

Exercice : les matrices montent en puissance (et vous aussi !)

1. Le produit matriciel $A \times B$ est défini que si $p = q$. Dans ce cas, $C = A \times B \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ et pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; r \rrbracket$, $C_{i,j} = \sum_{k=1}^p A_{i,k} B_{k,j}$.
2. Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. Si $AB = BA$, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(A + B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$.
3. Remarquons que $E_{1,2} \times E_{1,2} = 0_2$. Dès lors, pour tout entier $k \geq 2$, $E_{1,2}^k = 0_2$. De plus, remarquons que $(xI_2) \times E_{1,2} = xE_{1,2} = E_{1,2} \times (xI_2)$. On peut appliquer la formule du binôme de Newton : pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} T^n &= (xI_2 + E_{1,2})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (E_{1,2})^k (xI_2)^{n-k} = \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} x^{n-k} (E_{1,2})^k + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} x^{n-k} (E_{1,2})^k \\ &= x^n I_2 + nx^{n-1} E_{1,2} + 0_2 = \begin{pmatrix} x^n & nx^{n-1} \\ 0 & x^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 - L_2 & & \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3 & & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 & & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

Ainsi, P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Après calculs, on obtient $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

6. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$: « $A^n = PD^nP^{-1}$ ». Pour $n = 0$, $A^0 = I_3$ et $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors :

$$A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1} \times A$$

Cependant, comme $D = P^{-1}AP$, en multipliant par P à gauche, il vient $PD = AP$, puis en multipliant par P^{-1} à droite, il vient $PDP^{-1} = A$. Ainsi,

$$A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

Ce qui montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} A^n &= PD^n P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^n & 3 \times 2^n & -2^n \\ 0 & 0 & 0 \\ (-2)^n & -(-2)^n & (-2)^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2^n + 2(-2)^n & 3 \times 2^n - 2(-2)^n & -2^n + 2 \times (-2)^n \\ -(-2)^n & (-2)^n & -(-2)^n \\ -2^n - (-2)^n & -3 \times 2^n + (-2)^n & 2^n - (-2)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Soit $p \in]0; 1[$. On définit la matrice $B = \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 \\ 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$7. B^2 = \begin{pmatrix} p^2 & 2p(1-p) & (1-p)^2 \\ 0 & p^2 & 1-p^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose, $\mathcal{P}(n)$ l'hypothèse de récurrence suivante :

$$\exists (a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3 \quad B^n = \begin{pmatrix} p^n & a_n & b_n \\ 0 & p^n & c_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour $n = 0$, alors comme $B^0 = I_3$, il suffit de poser $a_0 = b_0 = c_0 = 0$. Pour $n = 1$, il suffit de poser $a_1 = c_1 = 1 - p$ et $b_1 = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors :

$$B^{n+1} = B \times B^n = \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 \\ 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p^n & a_n & b_n \\ 0 & p^n & c_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^{n+1} & (1-p)p^n + pa_n & pb_n + (1-p)c_n \\ 0 & p^{n+1} & pc_n + 1-p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose alors $a_{n+1} = (1-p)p^n + pa_n$, $b_{n+1} = (1-p)c_n + pb_n$ et $c_{n+1} = pc_n + (1-p)$. Ainsi, $B^{n+1} = \begin{pmatrix} p^{n+1} & a_{n+1} & b_{n+1} \\ 0 & p^{n+1} & c_{n+1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dès lors, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

9. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = pc_n + (1-p)$, la suite $(c_n)_n$ est une suite arithmetico-géométrique. Cherchons ℓ le point fixe : $\ell = p\ell + (1-p)$. ssi $\ell(p-1) + (1-p) = 0$. Or, $p-1 \neq 0$, on obtient que $\ell = 1$ est un point fixe. Alors comme $\begin{cases} c_{n+1} = pc_n + (1-p) \\ \ell = p\ell + (1-p) \end{cases}$, par différence, on obtient que $c_{n+1} - \ell = p(c_n - \ell)$. Ainsi, la suite $(c_n - 1)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison p . Donc $c_n - 1 = p^n(c_0 - 1) = -p^n$. Ceci prouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = 1 - p^n$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors, en utilisant la relation $a_{n+2} = (1-p)p^{n+1} + pa_{n+1}$, on obtient :

$$a_{n+2} - 2pa_{n+1} + p^2a_n = (1-p)p^{n+1} + pa_{n+1} - 2pa_{n+1} + p^2a_n = p((1-p)p^n - a_{n+1}) + p^2a_n = p(-pa_n) + p^2a_n = 0$$

11. D'après la question précédente, $(a_n)_n$ est une suite récurrente linéaire d'ordre deux dont l'équation caractéristique est $r^2 - 2pr + p^2 = 0$, or par identité remarquable, on obtient $(r-p)^2 = 0$. Ainsi, la seule racine de l'équation caractéristique est $r = p$. D'après le cours, il existe deux constantes α et β telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = (\alpha n + \beta)p^n$. Comme $a_0 = 0$, on obtient que $\beta = 0$. De plus, $a_1 = \alpha p = 1 - p$, on obtient que $\alpha = \frac{1-p}{p}$. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n(1-p)p^{n-1}$.

Exercice : vous aurez de multiples points sur la multiplicité des racines

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $P_\alpha = X^3 - \alpha X^2 + \alpha X - 1$.

1. $P_\alpha(1) = 1^3 - \alpha 1^2 + \alpha 1 - 1 = 1 - \alpha + \alpha - 1 = 0$. ceci montre que 1 est une racine de P_α . Ainsi, $X - 1$ divise P_α . On peut donc factoriser P_α par $X - 1$.
2. Calculons le polynôme dérivée de P_α : $P'_\alpha = 3X^2 - 2X\alpha + \alpha$. Ainsi, $P'_\alpha(1) = 3 - \alpha$. Donc, si $\alpha \neq 3$, $P'_\alpha(1) \neq 0$. Dans ce cas, 1 est une racine de multiplicité 1 de P_α . Si $\alpha = 3$, alors en reconnaissant la formule du binôme de Newton :

$$P_\alpha = X^3 - 3X^2 + 3X - 1 = (X - 1)^3$$

Ainsi, 1 est une racine de multiplicité 3 dans P_α .

3. D'après le cours, $s = \alpha$ et $p = 1$.

Problème 1 : Wall is back (le retour du mur)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t) dt, \quad J_n = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n}(t) dt, \quad K_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} J_n, \quad \text{et} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}$$

On remarque que $I_n = W_{2n}$ (intégrale de Wallis).

1. `def SuiteS(n):`

`S=0`

`for i in range(1,n+1):`

`S=S+i**(-2)`

`return S`

2. `def Factorielle(n):`

`if n==0:`

`return 1`

`else:`

`return n*Factorielle(n-1)`

3. Montrons que les suites $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes :

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$. Donc $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_{n+1} - v_n = \left(S_{n+1} + \frac{1}{n+1} \right) - \left(S_n + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n + (n+1)n - (n+1)^2}{n(n+1)^2} \leq 0$$

Ainsi, $(v_n)_n$ est décroissante.

- $v_n - S_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Par conséquent, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. D'après le théorème des suites adjacentes, elles convergent vers la même limite.

$$4. I_0 = \int_0^{\pi/2} \cos^0(t) dt = \int_0^{\pi/2} 1 dt = \frac{\pi}{2} \text{ et } J_0 = \int_0^{\pi/2} t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{24}.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors comme $t \mapsto \cos^{2n}(t)$ est une fonction positive sur $[0; \pi/2]$, par positivité de l'intégrale, $I_n \geq 0$. De plus, par linéarité de l'intégrale :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+2}(t) dt - \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t) dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)(\cos^2(t) - 1) dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)(-\sin^2(t)) dt$$

Remarquons que, $t \mapsto \cos^{2n}(t)(-\sin^2(t))$ est une fonction négative sur $[0; \pi/2]$, ainsi par positivité de l'intégrale $I_{n+1} - I_n \leq 0$. Ceci prouve que $(I_n)_n$ est une suite décroissante. On a donc prouvé que $(I_n)_n$ est une suite décroissante de réels positifs.

$$6. \text{ Posons } x = \frac{\pi}{2} - t, \text{ alors } dx = -dt. \text{ Ainsi, } I_n = \int_{\pi/2}^0 \left(\cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right)^{2n} (-dx) = \int_0^{\pi/2} \sin(x)^{2n} dx.$$

7. Une primitive de $t \mapsto \cos^{2n}(t) \sin(t)$ est $t \mapsto -\frac{\cos^{2n+1}(t)}{2n+1}$. La dérivée de $t \mapsto \sin(t)$ est $t \mapsto \cos(t)$.
8. Comme on l'a déjà démontré à la question 5 :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos^{2n}(t)(-\sin(t))}_{u'(t)} \times \underbrace{\sin(t)}_{v(t)} dt$$

Posons alors $u: t \mapsto \frac{\cos^{2n+1}(t)}{2n+1}$ et $v: t \mapsto \sin(t)$. Ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \pi/2]$, $u': t \mapsto -\cos^{2n}(t) \sin(t)$ et $v': t \mapsto \cos(t)$, ainsi par intégration par parties :

$$I_{n+1} - I_n = \left[\underbrace{\frac{\cos^{2n+1}(t)}{2n+1}}_{u(t)} \underbrace{\sin(t)}_{v(t)} \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \underbrace{\frac{\cos^{2n+1}(t)}{2n+1}}_{u(t)} \times \underbrace{\cos(t)}_{v'(t)} dt$$

Comme le terme entre crochets est nul, on obtient $I_{n+1} - I_n = -\frac{1}{2n+1} I_{n+1}$. Dès lors $\frac{2n+2}{2n+1} I_{n+1} = I_n$.

Par conséquent, $I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n$.

9. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n) : \ll I_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \gg$. Pour $n = 0$, $\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = I_0$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vérifiée, alors, en utilisant la question 8, on obtient

$$I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n = \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{2(n+1)2(n+1)4^n (n!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)!}{4^{n+1} ((n+1)!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

10. En effectuant une intégration par parties, où on a posé $u: t \mapsto t$, et $v: t \mapsto \cos^{2n}(t)$, u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, $u': t \mapsto 1$ et $v': t \mapsto -2n \sin(t) \cos^{2n-1}(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \underbrace{1}_{u'(t)} \times \underbrace{\cos^{2n}(t)}_{v(t)} dt = \left[\underbrace{t}_{u(t)} \underbrace{\cos^{2n}(t)}_{v(t)} \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \underbrace{t}_{u(t)} \times \underbrace{(-\sin(t) 2n \cos^{2n-1}(t))}_{v'(t)} dt \\ &= 2n \int_0^{\pi/2} t \sin(t) \cos^{2n-1}(t) dt \end{aligned}$$

Effectuons une seconde intégration par parties : posons $u: t \mapsto t^2/2$ et $v: t \mapsto \sin(t) \cos^{2n-1}(t)$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$, $u': t \mapsto t$ et $v': t \mapsto \cos^{2n}(t) - (2n-1) \sin^2(t) \cos^{2n-2}(t)$. On obtient :

$$\begin{aligned} I_n &= 2n \int_0^{\pi/2} \underbrace{t}_{u'(t)} \underbrace{\sin(t) \cos^{2n-1}(t)}_{v(t)} dt \\ &= 2n \left(\left[\underbrace{\frac{t^2}{2}}_{u(t)} \underbrace{\sin(t) \cos^{2n-1}(t)}_{v(t)} \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \underbrace{\frac{t^2}{2}}_{u(t)} \underbrace{(\cos^{2n}(t) - (2n-1) \sin^2(t) \cos^{2n-2}(t))}_{v'(t)} dt \right) \end{aligned}$$

En outre, le terme entre crochets est nul, de plus, $\sin^2 = 1 - \cos^2$. Ainsi,

$$I_n = 2n \left(-\frac{J_n}{2} + \frac{2n-1}{2} (J_{n-1} - J_n) \right)$$

Par conséquent, $I_n = -2n^2 J_n + n(2n-1) J_{n-1}$.

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \frac{\pi}{2} = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2J_n$. En outre, $K_n = \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}J_n$ et $K_{n-1} = \frac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n-2)!}J_{n-1}$. Ainsi :
- $$K_{n-1} - K_n = \frac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n-2)!}J_{n-1} - \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}J_n = \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!} \left(\frac{(2n-1)(2n)}{4n^2}J_{n-1} - J_n \right) = \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!} \frac{I_n}{2n^2} = \frac{\pi}{4n^2}$$
12. En reconnaissant une somme télescopique, on obtient $\sum_{i=1}^n K_{i-1} - K_i = K_0 - K_n$
13. Soit un entier $n \geq 1$, $\frac{\pi}{4}S_n = \sum_{i=1}^n \frac{\pi}{4i^2} = \sum_{i=1}^n K_{i-1} - K_i = K_0 - K_n = J_0 - K_n$
14. On pose $f: x \mapsto \frac{\pi}{2} \sin(x) - x$, f est alors dérivable sur $[0; \pi/2]$, avec $f': x \mapsto \frac{\pi}{2} \cos(x) - 1$. De plus, f' est dérivable et $f'': x \mapsto -\frac{\pi}{2} \sin(x)$, ainsi, f'' est négative sur $[0; \pi/2]$ et ne s'annule qu'en 0, ce qui montre que f' est strictement croissante sur $[0; \pi/2]$. Remarquons de plus, que $f'(0) > 0$ et $f'(\pi/2) < 0$. Ainsi, comme f' est continue et strictement croissante, il existe un unique $x_0 \in [0; \pi/2]$ tel que $f'(x_0) = 0$. Ainsi, f' est positive sur $[0; x_0]$, et donc pour tout $x \in [0; x_0]$, $f(x) \geq f(0) = 0$, et f' est négative sur $[x_0; \pi/2]$. ainsi pour tout $x \in [x_0; \pi/2]$, $f(x) \geq f(\pi/2) = 0$. Dès lors, pour tout $x \in [0; \pi/2]$, $f(x) \geq 0$. Ceci prouve que pour tout $x \in [0; \pi/2]$, $x \leq \frac{\pi}{2} \sin(x)$.

Problème 2 : les polynômes de la ferme

Cas particulier $\mathbb{R}_2[X]$

- $d^\circ(P+Q) \leq \max(d^\circ P, d^\circ Q)$ et $d^\circ(P-Q) = d^\circ(P+(-Q)) \leq \max(d^\circ P, d^\circ(-Q)) = \max(d^\circ P, d^\circ Q)$.
- $2X^2 + 10X + 12 = 2(X^2 + 5X + 6) = 2(X+3)(X+2)$. Comme $X+3$ et $X+2$ sont des polynômes de degré 1, ils sont bien irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
- Posons $P = (X-3)(X-4)$, alors $d^\circ P = 2$, $P(3) = P(4) = 0$. De plus, $P(5) = 2$.
- Posons $Q = \frac{1}{2}P = \frac{1}{2}(X-3)(X-4)$, alors $Q(3) = Q(4) = 0$ et $Q(5) = 1$.
- Soit R un autre polynôme de degré 2 tel que $R(3) = R(4) = 0$ et $R(5) = 1$. Posons alors $S = Q - R$, alors, $d^\circ S \leq \max(d^\circ Q, d^\circ R) = 2$. De plus, $S(3) = Q(3) - R(3) = 0 - 0 = 0$, $S(4) = Q(4) - R(4) = 0 - 0 = 0$ et $S(5) = Q(5) - R(5) = 1 - 1 = 0$, ainsi S a au moins trois racines et son degré est majoré par 2. D'après le cours $S = 0$ et donc $Q = R$. Ceci prouve qu'il existe un unique polynôme Q de degré 2 tel que $Q(3) = Q(4) = 0$ et $Q(5) = 1$.
- Donner alors, sans preuve et sous forme factorisée :
 - $L_2 = -(X-3)(X-5)$
 - $L_3 = \frac{1}{2}(X-4)(X-5)$
- Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec $B \neq 0$, alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ vérifiant $A = BQ + R$ et $d^\circ R < d^\circ B$.
- D'après l'écriture de la division euclidienne, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $X^n = L_1Q + R$ avec $d^\circ R < d^\circ L_1 = 2$. Ainsi, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}$ tel que $R = aX + b$. Dès lors, $X^n = QL_1 + aX + b$. En remplaçant X par 3, il vient $3^n = Q(3)L_1(3) + 3a + b = 3a + b$. En remplaçant X par 4, il vient $4^n = Q(4)L_1(4) + 4a + b = 4a + b$. On obtient donc le système suivant que l'on résout :

$$\begin{cases} 3^n = 3a + b \\ 4^n = 4a + b \end{cases} \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} 3^n = 3a + b \\ 4^n - 3^n = a \end{cases} \iff \begin{cases} a = 4^n - 3^n \\ b = 3^n - 3a = 4 \times 3^n - 4 \times 3^n \end{cases}$$

Ainsi, le reste de la division euclidienne de X^n par L_1 est $(4^n - 3^n)X + 4 \times 3^n - 3 \times 4^n$.

- Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Posons $Q = P - (P(5)L_1 + P(4)L_2 + P(3)L_3)$. Alors $Q(3) = P(3) - P(5)L_1(3) - P(4)L_2(3) - P(3)L_3(3) = 0$. De même $Q(4) = P(4) - P(5)L_1(4) - P(4)L_2(4) - P(3)L_3(4) = 0$, et $Q(5) = P(5) - P(5)L_1(5) - P(4)L_2(5) - P(3)L_3(5) = 0$. Ainsi, $d^\circ Q \leq 2$ et Q a au moins trois racines donc $Q = 0$ ainsi, $P = P(5)L_1 + P(4)L_2 + P(3)L_3$.

10. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, alors en utilisant le résultat de la question précédente et la linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^1 P(x) dx = \int_0^1 P(5)L_1(x) + P(4)L_2(x) + P(3)L_3(x) dx = P(5) \int_0^1 L_1(x) dx + P(4) \int_0^1 L_2(x) dx + P(3) \int_0^1 L_3(x) dx$$

Notons, pour $i \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$, $\lambda_i = \int_0^1 L_i(x) dx \in \mathbb{R}$, alors $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont des constantes, indépendantes de P , qui vérifient, pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

$$\int_0^1 P(x) dx = P(5)\lambda_1 + P(4)\lambda_2 + P(3)\lambda_3$$

11. Posons $P = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (X - a_k)$. Alors comme P est un produit de n polynômes de degré 1, $d^\circ P = n$ et

$P \in \mathbb{R}_n[X]$. Soit $j \in \llbracket 0; n \rrbracket \setminus \{i\}$, alors $P(a_j) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (a_j - a_k)$. Mais comme $j \in \llbracket 0; n \rrbracket \setminus \{i\}$, il y a un terme dans ce produit où $k = j$, ainsi $P(a_j) = 0$.

12. Considérons $P = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (X - a_k)$, remarquons que $P(a_i) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (a_i - a_k)$. Or comme $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ est un $n+1$ -uplet de réels deux à deux distincts, dès que $i \neq k$, $a_i - a_k \neq 0$. Par produit de nombres non nuls, $P(a_i) \neq 0$. Ainsi, on peut poser $L_i = \frac{P}{P(a_i)}$. On remarque alors que $L_i(a_i) = \frac{P(a_i)}{P(a_i)} = 1$. De plus, pour $j \in \llbracket 0; n \rrbracket \setminus \{i\}$, $L_i(a_j) = \frac{P(a_j)}{P(a_i)} = 0$. Ainsi, pour tout $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$.

13. Posons $Q = P - \sum_{k=0}^n P(a_k)L_k$. Soit $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $Q(a_i) = P(a_i) - \sum_{k=0}^n P(a_k)L_k(a_i) = P(a_i) - P(a_i) = 0$. De plus, $d^\circ Q \leq n$ (somme de polynômes de degrés inférieurs ou égale à n). On en déduit que Q a au moins $n+1$ racines. Ainsi, $Q = 0$ et donc $P = \sum_{k=0}^n P(a_k)L_k$.

14. Prenons $P = 1$, alors d'après la question précédente, $1 = \sum_{k=0}^n L_k$.

Prenons $P = X$, alors d'après la question précédente $X = \sum_{k=0}^n a_k L_k$.