Chapitre 23

Fonctions à deux variables

Dans ce chapitre, qui sera entièrement généralisé en deuxième année, nous allons aborder la notion de dérivée partielle d'une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère la norme euclidienne associée au produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^2$ notée $\| \quad \|$.

Table des matières

1 Rudiment de topologie (boules ouvertes, ouverts et continuité) **2**

2 Dérivée partielle, dérivée suivant un vecteur et composée **3**

3 Extrema **4**

1 Rudiment de topologie (boules ouvertes, ouverts et continuité)

Définition d'une boule ouverte de $\mathbb{R}^2$

On appelle **boule ouverte** de centre $a \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $r > 0$, l'ensemble $B(a, r) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \|a - x\| < r\right\}$.

Remarque 1.
- Ici, c'est un disque, mais le nom de boule se généralisera l'année prochaine à d'autres dimensions.
- On appelle **boule fermée** de centre $a \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $r > 0$, l'ensemble $B_f(a, r) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|a - x\| \leqslant r\right\}$.
- En tout point d'un intervalle ouvert on peut faire un petit déplacement vers la droite ou vers la gauche de façon à rester dans cet intervalle ouvert, les boules ouvertes vérifient la même propriété. De manière générale, on appelle ouvert tout partie dans lequel en chaque point on peut faire un petit déplacement dans toutes les directions :

Définition d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$

Soit $O \subset \mathbb{R}^2$, on dit que O est un **ouvert** de $\mathbb{R}^2$ si pour tout $x \in O$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset O$.

Exemple 1. Une boule ouverte est ouverte, $\mathbb{R}^2$ et $\varnothing$ sont ouverts. Les boules fermés ne sont pas ouvertes.

À partir de maintenant, on va étudier des fonctions de la forme $f : O \to \mathbb{R}$ où O est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Remarque 2. Pour $(x, y) \in O$, on a $f(x, y) \in \mathbb{R}$. On a ainsi une fonction à deux variables. Comme le déterminant ou le produit scalaire, on définit alors les fonctions partielles : à y fixé, on a $g_y : x \mapsto f(x, y)$ et à x fixé, on a $d_x : y \mapsto f(x, y)$.

Définition de la continuité d'une fonction

Soit $f : O \to \mathbb{R}$ où O est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, on dit que f est **continue** en $(x_0, y_0) \in O$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (x, y) \in O \qquad \|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leqslant \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leqslant \varepsilon$$

On dit que f est continue sur O si f est continue en tout $(x_0, y_0) \in O$.

Proposition n° 1 : opérations sur les fonctions continues
- Si $f : O \to \mathbb{R}$ et $g : O \to \mathbb{R}$ sont continues sur O et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + g$ et fg sont continues sur O
- Si $f : O \to \mathbb{R}$ et $g : O \to \mathbb{R}$ sont continues sur O avec g qui ne s'annule pas, alors f/g est continue sur O.
- Soit O' un ouvert de $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{R}^2$), si $f : O \to O'$ et $g : O' \to \mathbb{R}$ sont continues alors $g \circ f$ est continue sur O.

Exemple 2. $(x, y) \mapsto |x + iy|$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque 3. Si $f : O \to \mathbb{R}$ est continue, alors à y fixé, $g : x \mapsto f(x, y)$ est continue et à x fixé, $d : y \mapsto f(x, y)$ est continue.

Péril imminent la réciproque est fausse

Il est possible d'avoir $x \mapsto f(x, y)$ continue à y fixé, et $y \mapsto f(x, y)$ continue à x fixé et f non continue.

Exemple 3. On pose $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. La fonction f n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$, alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x, y)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, y)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2 Dérivée partielle, dérivée suivant un vecteur et composée

Définition des dérivées partielles

- On dit que f admet une **dérivée partielle** par rapport à x au point $(x_0, y_0) \in O$ si $g\colon x \mapsto f(x, y_0)$ est dérivable en x_0, et on note $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ cette dérivée : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0)$.
- On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à y au point $(x_0, y_0) \in O$ si $d\colon y \mapsto f(x_0, y)$ est dérivable en y_0, et on note $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ cette dérivée : $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = d'(y_0)$.

Exemple 4. Calculer les dérivées partielles de la fonction f de l'exemple 3.

Attention l'existence des dérivées partielles n'implique pas la continuité

Contrairement, au cas des fonctions d'une variable réelle, f peut avoir des dérivées partielles sans être continue.

Définition d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur O

On dit que $f\colon O \to \mathbb{R}$ est $\mathscr{C}^1$ si f a des dérivées partielles en tout point de O et si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur O.

Théorème n° 1 : développement limité à l'ordre 1 *(admis)*

Si f est de $\mathscr{C}^1$ sur O et $(x_0, y_0) \in O$ alors : $f(x_0 + h, y_0 + k) \underset{0}{=} f(x_0, y_0) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + o(\|(h, k)\|)$

Remarque 4. On dit qu'une fonction φ vérifie $\varphi(h, k) \underset{0}{=} o(\|(h, k)\|)$ si $\dfrac{\varphi(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0$.

Remarque 5. Ainsi, $(h, k) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k$ est une application linéaire qui approxime $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ quand $(h, k) \to (0, 0)$. De plus, $z = f(x_0, y_0) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$ est l'équation du plan tangent en (x_0, y_0) à la surface $z = f(x, y)$.

Exemple 5. Considérons $(x, y) \mapsto \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ sur $B((0, 0), 1)$, donner l'équation du plan tangent en $(1/2, 1/2)$.

Définition du gradient

Soit f est $\mathscr{C}^1$ sur O. On définit le **gradient** de f en (x_0, y_0) par : $\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}^\top$

Exemple 6. Démontrer que l'application $f\colon (x, y) \mapsto \|(x, y)\|^2$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer son gradient.

Remarque 6. Ainsi, si f est $\mathscr{C}^1$ sur O, alors $f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \left\langle \nabla f(x_0, y_0), \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle + o(\|(h, k)\|)$. Ainsi, le gradient est la direction dans laquelle f croît le plus vite.

Définition de la dérivée suivant un vecteur

Soient $d \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$, $f\colon O \to \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in O$, alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in \,]-\delta\,;\delta[$, $(x_0, y_0) + td \in O$. On regarde f seulement dans la direction d grâce à l'application $\varphi\colon t \mapsto f((x_0, y_0) + td)$ sur $]-\delta\,;\delta[$. On dit que f admet une **dérivée suivant la direction** d si φ est dérivable en 0. Dans ce cas, on note $D_d f(x_0, y_0) = \varphi'(0)$

Proposition n° 2 : relation entre gradient et dérivée suivant un vecteur

Soit $f\colon O \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur O et $d \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, alors f admet une dérivée suivant le vecteur d en (x_0, y_0), de plus, $D_d f(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), d\rangle$.

Proposition n° 3 : première règle de la chaîne

Soit $f\colon O \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathscr{C}^1$ sur O et $\gamma\colon t \mapsto (x(t), y(t))$ une fonction de I dans O avec x et y deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, alors $f \circ \gamma\colon I \to \mathbb{R}$ est $\mathscr{C}^1$ et

$$\forall t \in I \qquad (f\circ\gamma)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t) = \left\langle \nabla f(x(t), y(t)), \gamma'(t)\right\rangle \text{ avec } \gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$$

Définition d'une ligne de niveau

Soit $(x_0, y_0) \in O$, l'ensemble $f^{-1}(\{f(x_0, y_0)\})$ s'appelle **ligne de niveau** de f.

Remarque 7. Le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau de f.

Proposition n° 4 : seconde règle de la chaîne

Soit U et V deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et $f\colon O \to \mathbb{R}^2$, $\varphi\colon U \to \mathbb{R}$ et $\psi\colon V \to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ telles que pour tout $(u, v) \in U \times V$, $w = g(u, v) = (\varphi(u, v), \psi(u, v)) \in O$, alors $f \circ g\colon (u, v) \mapsto f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ est $\mathscr{C}^1$ sur U et :

$$\frac{\partial f\circ g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(w)\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(w)\frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f\circ g}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(w)\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(w)\frac{\partial \psi}{\partial v}(u,v)$$

Remarque 8. On pose $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$, f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, dériver $(r, \theta) \mapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.

3 Extrema

Définition d'un extremum local ou global

Soient $f\colon D \to \mathbb{R}$ où D est une partie de $\mathbb{R}^2$ et $m_0 = (x_0, y_0) \in D$

1. On dit que f admet un **maximum global** en m_0 si pour tout $(x, y) \in D$, $f(x, y) \leqslant f(m_0)$.
2. On dit que f admet un **minimum global** en m_0 si pour tout $(x, y) \in D$, $f(x, y) \geqslant f(m_0)$.
3. On dit que f admet un **maximum (resp. minimum) local** en m_0 s'il existe $r > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in D \cap B(m_0, r)$, $f(x, y) \leqslant f(m_0)$ (resp. $\geqslant$).
4. Un **extremum local (resp. global)** est un maximum ou un minimum local (resp. global).

Théorème n° 2 : condition nécessaire pour être un extremum local

Si $f\colon O \to \mathbb{R}$ est $\mathscr{C}^1$ et admet un extremum local en (x_0, y_0) alors $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ (on dit que (x_0, y_0) est un **point critique** de f).

Attention être un point critique est une condition nécessaire pour être un extremum

Extremum implique point critique mais la réciproque est fausse.

Exemple un point col/un point selle

$(x, y) \mapsto x^2 - y^2$.

Remarque 9. Une fonction dérivable $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ dérivable peut avoir un extremum en a (ou b) avec $f'(a) \neq 0$. ceci ne se produit pas ici, car on est sur un ouvert.