Produit scalaire

Exercice 1 (⋆ Cou ©)**.** Parmi les applications suivantes dires lesquelles sont des produits scalaires sur E et justifier :

1. $E = \mathbb{R}^3$ et $\varphi((x, y, z), (x', y', z')) = 2xx' - yy' + 3zz'$
2. $E = \mathbb{R}^2$ et $\varphi((x, y), (x', y')) = (xx' + yy', 2yy')$
3. $E = \mathbb{R}[X]$ et $\varphi(P, Q) = P(0)Q(0)$
4. $E = \mathscr{C}^1([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$ et $\varphi(f, g) = \displaystyle\int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 (⋆ Cou ©)**.** Montrer que l'application définie sur $\mathbb{R}[X]^2$ par

$$\phi(P, Q) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(n)Q(n)\mathrm{e}^{-n}$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ *(penser à justifier l'existence)*. Puis écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 3 (⋆ Cou ©)**.** On se place sur $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que l'application définie sur $(\mathbb{R}^3)^2$ par
$$\psi((x, y, z), (x', y', z')) = 2xx' + yy' + 3zz'$$
est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $2x^2 + y^2 + 3z^2 \leqslant 1$. Montrer que
$$(x + y + z)^2 \leqslant \frac{11}{6}$$

Exercice 4 (⋆⋆ Mod ©)**.** Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f(x) \leqslant \sqrt{x}\sqrt{\int_0^x f'(t)^2\,\mathrm{d}t}$$

Exercice 5 (⋆⋆ Rai)**.** Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases orthonormales d'un espace euclidien E et $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$, montrer que $P^\top = P^{-1}$

Exercice 6 (𝄞⋆ Cou, Rai ©)**.** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $(X, Y) \mapsto X^\top Y$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^\top A)$.
3. En déduire que $\mathrm{Im}(A^\top) = \mathrm{Im}(A^\top A)$

Orthogonal

Exercice 7 (⋆⋆ Rec ©)**.** Soit $E = \mathscr{C}([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel. Soit $H = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$. Déterminer $H^\perp$. Comparer H avec $(H^\perp)^\perp$. Conclure.

Exercice 8 (𝄞⋆ Cou, Rai ©)**.** Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel. Montrer que $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux de E. Quelle est la projection orthogonale de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 9 (𝄞⋆ Cou, Rai)**.** Soit $E = \mathscr{C}^0([\,-1\,;1\,], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire usuel. Soit P l'ensemble des fonctions paires de E. Soit I l'ensemble des fonctions impaires de E. Montrer que P et I sont des supplémentaires orthogonaux de E. Quelle est la projection orthogonale sur P ?

Exercice 10 (⋆⋆ Cou, Rai ©)**.** Soit $E = \mathscr{C}^2([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$. Pour $(f, g) \in E^2$, on pose $\varphi(f, g) = \displaystyle\int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. On pose $V = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E \mid f'' = f\}$. Montrer que V et W sont des supplémentaires orthogonaux de E.

Orthonormalisation, projection

Exercice 11 (𝄞⋆⋆)**.** Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ une famille de réels deux à deux distincts. On pose $\varphi(P, Q) = \sum\limits_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$ pour $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. On pose $L_i = \displaystyle\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{X - a_k}{a_i - a_k}$, calculer $L_i(a_j)$ pour tout $(i, j) \in [\![\,0\,;n\,]\!]^2$.
3. Montrer que $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, trouver la décomposition de P dans la base $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$.

Exercice 12 (𝄞⋆⋆ Rai ©)**.** Soit E un espace euclidien de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires. On suppose que pour tout $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle^2$.

1. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base orthonormale.
2. Montrer que l'on peut aboutir à la même conclusion en ne supposant plus E de dimension n (E reste cependant un espace euclidien).

Exercice 13 ($\star$ Cou, Cal ©)**.** On munit $\mathbb{R}_3[X]$ du produit scalaire défini par

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_3[X]^2 \qquad \langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 14 (𝄞$\star\star$ Rec, Rai)**.** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [\,-1\,;1\,]$, $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.

1. Dans $E = \mathscr{C}^0([\,-1\,;1\,], \mathbb{R})$ on pose $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^{\pi} f(\cos(\theta))g(\cos(\theta))\mathrm{d}\theta$. Montrer que $\langle\ \ ,\ \ \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [\,-1\,;1\,]$.
3. Montrer que T_n est une fonction polynomiale, déterminer son degré.
4. Monter que $(T_n)_n$ est une famille orthogonale
5. Calculer $\|T_n\|$.

Exercice 15 ($\star$)**.** Soit $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel donner la matrice de la projection orthogonale du plan d'équation $x + y + 2z = 0$ dans la base canonique.

Exercice 16 ($\star\star$ Cou, Cal, Mod ©)**.** On munit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel avec $n \geqslant 2$. Soit $\|\ \ \|$ la norme euclidienne associée. Soit J la matrice de E dont tous les coefficients sont égaux à 1. Si $M \in E$, calculer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|M - aI_n - bJ\|$.

Exercice 17 ($\star$ Cal ©)**.** Soit $E = \mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues réelles et 2π-périodiques.

1. On pose $\varphi(f, g) = \displaystyle\int_0^{2\pi} fg$ pour $(f, g) \in E^2$. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $c_n : x \mapsto \cos(n\theta)$. Et pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $s_n : x \mapsto \sin(n\theta)$. Montrer que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \cup (s_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une famille orthogonale de E.
3. On pose $V_N = \mathrm{vect}(c_0, c_n, s_n, n \in [\![\,1\,;N\,]\!])$ pour $N \in \mathbb{N}$. Soit $f \in E$, calculer la projection de f sur V_n. Si $p_n(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k c_k + \sum_{k=1}^{N} b_k s_k$, on dit que a_k et b_k sont les coefficients de Fourier de f [1]

Exercice 18 ($\star\star$ Cal, Mod)**.** Calculer

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^1 (t^5 - at^2 - bt - c)^2 t\,\mathrm{d}t$$

Exercice 19 ($\star\star$ Cal, Mod)**.** Montrer que l'ensemble

$$A = \left\{ \int_0^{\pi} (t^2 - a\cos(t) - b\sin(t))^2\,\mathrm{d}t \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

admet un minimum que l'on calculera.

Exercice 20 (𝄞$\star\star\star$ Rec)**.** Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs tels que $\langle x_i, x_j\rangle < 0$ pour tout $i \neq j$. Montrer que $p \leqslant n + 1$.

Exercice 21 (𝄞$\star\star$ Cal, Rai, Rec ©)**.** Soient E un préhilbertien et $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$. On note $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (appelé déterminant de Gram) le déterminant de la matrice $(\langle x_i, x_j\rangle)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$.

1. Que vaut $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une famille orthonormale de E ?
2. Montrer que si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une famille liée, alors $G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$.
3. Montrer que si $G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ alors $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une famille liée.

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de F. On note p la projection orthogonale sur F.

4. Montrer que pour tout $x \in E$, et pour tout $i \in [\![\,1\,;n\,]\!]$, $\langle x, e_i\rangle = \langle p(x), e_i\rangle$ et que $\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2$.
5. Montrer que $G(e_1, \ldots, e_n, x) = d(x, F)^2 G(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.
6. Dans $\mathscr{C}^0([\,-1\,;1\,], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel, calculer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} (t^5 - (at + b))^2\,\mathrm{d}t$.

1. On peut prouver, mais c'est difficile, que $p_n(f)$ converge vers f (pour la norme associée au produit scalaire), prouvant le théorème de Fourier tout fonction f continue et 2π-périodique, est une somme infinie de fonctions $\theta \mapsto \cos(n\theta)$ et $\theta \mapsto \sin(n\theta)$.