

Correction de l'exercice 1.

Correction de l'exercice 2.

Correction de l'exercice 3. • Supposons \mathcal{P} , ainsi, on peut considérer $x \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $f \in F$, $f(x) = 0$. Montrons \mathcal{Q} . Soit $f \in F$, il faut alors chercher un réel qui annule f , mais comme $f(x) = 0$ c'est vérifié. Ainsi, on a montré que \mathcal{P} implique \mathcal{Q} .

- Cependant \mathcal{Q} n'implique pas \mathcal{P} . Pour le montrer, il suffit de trouver un ensemble F tel que \mathcal{Q} soit vraie sans que \mathcal{P} le soit. Prenons $F = \{\cos, \sin\}$, alors comme $\cos(\pi/2) = 0$ et $\sin(0) = 0$, \mathcal{Q} est bien vraie. Cependant, il n'existe pas de $x \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(x) = \sin(x) = 0$. En effet, s'il en existait, on aurait $1 = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 0 + 0 = 0$ ce qui serait absurde. Ainsi, \mathcal{P} est faux. On a donc montré que \mathcal{Q} n'impliquait pas \mathcal{P} .

Correction de l'exercice 4.

Correction de l'exercice 5.

Correction de l'exercice 6. Montrons la contraposée de l'implication. Supposons donc $x \neq 0$, comme $x \in \mathbb{R}_+$, on peut donc en déduire que $x \in \mathbb{R}_+^*$. Posons alors $\varepsilon = x > 0$, alors on a $x \geq \varepsilon$. Ainsi, on a montré qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x \geq \varepsilon$. On a ainsi montré que :

$$x \neq 0 \implies (\exists \varepsilon > 0 \quad x \geq \varepsilon)$$

Par contraposée, on obtient le résultat demandé.

Correction de l'exercice 7. Supposons, par l'absurde, que $\ln(2)/\ln(3)$ soit rationnel. Comme $\ln(2)/\ln(3) > 0$,

$$\exists p \in \mathbb{N}^* \quad q \in \mathbb{N}^* \quad \frac{\ln 2}{\ln 3} = \frac{p}{q}$$

Alors $q \ln(2) = p \ln(3)$, en passant à l'exponentielle, on obtient $2^q = 3^p$. Comme $q \geq 1$, $2^q = 2 \times 2^{q-1}$ est pair. Or, on va montrer que 3^p est impair. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « 3^n est impair». Pour $n = 0$, $3^0 = 1$ est impair, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Il existe alors $p \in \mathbb{N}$ tel que $3^n = 2p + 1$, alors

$$3^{n+1} = 3 \times 3^n = 3 \times (2p + 1) = 2(3p + 1) + 1$$

Ceci montre que 3^{n+1} est impair, donc que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, on a donc montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 3^n est impair.

En particulier $3^p = 2^q$ est donc à la fois pair et impair. Ceci est absurde. Dès lors, on a montré que $\ln(2)/\ln(3)$ est un nombre irrationnel.

Correction de l'exercice 8.

Correction de l'exercice 9. Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} dérivable en 0. Montrons qu'il existe $g \in G$ et $h \in H$ telles que $f = g + h$.

- **Analyse** : supposons qu'il existe $g \in G$ et $h \in H$ telles que $f = g + h$. Alors, $g \in G$ donc g est une fonction affine, ainsi il existe $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ tels que $g : x \mapsto ax + b$. De plus, $h \in H$ donc $h(0) = 0$ et $h'(0) = 0$. Comme $f = g + h$, on a $f(0) = g(0) + h(0) = b + 0$, de plus, remarquons que f , g et h sont dérivables en 0. Ainsi en dérivant en 0 :

$$f'(0) = g'(0) + h'(0) = a + 0$$

On a alors montré que $a = f'(0)$ et $b = f(0)$, ainsi $g : x \mapsto f'(0)x + f(0)$ et $h = f - g$, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = f(x) - (f'(0)x + f(0)) = f(x) - f'(0)x - f(0)$$

- **Synthèse** : posons $g : x \mapsto f'(0)x + f(0)$ et $h : x \mapsto f(x) - f'(0)x - f(0)$. Alors, g et h sont deux fonctions définies sur \mathbb{R} , montrons qu'elles vérifient les conditions demandées :

- g est une fonction affine donc $g \in G$.
- $h(0) = f(0) - f'(0) \times 0 - f(0) = 0$, comme f est dérivable en 0, on a que h est dérivable en 0 et $h'(0) = f'(0) - f'(0) = 0$, ainsi $h \in H$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) + h(x) = (f'(0)x + f(0)) + (f(x) - f'(0)x - f(0)) = f(x)$$

Ainsi, $f = g + h$.

En conclusion, la synthèse, démontre l'existence de $g \in G$ et de $h \in H$ telles que $f = g + h$. L'analyse démontre leur unicité.

Correction de l'exercice 10. Raisonnons par analyse-synthèse :

- **Analyse** : soit f une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R}_+^* telles que pour tout $x > 0$ et pour tout $y > 0$, $f(xy) = f(x) + f(y)$. Remarquons que pour $x = y = 1$, on obtient $f(1) = f(1) + f(1)$, soit $f(1) = 0$. Fixons $y > 0$, et posons, pour $x > 0$, $g(x) = f(xy) - f(x) - f(y) = 0$. Alors, comme différence de fonctions dérivables, g est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et pour tout $x > 0$, $g'(x) = yf'(xy) - f'(x) = 0$. En particulier, pour $x = 1$, $yf'(y) = f'(1)$. Ainsi, pour tout $y > 0$, $f'(y) = f'(1)/y$. Comme les lettres sont muettes, il en découle que

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{f'(1)}{x}$$

Alors, en primitivant, il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$, $f(x) = f'(1) \ln(x) + c$. En remplaçant x par 1, on trouve que $0 = f'(1) \ln(1) + c$, donc $c = 0$. En notant $a = f'(1) \in \mathbb{R}$, a donc montré que $f: x \mapsto a \ln(x)$.

- **Synthèse** : soit $a \in \mathbb{R}$, posons $f: x \mapsto a \ln(x)$. Alors f est définie et dérivable sur \mathbb{R}_+^* et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad f(xy) = a \ln(xy) = a \ln(x) + a \ln(y) = f(x) + f(y)$$

Ainsi, f est bien solution de l'équation.

En conclusion, la synthèse montre que les fonctions de la forme $x \mapsto a \ln(x)$ où $a \in \mathbb{R}$ sont solutions de l'équation. L'analyse, montre que ce sont les seuls fonctions qui vérifient cette équation. Ainsi, les fonctions qui vérifient la relation demandée sont exactement les fonctions de la forme $x \mapsto a \ln(x)$ où $a \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 11. 1. Posons $\mathcal{P}(n) : \ll u_n \in]0; \pi/2[\gg$

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie par hypothèse.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, alors $0 < u_n < \pi/2$, or la fonction sinus est strictement croissante sur $]0; \pi/2[$, ainsi $\sin(0) < \sin(u_n) < \sin(\pi/2)$ donc $0 < u_{n+1} < 1 < \pi/2$, ainsi on a montré que $u_{n+1} \in]0; \pi/2[$.
- Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0; \pi/2[$.

2. Posons $\mathcal{P}(n) : \ll u_n = 2^n + 3^n \gg$ et raisonnons par récurrence double :

- Pour $n = 0$, $2^n + 3^n = 2 = u_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Pour $n = 1$, $2^n + 3^n = 5 = u_1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 5u_{n+1} - 6u_n \stackrel{\mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n+1)}{=} 5(2^{n+1} + 3^{n+1}) - 6(2^n + 3^n) = 2^n(10 - 6) + 3^n(15 - 6) \\ &= 4 \times 2^n + 9 \times 3^n = 2^{n+2} + 3^{n+2} \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

- Par récurrence double, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 3^n$.

3. On définit l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n) : \ll u_n = n(n-1) \gg$.

- Pour $n = 0$, $n(n-1) = 0 = u_0$, pour $n = 1$, $n(n-1) = 0 = u_1$, pour $n = 2$, $n(n-1) = 2 = u_2$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$, $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$, $\mathcal{P}(n+1)$ et $\mathcal{P}(n+2)$ vraies, alors :

$$\begin{aligned} u_{n+3} &= 3(n+2)(n+1) - 3(n+1)n + n(n-1) = 3(n+2)(n+1) + n(-3(n+1) + (n-1)) \\ &= 3(n+2)(n+1) + n(-2n-4) = (n+2)(3(n+1) - 2n) = (n+2)(n+3) \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+3)$ est vraie.

- Par récurrence triple, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n(n-1)$.
4. On définit l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$: « n se décompose comme un produit de nombres premiers».
- 2 étant premier, 2 est bien un produit de nombres premiers (avec un seul terme dans le produit).
 - Soit un entier $n \geq 2$. Supposons que pour tout $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$, $\mathcal{P}(k)$ vraie. Considérons $n+1$, alors :
 - Si $n+1$ est premier, alors $n+1$ se décompose bien comme un produit de nombres premiers.
 - Si $n+1$ n'est pas premier, alors il existe deux entiers naturels a et b tel que $n+1 = ab$ avec $a \neq 1$ et $b \neq 1$, alors $a \geq 2$ et $b \geq 2$. Comme $a \geq 2$, $b < n+1$ et donc $b \leq n$, et comme $b \geq 2$, $a < n+1$ et donc $a \leq n$. En particulier, $a \in \llbracket 2; n \rrbracket$ et $b \in \llbracket 2; n \rrbracket$. Donc, par hypothèse, $\mathcal{P}(a)$ et $\mathcal{P}(b)$ sont vraies. Ainsi, $a = p_1 p_2 \dots p_r$ et $b = q_1 q_2 \dots q_s$ avec p_i et q_j des nombres premiers pour tout $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1; s \rrbracket$. En particulier, $n+1 = ab = p_1 p_2 \dots p_r q_1 q_2 \dots q_s$ est bien un produit de nombres premiers.
- Ainsi, dans tous les cas, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Par récurrence forte, tout entier naturel $n \geq 2$ se décompose en produit de nombres premiers.

Remarque 1. On peut montrer que cette décomposition est unique (à l'ordre des facteurs près) mais cela est une autre histoire.

Correction de l'exercice 12. 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}$ et l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$: « $A_n \in \mathbb{Z}$ ».

- $\mathcal{P}(1)$ est vraie par hypothèse. Comme $A_1 \in \mathbb{Z}$, on a aussi $A_1^2 \in \mathbb{Z}$, ainsi $\alpha^2 + 2\alpha \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} = A_2 + 2 \in \mathbb{Z}$. Ainsi, $A_2 = (A_2 + 2) - 2 \in \mathbb{Z}$ (en tant que différence de deux entiers). Donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$. Alors $A_{n+1}A_1 \in \mathbb{Z}$ (produit de deux entiers), ainsi :

$$A_{n+1}A_1 = \left(\alpha^{n+1} + \frac{1}{\alpha^{n+1}} \right) \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) = \alpha^{n+2} + \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} + \frac{1}{\alpha^{n+2}} = A_{n+2} + A_n$$

Ainsi, $A_{n+2} = A_{n+1}A_1 - A_n$ est entier en tant que différence de deux entiers. Dès lors, $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

- Par récurrence double, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Z}$.

2. Posons (au hasard¹) $\alpha = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 0$, alors

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{2}{3 + \sqrt{5}} = \frac{2(3 - \sqrt{5})}{(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})} = \frac{2(3 - \sqrt{5})}{4} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

Ainsi, $\alpha + \frac{1}{\alpha} = 3 \in \mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 13. Supposons que I contienne deux entiers distincts Notons n et m ces deux entiers, $n \neq m$. Quitte à échanger les noms de n et m , on peut supposer que $m > n$, comme m et n sont des entiers, nécessairement, $m \geq n+1$. Comme m et n sont dans l'intervalle I , on a $\alpha \leq n \leq m \leq \beta$, alors $m - n \leq \beta - \alpha < 1$. Or $m - n \geq 1$, on obtient donc $1 < 1$ ce qui est absurde. Ainsi, I ne peut pas contenir plus d'un entier.

Correction de l'exercice 14. On va directement montrer le résultat pour un entier $b \geq 2$ (remplacer b par 10) pour la première partie de l'exercice. Posons, l'hypothèse de récurrence : $\mathcal{P}(n)$: il existe $N \in \mathbb{N}$ et a_0, a_1, \dots, a_N dans $\{0, 1, 2, \dots, b-1\}$ tels que $n = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \dots + a_N b^N$.

- Pour $n = 0$. Alors, on pose $N = 1$ et $a_0 = 0$. Alors $n = a_0$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

1. Les lecteurs curieux doivent se demander d'où sort un tel α . Il suffit de chercher α tel que $\alpha + \frac{1}{\alpha} = 3$ (mais ça pourrait être 18), alors α et $\frac{1}{\alpha}$ sont solution du polynôme $(X - \alpha)(X - 1/\alpha) = X^2 - (\alpha + 1/\alpha)X + 1 = X^2 - 3X + 1$. Ensuite, il n'y a plus qu'à trouver les racines de ce polynôme. Sur une copie, pas besoin d'expliquer tout ceci, poser juste l'élément qui convient d'après vous, et vérifier qu'il convient. Vous n'êtes pas obligé d'expliquer comment vous est venu une idée aussi géniale : après tout, vous avez le droit d'être un génie!

- Pour $n = 1$. Alors, on pose $N = 1$ et $a_0 = 1 \in \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$ (car $b \geq 2$). Alors $n = a_0$. Ainsi, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que pour tout entier $k \leq n$, $\mathcal{P}(k)$ vraie. En particulier, pour $\mathcal{P}(n)$, il existe $N \in \mathbb{N}$ et a_0, a_1, \dots, a_N dans $\{0, 1, 2, \dots, b-1\}$ tels que $n = a_0 + a_1b + a_2b^2 + \dots + a_Nb^N$. Considérons alors $n + 1 = a_0 + 1 + a_1b + a_2b^2 + \dots + a_Nb^N$. Comme $a_0 \in \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$, $a_0 + 1$ est un entier et $1 \leq a_0 + 1 \leq b$. Il y a donc deux cas :
 - Soit $a_0 + 1 \neq b$ et alors $a_0 + 1 < b$ et donc $a_0 + 1 \in \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$. Dans ce cas, on pose $\alpha_0 = a_0 + 1$ et $\alpha_i = a_i$ pour tout $i \geq 1$. Ainsi, $n + 1 = \alpha_0 + \alpha_1b + \alpha_2b^2 + \dots + \alpha_Nb^N$.
 - Soit $a_0 + 1 = b$. Dans ce cas

$$n + 1 = b + a_1b + a_2b^2 + \dots + a_Nb^N = b(a_1 + a_2b^1 + \dots + a_Nb^{N-1})$$

Posons alors $q = a_1 + a_2b^1 + \dots + a_Nb^{N-1} = \frac{n+1}{b} \leq \frac{n+1}{2}$. Or² comme $n \geq 1$, $n+1 \leq 2n$ et donc $\frac{n+1}{2} \leq n$. Ainsi, $\mathcal{P}(q)$ est vraie. Dès lors, il existe $M \in \mathbb{N}$ et $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_M$ dans $\{0, 1, \dots, b-1\}$ tel que $q = \alpha_0 + \alpha_1b + \alpha_2b^2 + \dots + \alpha_Mb^{M+1}$.

$$n + 1 = bq = \alpha_0b + \alpha_1b^2 + \alpha_2b^3 + \dots + \alpha_Mb^{M+1}$$

On pose alors $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = \alpha_0$, $\beta_2 = \alpha_1$ et de manière générale, pour tout entier $i \geq 1$, $\beta_i = \alpha_{i-1}$. Donc

$$n + 1 = \beta_0 + \beta_1b + \beta_2b^2 + \dots + \beta_{M+1}b^{M+1}$$

On a donc montré que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Par récurrence forte, le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction de l'exercice 15.

Correction de l'exercice 16. Posons l'hypothèse de récurrence, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$: «si $f: \llbracket 1; n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1; n \rrbracket$ est une fonction croissante alors elle admet un point fixe».

- Pour $n = 1$, considérons $f: \llbracket 1; 1 \rrbracket \rightarrow \llbracket 1; 1 \rrbracket$ croissante. Alors $f(1) \in \llbracket 1; 1 \rrbracket$, donc $f(1) = 1$. Ainsi, f admet bien un point fixe. Ainsi, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, démontrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ vraie. Fixons donc une application croissante $f: \llbracket 1; n+1 \rrbracket \rightarrow \llbracket 1; n+1 \rrbracket$. Distinguons les cas :
 - Si $f(n+1) = n+1$. Alors, f admet bien point fixe.
 - Si $f(n+1) \neq n+1$, alors comme $f(n+1) \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket$, on peut en conclure que $f(n+1) \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Comme f est croissante, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $f(k) \leq f(n+1) \leq n$, par conséquent, $f(k) \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Posons, alors

$$g: \begin{cases} \llbracket 1; n \rrbracket & \longrightarrow \llbracket 1; n \rrbracket \\ k & \longmapsto f(k) \end{cases}$$

On remarque que comme f est croissante, g est croissante, d'après $\mathcal{P}(n)$, g admet un point fixe.

Ainsi, il existe $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $g(p) = p$. Par conséquent, $f(p) = p$.

Dans tous les cas, on a montré que f admet un point fixe.

- Par récurrence, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ si $f: \llbracket 1; n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1; n \rrbracket$ est croissante alors elle admet un point fixe.

Correction de l'exercice 17.

2. C'est à ce moment-là que l'on comprend que pour l'hérédité, on a besoin de $n \geq 1$, sinon rien n'assure que $\frac{n+1}{2} \leq n$, c'est d'ailleurs faux pour $n = 0$.