Chapitre 1

Logique

Dans ce premier chapitre, nous allons (re)voir quelques principes de logique et méthodes de raisonnement. Ces principes et ces méthodes seront, par la suite, utilisés dans tous les autres chapitres.

Table des matières

1 Propositions et connecteurs logiques

Définition d'une proposition/assertion

On appelle **proposition/assertion** toute phrase (mathématique) $\mathscr{P}$ à laquelle on peut répondre par vrai ou faux. Si la phrase $\mathscr{P}$ dépend d'une variable x appartient à un ensemble E, on note $\mathscr{P}(x)$ au lieu de $\mathscr{P}$.

Exemple 1.
- «L'équation $x^2+1=0$ admet une solution réelle.»
- «4 est un entier pair.»
- «La fonction racine carrée est dérivable en zéro.»
- «La fonction racine carrée est continue en zéro.»
- Si $E=\mathbb{N}$ et $\mathscr{P}(n)$ est «n est pair». Alors, $\mathscr{P}(4)$ et $\mathscr{P}(3)$ sont bien des propositions.

Définition des quantificateurs afin d'écrire des propositions

- Le **quantificateur universel** $\forall$: la proposition «$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geqslant 0$» se lit «pour tout x réel, $x^2 \geqslant 0$».
- Le **quantificateur existentiel** $\exists$: la proposition «$\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 = 9$» se lit «il existe un réel x tel que $x^2=9$».
- Le (pseudo) quantificateur $\exists!$: «$\exists! x \in \mathbb{R}_+ \quad x^2 = 9$» se lit «il existe un unique réel x positif tel que $x^2=9$».

Remarque 1. Les quantificateurs sont aussi utilisés dans les définitions.

Exemple 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que n est pair si
$$\exists k \in \mathbb{N} \quad n = 2k$$
On dit que n est impair si
$$\exists k \in \mathbb{N} \quad n = 2k+1$$

Exemple 3. On peut, bien sûr, combiner les quantificateurs pour obtenir des propositions plus intéressantes :
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad y = x^2$
- $\exists y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad y = x^2$
- $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in [-\delta\,;\delta] \quad 1-\varepsilon \leqslant \exp(x) \leqslant 1+\varepsilon$

Péril imminent : à l'ordre des quantificateurs

On ne peut pas permuter un $\forall$ et un $\exists$. Cependant, on peut permuter deux $\forall$ ou deux $\exists$.

Attention les lettres sont muettes

Écrire «$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geqslant 0$» revient évidemment à «$\forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 \geqslant 0$», on dit que la lettre x (ou y) est muette. Cette lettre peut donc être remplacée par n'importe quelle autre lettre non encore utilisée dans la proposition.

Comment montrer une proposition avec un $\forall$ ou un $\exists$ ou un $\exists!$?

- S'il faut montrer «$\forall x \in E \ldots$» : ne pas réfléchir, et commencer à écrire «Soit $x \in E$.», puis essayer de démontrer la fin de la proposition avec ce x fixé.
- S'il faut montrer «$\exists x \in E \ldots$», c'est plus difficile. Il faut trouver un tel x.
  — Si savez quel x prendre, alors commencer par «Posons $x = \ldots$» et vérifier que ce x convienne.
  — Si vous ne savez pas quel x prendre : l'analyse-synthèse, l'absurde peuvent vous aider.
- S'il faut montrer «$\exists! x \in E \ldots$», commencer par montrer l'existence d'un tel x (voir point précédent) puis montrer l'unicité (souvent, on prend x et x' vérifiant la propriété et montrer que $x = x'$).

Exemple 4. Démontrer les propositions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) \neq 0$
2. $\exists x \in \mathbb{R} \quad \sin(x) = 0$
3. $\exists! x \in \mathbb{R}_+ \quad x^2 = 9$

Démonstration de l'exemple 4 :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $1 = \exp(0) = \exp(x - x) = \exp(x)\exp(-x)$, ainsi, $\exp(x) \neq 0$. Dès lors, on a montré que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \neq 0$.
2. Posons $x = 0 \in \mathbb{R}$, alors $\sin(x) = 0$. Dès lors, on a montré qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sin(x) = 0$.
3. Posons $x = 3 \in \mathbb{R}_+$, alors $x^2 = 9$ (on a ainsi montré l'existence). Soit $x' \in \mathbb{R}_+$ tel que $x'^2 = 9$, ainsi, $x'^2 = 3^2$, donc $(x' - 3)(x' + 3) = 0$. Ainsi, $x' - 3 = 0$ ou $x' + 3 = 0$, donc $x' = 3$ ou $x' = -3 \notin \mathbb{R}_+$. Par conséquent, $x' = 3$ (on a ainsi montré l'unicité). Dès lors, on a montré qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $x^2 = 9$.

Définition de la négation d'une proposition

Soit $\mathscr{P}$ une proposition. On appelle **négation** de $\mathscr{P}$, notée non$(\mathscr{P})$, la proposition qui est fausse si $\mathscr{P}$ est vraie et qui est vraie si $\mathscr{P}$ est fausse.

Exemple 5.
- Si $\mathscr{P}$ «2 est pair», alors non$(\mathscr{P})$ est «2 n'est pas pair».
- Quelle est la négation de «tous les élèves de cette classe ont un T-Shirt vert» ?

Comment nier des propositions avec des quantificateurs ?

La négation de «$\forall x \in E \quad \mathscr{P}(x)$» est «$\exists x \in E \quad \text{non}(\mathscr{P}(x))$».
La négation de «$\exists x \in E \quad \mathscr{P}(x)$» est «$\forall x \in E \quad \text{non}(\mathscr{P}(x))$».

Exemple 6. Nier les propositions suivantes :
- $\forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad y = \exp(x)$
- $\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad y = x^2$
- $\exists M > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) \leqslant M$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists M > 0 \quad \exp(x) \leqslant M$

Définition du «et» et du «ou» de deux propositions

Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux propositions.
- La proposition «$\mathscr{P}$ **et** $\mathscr{Q}$» est la proposition qui est vraie lorsque que $\mathscr{P}$ **et** $\mathscr{Q}$ sont vraies. Dans le cas contraire, «$\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$» est fausse.
- La proposition «$\mathscr{P}$ **ou** $\mathscr{Q}$» est la proposition qui est vraie lorsque qu'au moins une des deux propositions $\mathscr{P}$ **ou** $\mathscr{Q}$ est vraie. Dans le cas contraire, «$\mathscr{P}$ ou $\mathscr{Q}$» est fausse.

Exemple 7. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
1. «$9 \geqslant 0$ et 2 est pair.»
2. «$9 \geqslant 0$ et 1 est pair.»
3. «$9 \geqslant 0$ ou 2 est pair.»
4. «$9 \geqslant 0$ ou 1 pair.»

Démonstration de l'exemple 7 :

1. Vrai
2. Faux (car 1 n'est pas pair)
3. Vrai (car $9 \geqslant 0$ et 2 est pair, le «ou» est inclusif, si $\mathscr{P}$ est vrai et $\mathscr{Q}$ est vrai, alors «$\mathscr{P}$ ou $\mathscr{Q}$» est vrai)
4. Vrai

Définition de l'implication, de la réciproque, de l'équivalence, de la contraposée

Soient $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$ deux propositions.
- On dit que $\mathscr{P}$ implique $\mathscr{Q}$ si, $\mathscr{Q}$ est vraie dès que $\mathscr{P}$ est vraie. On note «$\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$» cette proposition.
- La proposition «$\mathscr{Q} \Longrightarrow \mathscr{P}$» est appelé **implication réciproque** de «$\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$».
- La proposition «non$(\mathscr{Q}) \Longrightarrow$ non$(\mathscr{P})$» est appelée **contraposée** de «$\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$».
- Si $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$, on dit que $\mathscr{Q}$ est une **condition nécessaire** de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}$ est une **condition suffisante** de $\mathscr{Q}$.
- Si «$\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$ et $\mathscr{Q} \Longrightarrow \mathscr{P}$» est vraie, on dit que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont **équivalentes** et on note «$\mathscr{P} \iff \mathscr{Q}$», on dit que $\mathscr{P}$ est une **condition nécessaire et suffisante** de $\mathscr{Q}$.

Exemple 8. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'implication «$x \geqslant 2 \Longrightarrow x^2 \geqslant 4$» est vraie.

Attention français ou mathématiques, il faut choisir

Les symboles $\forall$, $\exists$, $\Longrightarrow$ etc. sont utilisés dans des phrases mathématiques. Ils ne doivent surtout pas être utilisés dans des phrases en français comme abréviation.
En particulier, $\Longrightarrow$ **n'est pas un un raccourci de «donc»**, car n'a absolument pas le même sens.
Noter que l'utilisation de $\in$ dans une phrase en français est tolérée.

Remarque 2. Comme ces propositions dépendent des valeurs de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{Q}$, on peut résumer les différents cas dans une table de vérité :

$\mathscr{P}$	$\mathscr{Q}$	non($\mathscr{P}$)	$\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$	$\mathscr{P}$ ou $\mathscr{Q}$	$\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$	$\mathscr{Q} \Longrightarrow \mathscr{P}$	$\mathscr{P} \Longleftrightarrow \mathscr{Q}$
V	V						
V	F						
F	V						
F	F						

Attention à la réciproque

Il est tout à fait possible que l'implication $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$ soit vraie sans que l'implication $\mathscr{Q} \Longrightarrow \mathscr{P}$ le soit. Pour $x \in \mathbb{R}$, l'implication «$x \geqslant 0 \Longrightarrow x^2 \geqslant 0$» est vraie. Cependant, «$x^2 \geqslant 0 \Longrightarrow x \geqslant 0$» est fausse (prendre $x = -2$).

Remarque 3. $\mathscr{P} \iff \mathscr{Q}$ est vraie dès que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ ont les mêmes valeurs dans la table de vérité.

Proposition n° 1 : négation de propositions avec des implications des équivalences des et/ou

Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux propositions.

- $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q} \iff (\text{non}(\mathscr{Q}) \Longrightarrow \text{non}(\mathscr{P}))$ une implication et sa contraposée sont équivalentes
- $\mathscr{P} \iff \mathscr{Q} \iff (\text{non}(\mathscr{Q}) \iff \text{non}(\mathscr{P}))$
- La négation de «$\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$» est «$\mathscr{P}$ et non($\mathscr{Q}$)» la négation d'une implication n'est pas une implication
- La négation de «$\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$» est «non($\mathscr{P}$) ou non($\mathscr{Q}$)»
- La négation de «$\mathscr{P}$ ou $\mathscr{Q}$» est «non($\mathscr{P}$) et non($\mathscr{Q}$)»

2 Modes de raisonnement

2.1 Raisonnement par récurrence

La récurrence repose sur le théorème suivant :

Théorème n° 1 : récurrence *(admis)*

Soit $\mathscr{P}(n)$ une propriété qui dépend d'un entier n. Si les deux propositions suivantes sont vérifiées :

1. $\mathscr{P}(0)$
2. $\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathscr{P}(n) \quad \Longrightarrow \quad \mathscr{P}(n+1)$

Alors, on peut on conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Remarque 4. Si on remplace le point 1 par $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie et le point 2 par pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n)$ implique $\mathscr{P}(n+1)$, alors on conclut seulement que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n)$ est vrai.

Exemple 9. Montrer que tout entier naturel est pair ou impair.

Remarque 5. Parfois les récurrences simples ne suffisent pas, on peut donc utiliser une récurrence dite double :

Théorème n° 2 : récurrence double
Soit $\mathscr{P}(n)$ une propriété qui dépend de n. On suppose que
- $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ vraies
- $\forall n \in \mathbb{N} \qquad (\mathscr{P}(n) \text{ et } \mathscr{P}(n+1)) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+2)$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Démonstration du théorème n° 2 : Posons, pour $n \in \mathbb{N}$ l'hypothèse de récurrence $\mathscr{Q}(n)$: «$\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies».
- $\mathscr{Q}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{Q}(n)$ vraie. Alors, $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies, par hypothèse, on en déduit que $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie. Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ et $\mathscr{P}(n+2)$ sont vraies. Par conséquent, $\mathscr{Q}(n+1)$ est vraie.
- Par récurrence simple, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{Q}(n)$ est vraie, en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie. ■

Exemple 10. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 = u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + {u_n}^2$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est pair.

Remarque 6. On peut aussi faire démarrer les récurrences doubles à un entier $n_0 \in \mathbb{N}$, il faudra donc vérifier $\mathscr{P}(n_0)$ et $\mathscr{P}(n_0+1)$. On a utilisé une récurrence double dans l'exemple précédent, car on avait besoin d'une information sur u_{n+1} et sur u_n pour conclure. Parfois, on a besoin que la proposition soit vraie pour tous les rangs inférieurs. Dans ce cas, on effectue une récurrence dite forte :

Théorème n° 3 : récurrence forte
Soit $\mathscr{P}(n)$ une propriété qui dépend de n. On suppose que
- $\mathscr{P}(0)$
- $\forall n \in \mathbb{N}$ $(\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ et $\mathscr{P}(2)$ et ... et $\mathscr{P}(n)) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Démonstration du théorème n° 3 : Posons, pour $n \in \mathbb{N}$ l'hypothèse de récurrence $\mathscr{Q}(n)$: « pour tout $k \in [\![0 \,;n]\!] = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie».
- Comme $\mathscr{P}(0)$ est vraie, $\mathscr{Q}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{Q}(n)$ vraie. Alors, pour tout $k \in [\![0 \,;n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie, par hypothèse, on en déduit que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Par conséquent, $\mathscr{Q}(n+1)$ est vraie.
- Par récurrence simple, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{Q}(n)$ est vraie, en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie. ■

Exemple 11. Démontrer que tout entier $n \geqslant 2$ est divisible par au moins un nombre premier.

2.2 Raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde consiste à supposer le contraire de ce que l'on veut montrer pour aboutir à une contradiction.

Exemple 12. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que n ne peut pas être à la fois pair et impair.

Remarque 7. Ainsi, tout entier naturel est soit pair soit impair mais pas les deux à la fois.

2.3 Démontrer une implication

Pour démontrer «$\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$», on commence souvent par supposer que $\mathscr{P}$ est vraie et on montre que $\mathscr{Q}$ l'est.

Exemple 13. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, «n pair $\Longrightarrow n^2$ pair».

Démonstration de l'exemple 13 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons n pair. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$, alors $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. Posons $p = 2k^2 \in \mathbb{N}$, ainsi, $n^2 = 2p$. Par conséquent, n^2 est pair.
Une autre méthode est d'utiliser la contraposée, on démontre que non$(\mathscr{Q}) \Longrightarrow$ non$(\mathscr{P})$.

Exemple 14. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a «n^2 pair $\Longrightarrow n$ pair».

Démonstration de l'exemple 14 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons n impair. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$, ainsi, $n^2 = (2k+1)^2 = (2k)^2 + 2 \times (2k) \times 1 + 1^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Posons $p = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$, alors $n^2 = 2p + 1$, par conséquent, n^2 est impair. On a ainsi montré que n impair implique que n^2 impair. Dès lors, par contraposée, n^2 pair implique que n pair.

2.4 Exemple classique de raisonnement par l'absurde

Montrer qu'un nombre n'est pas rationnel

$\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Démonstration que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$: Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Comme $\sqrt{2} > 0$. Cela veut dire qu'il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux. Alors, $2 = \frac{p^2}{q^2}$ et donc $2q^2 = p^2$. Ainsi, p^2 est un nombre pair, d'après l'exemple 14, p est un nombre pair, ainsi il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2k$. Par conséquent $2q^2 = (2k)^2 = 4k^2$ donc $q^2 = 2k^2$. Dès lors, q^2 est un nombre pair, encore une fois, on en déduit que q est pair, ainsi p et q sont tous les deux pairs ce qui est une contradiction car p et q sont premiers entre eux. Ainsi, comme on a obtenu une contradiction, on peut en conclure que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

2.5 Analyse-Synthèse

L'analyse-synthèse s'utilise lorsqu'on cherche des objets satisfaisant des propriétés demandées. Elle consiste en deux étapes :

- **L'analyse** : on supposera que le ou les objets existent réellement et on cherche la forme de ces objets
- **La synthèse** : on pose les objets trouvés dans l'analyse et on vérifie qu'ils ont bien les propriétés demandées.

Parfois l'analyse-synthèse fournit même l'unicité de l'objet demandé.

Exemple 15. Résoudre $\sqrt{x+6} = x$

Toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ est somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique fonction paire, notée p, et une unique fonction impaire, notée i, tel que $f = p + i$.

Démonstration : toute fonction est somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrons qu'il une unique fonction paire, notée p, et une unique fonction impaire, notée i, telles que $f = p + i$. Comme nous n'avons aucune idée de qui prendre pour p et pour i, on va procéder par analyse-synthèse :

- **Analyse :** supposons qu'il existe p et i deux fonctions telles que $f = p + i$ avec p une fonction paire et i une fonction impaire. Le but est de trouver une expression de p et de i. Comme p et i sont des fonctions, cela revient au même de calculer $p(x)$ et $i(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Fixons $x \in \mathbb{R}$, en particulier, comme $f = p + i$, $f(x) = p(x) + i(x)$. Comme p est paire $p(-x) = p(x)$ et $i(-x) = -i(x)$. Ainsi, $f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x)$. Dès lors, on a un système de deux équations $\begin{cases} p(x) + i(x) & = & f(x) \\ p(x) - i(x) & = & f(-x) \end{cases}$ dont les inconnues sont $p(x)$ et $i(x)$. En effectuant la somme, on obtient que $2p(x) = f(x) + f(-x)$ et en effectuant la différence, on obtient $2i(x) = f(x) - f(-x)$. Ainsi, $p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$. Par conséquent, on a montré que si p et i existent, alors $p : x \mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $i : x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2}$
- **Synthèse :** posons les fonctions $p : \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $i : x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ et montrons qu'elles répondent au problème posé :
  - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = p(x)$, ainsi p est paire.
  - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $i(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = -i(x)$, ainsi i est impaire.
  - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p(x) + i(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x)$, ainsi $p + i = f$.

Ainsi, la synthèse a bien démontré l'existence de p paire et i impaire telle que $f = p + i$ (vu que l'on a été capable de poser un p et un i qui convient). L'analyse a bien démontré l'unicité (vu que si p et i vérifient les conditions du problèmes, p et i ont été entièrement déterminés).