteur nul, alors \mathcal{F} est libre.



Définition de sous-espaces orthogonaux

On dit que F et G sont **orthogonaux** si pour tout $(f, g) \in F \times G$, $\langle f, g \rangle = 0$ (on note $F \perp G$ dans ce cas).

Remarque 3. Si $F \perp G$, alors $F \oplus G$. Si (x_1, x_2, \dots, x_n) est une famille orthogonale, alors $\text{vect}(x_1, \dots, x_p) \perp \text{vect}(x_{p+1}, \dots, x_n)$.



Définition de l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Soit X une partie de E . L'**orthogonal** de X est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les éléments de X :

$$X^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in X \quad \langle y, x \rangle = 0\}$$

Exemple 4. Dans \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire usuel, si $X = \{(1, 0, 0)\}$ que vaut X^\perp et dans le cas où $X = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$?

Remarque 4. Il ne faut pas confondre le fait que deux SEV soient orthogonaux avec l'orthogonal d'un SEV : si $F \perp G$ cela ne veut pas dire que $G = F^\perp$. Cependant, $F \perp G$ ssi $G \subset F^\perp$.



Proposition n° 4 : propriétés de l'orthogonal

Soit $X \subset E$ et F et G deux sev de E .

- | | | | |
|--------------------------------|------------------------|---------------------------------------------------|--------------------------------|
| 1. X^\perp est un SEV de E | 2. $F \perp F^\perp$ | 3. $F \oplus F^\perp$ | 4. $F \subset (F^\perp)^\perp$ |
| 5. $E^\perp = \{0_E\}$ | 6. $\{0_E\}^\perp = E$ | 7. $F \subset G \implies G^\perp \subset F^\perp$ | |



Attention à la dimension infinie

Si E est de dimension infinie, l'inclusion 4. peut être stricte.

2.2 Famille orthonormées/orthonormales, algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt



Définition d'une famille orthonormée (ou orthonormale)

Un vecteur $x \in E$ est dit **unitaire** si $\langle x, x \rangle = 1$ (c'est équivalent à $\|x\| = 1$).

Une famille $\mathcal{F} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ orthogonale de vecteurs unitaires de E est dite **orthonormée** (ou **orthonormale**) :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2 \quad \langle x_i, x_j \rangle = \delta_{i,j}$$

Exemple 5. Pour les produits scalaires usuels, les bases canoniques de \mathbb{R}^n , $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ sont orthonormées.



Comment obtenir des bases orthonormées ? Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $\mathcal{B} = (f_1, f_2, \dots, f_r)$ une base de F . Construisons par étapes $\mathcal{B}' = (g_1, g_2, \dots, g_r)$ une base orthonormée de F telle que pour tout $q \in \llbracket 1; r \rrbracket$, $\text{vect}(f_1, f_2, \dots, f_q) = \text{vect}(g_1, g_2, \dots, g_q)$:

1. Posons $g_1 = f_1 / \|f_1\|$.
2. Posons $u = f_2 - \langle f_2, g_1 \rangle g_1$, puis $g_2 = u / \|u\|$.
3. Posons $u = f_3 - \langle f_3, g_1 \rangle g_1 - \langle f_3, g_2 \rangle g_2$ puis $g_3 = u / \|u\|$.
- ⋮
- q. À $(g_1, g_2, \dots, g_{q-1})$ déjà créée, posons $u = f_q - \sum_{i=1}^{q-1} \langle f_q, g_i \rangle g_i$ puis $g_q = \frac{u}{\|u\|}$.
- ⋮

Remarques 5. • Il n'y a pas unicité d'une telle famille, car à chaque étape, on peut poser $g_q = \pm u / \|u\|$.

• Il y a une unicité si on rajoute la condition : «pour tout $q \in \llbracket 1; r \rrbracket$, $\langle g_q, f_q \rangle > 0$ ».

• Comme $u = f_q - \sum_{i=1}^{q-1} \langle f_q, g_i \rangle g_i$, alors $\|u\|^2 = \|f_q\|^2 - \sum_{i=1}^{q-1} \langle f_q, g_i \rangle^2$ et $g_q = (f_q - \sum_{i=1}^{q-1} \langle f_q, g_i \rangle g_i) / \|u\|$

Exemple 6. Appliquer Gram-Schmidt à $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ dans \mathbb{R}^4 muni du produit scalaire usuel avec $f_1 = (1, 1, 0, 0)$, $f_2 = (0, 1, 1, 0)$ et $f_3 = (0, 1, 1, 1)$.

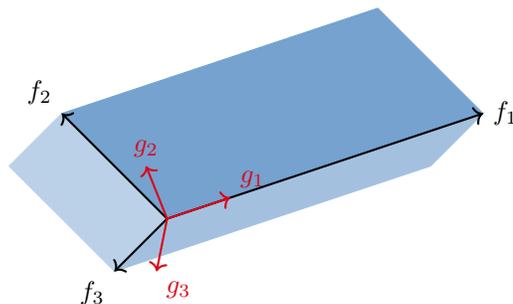


FIGURE 1 – Principe de Gram-Schmidt : g_1 est unitaire et proportionnel à f_1 , g_2 est unitaire et appartient au plan défini par f_1 et f_2 , g_3 est unitaire et appartenant à l'espace engendré par f_1 , f_2 et f_3 .

3 Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

Remarque 6. Soient $F = \text{vect}(f_1, f_2, \dots, f_r)$ et $x \in E$: $x \in F^\perp \iff \forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket \quad x \perp f_i.$



Théorème n° 3 : supplémentaire orthogonal

Si F est un SEV de **dimension finie** de E . Alors,

La projection sur F parallèlement à F^\perp , appelé **projection orthogonale**, est notée p_F .

En notant (g_1, g_2, \dots, g_r) une base orthonormée de F , on a

$$E = F \oplus F^\perp$$

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^r \langle x, g_i \rangle g_i$$

Remarque 7. Il n'y a pas unicité des supplémentaires de F . Mais il y a unicité du supplémentaire orthogonal : si $E = F \oplus G$ et $F \perp G$, alors $G = F^\perp$. On dit que F^\perp est le **supplémentaire orthogonal** de F .

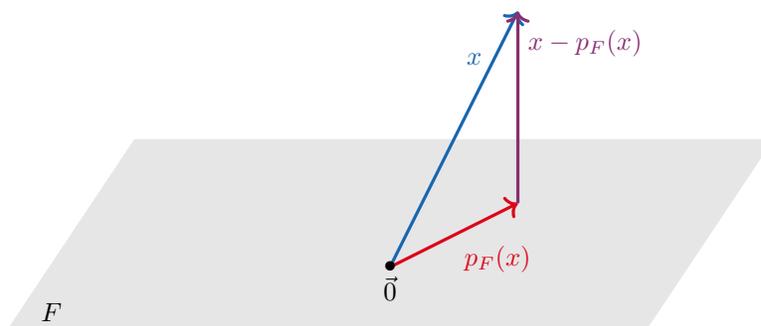


FIGURE 2 – La projection orthogonale sur F du vecteur x .



Caractérisation du projeté orthogonal avec une base (quelconque) de F

Soient F un sous-espace vectoriel de **dimension finie** de E de base (f_1, f_2, \dots, f_r) et $x \in E$.

- $p_F(x)$ est l'unique vecteur de F tel que
- $p_F(x)$ est l'unique vecteur de F tel que

$$\begin{aligned} & x - p_F(x) \in F^\perp. \\ & \text{pour tout } i \in \llbracket 1; r \rrbracket, \langle x - p_F(x), f_i \rangle = 0 \end{aligned}$$

Remarque 8. On peut calculer $p_F(x)$: en écrivant $p_F(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i f_i$ et en résolvant le système d'inconnues $\lambda_1, \dots, \lambda_r$.



Théorème n° 4 : minimisation de la distance entre un vecteur et un SEV F de dim finie

Si F est un SEV de **dimension finie** de E et $x \in E$, alors $p_F(x)$ est l'unique vecteur de F tel que

$$\|x - p_F(x)\| = \inf_{f \in F} \|x - f\|$$

Remarque 9. Ainsi, $p_F(x)$ est le vecteur de F le plus proche de x pour la norme. $\|x - p_F(x)\|$ est la **distance** entre le vecteur x et l'espace vectoriel F . On note $d(x, F) = \inf_{f \in F} \|x - f\| = \|x - p_F(x)\|$.

Exemple 7. Si $E = \mathbb{R}[X]$ calculer la distance de X^2 à $F = \mathbb{R}_1[X]$ dans E muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

4 Spécificités des espaces euclidiens

Dans toute cette partie, on considère $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.



Théorème n° 5 : existence de base orthonormée/théorème de la base incomplète orthonormée

Il existe \mathcal{B} une base de E orthonormée. Toute famille \mathcal{L} orthonormée peut être complétée en une base orthonormée.



Proposition n° 5 : calculs dans une base orthonormée

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Soient $(x, y) \in E^2$. Notons $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$.

1. $x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$
2. $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \times \langle y, e_i \rangle$
3. $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2$
4. $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} \langle x, e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, e_n \rangle \end{pmatrix}$
5. $\langle x, y \rangle = X^T Y$
6. $\|x\| = \sqrt{X^T X}$



Théorème n° 6 : dimension du supplémentaire orthogonal

Si F un sous-espace vectoriel de E , alors

$$\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$$

Remarque 10. Soient E un espace euclidien et F un sous espace vectoriel de E , alors $F = (F^\perp)^\perp$

5 Exercice classique et méthodes



Exercice classique

Calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^3 - at - b)^2 dt$.



Méthode pour résoudre cet exercice classique

1. Reconnaître l'EV E , le produit scalaire et le SEV de dimension finie F correspondant à la situation.
2. Faire le lien entre la question et $d(x, F)$ où $x \in E$ et calculer la distance $d(x, F)$ grâce au projeté orthogonal.



Méthodes pour calculer la projection orthogonale

Soient F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E un préhilbertien et $x \in E$.

1. Si on connaît la décomposition $x = f + g$ où $f \in F$ et $g \in F^\perp$, alors $f = p_F(x)$.
2. Si (g_1, g_2, \dots, g_r) est une base orthonormée de F , alors $p_F(x) = \sum_{k=1}^r \langle x, g_k \rangle g_k$.
3. Si (f_1, f_2, \dots, f_r) est une base quelconque de F . Alors, $p_F(x) = \sum_{k=1}^r \lambda_k f_k$, avec $\langle x - p_F(x), f_i \rangle = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$. On résout donc un système linéaire à r équations et r inconnues.
4. Si on connaît p_{F^\perp} (par une des méthodes précédentes), alors $p_F = \text{Id}_E - p_{F^\perp}$.