Chapitre 2

Études des fonctions et fonctions usuelles

Le but de ce chapitre est de faire le point en début de PCSI sur les notions d'analyse liées aux fonctions à valeurs réelles dont la variable est réelle pour adopter un vocabulaire précis, rigoureux et commun. Nous allons revoir les notions de la classe de Terminale nécessaires à l'étude complète d'une fonction sans pour autant démontrer tous les résultats. Ceux-ci le seront dans des chapitres ultérieurs (limites, continuité, dérivabilité, etc). Puis nous (re)verrons les fonctions usuelles dont les propriétés doivent être maîtrisées.

Table des matières

1 Généralités sur les fonctions

1.1 Définition d'une fonction

Définition d'une fonction

Soient $D \subset \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}$. On appelle **fonction réelle définie sur D et à valeurs dans A**, un procédé qui, à $x \in D$, associe un élément noté $f(x) \in A$ et appelé **image** de x par f. On note alors $f\colon D \to A$. On dit que D est le **domaine de définition** de la fonction f (ou **ensemble de départ**) et A l'**ensemble d'arrivée**. Si $y = f(x)$, on dit que x est un **antécédent** de y par f.

Exemple 1. Quelle est l'image de 0 par la fonction cos ? Quels sont les antécédents de 1 par cos ?

Exemple 2. La fonction $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^* \longrightarrow [\,1\,;+\infty\,[\\ x \longmapsto \dfrac{1}{x^2} + 2 \end{cases}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $[\,1\,;+\infty\,[$.

Remarque 1. D est donc une partie de $\mathbb{R}$ (pas nécessairement un intervalle) sur laquelle la fonction f est bien définie.

Péril imminent à ne pas confondre fonction et nombre

Si $f\colon D \to A$ est une fonction et $x \in D$, alors $f(x)$ est un nombre. Ainsi, «$f(x)$ est dérivable» n'a aucun sens.

Définition du graphe d'une fonction

Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$, on appelle **graphe** ou **courbe** de f l'ensemble des points : $\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) \,|\, x \in D\}$. Le graphe d'une fonction est donc l'ensemble des points du plan dont l'ordonnée est l'image de l'abscisse.

Définition de l'image d'une fonction

Soit $f\colon D \to A$. L'**image** de f, notée $f(D)$, est l'ensemble des images des éléments de D par f : $f(D) = \{f(x) | x \in D\}$.

Attention à ne pas confondre image d'une fonction et son ensemble d'arrivée

Il est juste de dire que $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, en effet pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \in \mathbb{R}^+$. Cependant, $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$.
D'une manière générale, si $f\colon D \to A$, on a toujours $f(D) \subset A$ mais pas forcément égalité.

1.2 Parité, périodicité

Définition d'une fonction paire/impaire

Soit D un ensemble de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 : pour tout $x \in D$, $-x \in D$. Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$

- On dit que f est **paire** si pour tout $x \in D$, $f(-x) = f(x)$: $\mathcal{C}_f$ symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- On dit que f est **impaire** si pour tout $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$: $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine.

Exemple 3. La fonction $x \mapsto x^2$ est paire, la fonction $x \mapsto x^3$ est impaire.

Définition d'une fonction périodique

Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$. On dit que f est **périodique** s'il existe un réel $T > 0$ tel que :

$$\forall x \in D \qquad x + T \in D \quad \text{et} \quad f(x+T) = f(x)$$

Ce réel T est appelé **une période** de f (on dit aussi que f est T-périodique).
Si elle existe, on appelle **période fondamentale** de f la plus petite période de f.

Exemple 4. 6π est une période de sin, mais la période fondamentale de sin est 2π.

Remarque 2. Savoir si une fonction est paire/impaire/périodique permet de réduire son domaine d'étude.

1.3 Opérations sur les fonctions

On connaît les opérations usuelles $(+, -, \times, \div)$ entre les nombres réels. Cependant, les fonctions n'étant pas des nombres, il faut définir la somme, le produit ou le quotient de deux fonctions, ou encore le produit d'un réel par une fonction.

Définition des opérations sur les fonctions

Soient $f\colon D \to \mathbb{R}$, $g\colon D \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on appelle :

- $f + g$ la fonction qui, à tout $x \in D$, associe le réel $f(x) + g(x)$.
- λf la fonction qui, à tout $x \in D$, associe le réel $\lambda f(x)$.
- fg la fonction qui, à tout $x \in D$, associe le réel $f(x)g(x)$.
- Si, pour tout $x \in D$, $g(x) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ la fonction qui, à tout $x \in D$, associe le réel $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Définition de la composée de deux fonctions

Soient $f\colon I \to J$ et $g\colon J \to \mathbb{R}$. La **fonction composée** de g et f, notée $g \circ f$ est définie par, pour tout $x \in I$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Remarque 3. La composée se déroule suivant le schéma :

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & J \arrow[r, "g"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Exemple 5. Si $f\colon x \mapsto x^2$ et $g\colon x \mapsto \cos(x)$, alors $g \circ f\colon x \mapsto$ et $f \circ g\colon x \mapsto$

Remarque 4. En général (et même très souvent), $f \circ g \neq g \circ f$. Si jamais $f \circ g$ et $g \circ f$ sont définies et que $f \circ g = g \circ f$, on dit que les fonctions f et g **commutent**.

1.4 Variation d'une fonction

Définition d'une fonction (strictement) croissante, décroissante, monotone, constante

Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$.

- f est dite **croissante sur** D si $\quad \forall (x, x') \in D^2 \quad x \leqslant x' \implies f(x) \leqslant f(x')$
- f est dite **décroissante sur** D si $\quad \forall (x, x') \in D^2 \quad x \leqslant x' \implies f(x) \geqslant f(x')$
- f est dite **strictement croissante sur** D si $\quad \forall (x, x') \in D^2 \quad x < x' \implies f(x) < f(x')$
- f est dite **strictement décroissante sur** D si $\quad \forall (x, x') \in D^2 \quad x < x' \implies f(x) > f(x')$
- f est dite (resp. strictement) monotone sur D si f est (resp. strictement) croissante ou décroissante sur D.
- On dit que f est constante sur D, s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in D$, $f(x) = C$.

Exemple 6. La fonction sin n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$ ni décroissante sur $\mathbb{R}$, elle n'est donc pas monotone sur $\mathbb{R}$.
En revanche, elle est strictement croissante sur $[-\pi/2\,;\pi/2]$ et est donc strictement monotone sur cet intervalle.

Proposition n° 1 : variation d'une composée de deux fonctions monotones
Soient $f\colon I \to J$, $g\colon J \to \mathbb{R}$.

1. Si f est croissante sur I et g est croissante sur J, alors $g \circ f$ est croissante sur I.
2. Si f est strictement croissante sur I, et g est strictement croissante sur J, alors $g \circ f$ est strictement croissante sur I.
3. Si f est croissante sur I et g est décroissante sur J, alors $g \circ f$ est décroissante sur I.
4. Si f est décroissante sur I et g est croissante sur J, alors $g \circ f$ est décroissante sur I.
5. Si f est décroissante sur I et g est décroissante sur J, alors $g \circ f$ est croissante sur I.

1.5 Fonctions minorées, majorées, bornées

Définition d'une fonction minorée, majorée, bornée

Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$.
- On dit que la fonction f est **majorée** sur D si : $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \qquad f(x) \leqslant M$
- On dit que la fonction f est **minorée** sur D si : $\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \quad f(x) \geqslant m$
- On dit que f est **bornée** sur D si f est majorée et minorée : $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x \in D \quad m \leqslant f(x) \leqslant M$

Remarque 5. On dit que m est **un minorant** de f et M est **un majorant** de f. S'ils existent, les minorants/majorants ne sont pas uniques !

Exemple 7. La fonction exp est minorée sur $\mathbb{R}$ par -4 mais n'est pas majorée et n'est pas bornée.
La fonction sin est bornée sur $\mathbb{R}$: 5 est un majorant et -3 est un minorant de sin.

Proposition n° 2 : une fonction est bornée ssi sa valeur absolue est bornée
Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$. Alors f est bornée D ssi il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in D$, $|f(x)| \leqslant M$.

Démonstration de la proposition n° 2 : Raisonnons par double implication :
- S'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in D$, $|f(x)| \leqslant M$. Soit $x \in D$. Si $f(x) \geqslant 0$, alors $0 \leqslant |f(x)| = f(x) \leqslant M$ Si $f(x) \leqslant 0$, $0 \leqslant |f(x)| = -f(x) \leqslant M$ et donc $-M \leqslant f(x) \leqslant 0$, dans tous les cas, $-M \leqslant f(x) \leqslant M$. Ainsi, la fonction est majorée par M et minorée par $-M$.
- Supposons que f soit bornée : alors il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in D$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$. Remarquons alors que $M \leqslant |M| \leqslant \max(|M|, |m|)$. De même $m \geqslant -|m| \geqslant -\max(|M|, |m|)$, Notons $\tilde{M} = \max(|M|, |m|)$, alors pour tout $x \in D$, $-\tilde{M} \leqslant f(x) \leqslant \tilde{M}$. Ainsi, si $f(x) \geqslant 0$, alors $|f(x)| = f(x) \leqslant \tilde{M}$, si $f(x) \leqslant 0$, alors $|f(x)| = -f(x) \leqslant -(-\tilde{M}) = \tilde{M}$. Dans tous les cas, on a montré que pour tout $x \in D$, $|f(x)| \leqslant \tilde{M}$. ∎

1.6 Bijectivité

Définition d'une bijection et bijection réciproque

On dit que $f\colon I \to J$ est **bijective** si tout $y \in J$ admet un unique antécédent par f dans I i.e. :

$$\forall y \in J \quad \exists! x \in I \qquad y = f(x)$$

En notant $x = f^{-1}(y)$, on définit une application $f^{-1}\colon \begin{cases} J \longrightarrow I \\ y \longmapsto x = f^{-1}(y) \end{cases}$ appelée **bijection réciproque** de f.

Exemple 8. Montrer que l'application $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 3x + 2 \end{cases}$ est bijective et trouver sa bijection réciproque.

Proposition n° 3 propriétés d'une bijection

Si f est une bijection de I vers J.

1. $\forall x \in I \quad f^{-1}(f(x)) = x \quad$ et $\quad \forall y \in J \quad f(f^{-1}(y)) = y$ $\qquad (f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_I$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_J)$
2. f^{-1} réalise une bijection de J vers I et $(f^{-1})^{-1} = f$.
3. $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Démonstration de la proposition n° 3 :

1. Soit $x \in I$. On pose $y = f(x) \in J$. Alors, comme f est bijective, x est l'unique antécédent de y par f, ainsi $x = f^{-1}(y)$. Dès lors, $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$. Soit $y \in J$. Comme f est bijective, il existe un unique $x \in I$ tel que $y = f(x)$ et, par définition de f^{-1}, $f^{-1}(y) = x$, ainsi $f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$.
2. $f^{-1}: J \to I$. Soit $x \in I$, posons $y = f(x) \in J$, alors par définition, $f^{-1}(y) = x$. Ceci prouve que x admet un antécédent pour la fonction f^{-1}. Soit y' un antécédent de x par f^{-1} : $x = f^{-1}(y)$, si on applique la fonction f, on obtient $f(x) = f(f^{-1}(y)) = y'$. Mais $f(x) = y$. Dès lors, $y' = y$. Ainsi, il y a unicité de l'antécédent de x par f^{-1}. Ceci prouve que f^{-1} est bijective. De plus, on a prouvé que pour tout $x \in I$, $(f^{-1})^{-1}(x) = y = f(x)$. Ceci prouve que $(f^{-1})^{-1} = f$.
3. Soit $x \in I$ posons $y = f(x) \in J$ de sorte que $A = (x, y) \in \mathcal{C}_f$. De plus, $x = f^{-1}(y)$ Définissions $B = (y, x) \in \mathcal{C}_{f^{-1}}$. Démontrons que les points A et B sont symétriques par rapport à la première bissectrice dont $\vec{u} = (1, 1)$ est un vecteur directeur. $\left\langle \overrightarrow{AB}, \vec{u} \right\rangle = (y - x) \times 1 + (x - y) \times 1 = 0$. Ainsi, $\overrightarrow{AB}$ est bien perpendiculaire à la première bissectrice. De plus le milieu du segment $[A, B]$ est $\left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{y+x}{2}\right)$ et il appartient bien à la première bissectrice. Ceci démontre que B est bien le symétrique de A par rapport à la première bissectrice.
   De même, si $y \in J$, posons $x = f^{-1}(y) \in I$ et $B = (y, x) \in \mathcal{C}_{f^{-1}}$, alors $A = (x, y) \in \mathcal{C}_f$ et A est bien le symétrique de B par rapport à la première bissectrice.
   Ainsi, tous les points de $\mathcal{C}_f$ admettent un symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$ qui est sur $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ et tous les points de $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ admettent un symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$ qui est sur $\mathcal{C}_{f1}$. Ceci démontre que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. ■

Théorème n° 1 : de la bijection strictement monotone

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue et strictement monotone sur I. Alors $f: I \to f(I)$ est bijective et $f(I)$, suivant les cas, vaut :

Intervalle	$I = [\,a\,;b\,]$	$I = [\,a\,;b\,[$	$I =]\,a\,;b\,]$	$I =]\,a\,;b\,[$
f strictement croissante	$[\,f(a)\,;f(b)\,]$	$\left[f(a)\,;\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\,;f(b)\right]$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\,;\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$
f strictement décroissante	$[\,f(b)\,;f(a)\,]$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\,;f(a)\right]$	$\left[f(b)\,;\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\,;\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$

Exemple 9. $f: x \mapsto x^3$ est une bijection de $[\,-1\,;2\,[$ vers $[\,-1\,;8\,[$.

Remarque 6. On verra plus tard que si f est continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est nécessairement un intervalle.

1.7 Dérivée d'une fonction

À partir de maintenant $f: I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition du nombre dérivé en un point a

On dit que f est **dérivable en** $a \in I$ si $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie en a. Dans ce cas, cette limite est appelée **nombre dérivé de f en** a et est noté $f'(a)$: $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Remarque 7. La fonction f est dérivable en a ssi $h \mapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0. Dans ce cas, $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Exemple 10. Montrer que la fonction carrée est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}$.

Proposition n° 4 : lien entre nombre dérivé et tangente

Si f est dérivable en $a \in I$, alors f admet une tangente en a ayant pour équation : $y = f(a) + f'(a)(x-a)$

Remarque 8. Le signe de $f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a))$ détermine la position relative de la courbe par rapport à sa tangente.

Définition d'une fonction dérivable et fonction dérivée

Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$. On dit que f est **dérivable** sur I si f est dérivable en tout point de I. Dans ce cas, on appelle **fonction dérivée** l'application $f'\colon \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f'(x) \end{cases}$.

Remarque 9. Cette fonction dérivée f se note aussi en physique $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. Quand la variable est t, on a aussi la notation $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ ou même $\dot{\theta}$ pour des fonctions angulaires.

Proposition n° 5

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un même ensemble I alors :

- Combinaison linéaire : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + g$ est dérivable sur I et $(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$
- Produit : la fonction fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$
- Quotient : Si g ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

Proposition n° 6 : composée de fonctions dérivables

Soient $f\colon I \to J$ dérivable sur I et $g\colon J \to \mathbb{R}$ dérivable sur J. Alors, $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$

Exemple 11. Dériver $x \mapsto \cos(x^2)$, $x \mapsto \exp(u(x))$, $x \mapsto \ln(u(x))$, $x \mapsto \sin(u(x))$, $x \mapsto (u(x))^n$, où u est une fonction dérivable (strictement positive dans le cas du ln) et $n \in \mathbb{N}$.

Théorème n° 2 : dérivation de la bijection réciproque

Soient $f\colon I \to J$ une bijection et $x \in J$. Si f est dérivable en $a = f^{-1}(x)$ et que $f'(a) \neq 0$, alors, $f^{-1}\colon J \to I$ est dérivable en x et :
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Remarque 10. Géométriquement, les graphes des fonctions f et f^{-1} sont symétriques à la droite d'équation $y = x$. La condition $f'(a) \neq 0$ est nécessaire car sinon f admettrait une tangente horizontale en a et f^{-1} admettrait une tangente verticale en x.

Proposition n° 7 : lien entre la dérivée et les fonctions constantes, (strictement) monotones

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors :

- f est croissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$.
- f est constante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$ et si f' ne s'annule qu'un nombre fini de fois, alors f est strictement croissante.

2 Fonctions usuelles

2.1 Logarithme

Définition du logarithme népérien

L'unique primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1 est appelée fonction **logarithme népérien** et est notée ln.

Proposition n° 8 : propriétés du logarithme

Pour tous $x > 0$ et $x' > 0$:

1. $\ln(1) = 0$
2. $\ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$
3. ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$
4. $\ln(xx') = \ln(x) + \ln(x')$
5. $\ln(1/x') = -\ln(x')$
6. $\ln(x/x') = \ln(x) - \ln(x')$
7. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\ln(x^n) = n\ln(x)$
8. $\ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$.
9. La fonction ln réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$.
10. Pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

Démonstration de la proposition n° 8 :

1. Par définition, ln est une fonction qui s'annule en 1.
2. $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln(t)]_1^x = \ln(x) - \ln(1) = \ln(x)$.
3. Par définition, ln est une primitive de $x \mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = 1/x$.
4. Fixons $x' > 0$ et posons, pour tout $x > 0$, $f(x) = \ln(xx') - \ln(x) - \ln(x')$, $x \mapsto xx'$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, par composé, $x \mapsto \ln(xx')$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, par somme, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{x'}{xx'} - \dfrac{1}{x} - 0 = 0$, ainsi, f est constante sur $\mathbb{R}_+^*$, ainsi, pour tout $x > 0$, $f(x) = f(1) = \ln(x') - \ln(1) - \ln(x') = 0$. Ainsi, $\ln(xx') = \ln(x) + \ln(x')$.
5.
6.
7.
8. La fonction ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (car sa dérivée est positive), ainsi ln admet une limite en $+\infty$. Notons ℓ cette limite, soit $\ell = +\infty$ soit $\ell \in \mathbb{R}$. Supposons $\ell \in \mathbb{R}$. Comme la fonction ln est croissante, on en déduit que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leqslant \ell$. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, $\ln(2^n) \leqslant \ell$, donc $n\ln(2) \leqslant \ell$. Dès lors, comme $\ln(2) > 0$, $n \leqslant \frac{\ell}{\ln(2)}$, en passant à la limite quand $n \to +\infty$, $+\infty \leqslant \frac{\ell}{\ln(2)} \in \mathbb{R}$ ce qui est absurde. Ainsi, nécessairement, $\ell = +\infty$. Par conséquent, $\ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ ($\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$) $\ln(x) = -\ln(1/x)$, or $1/x \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$, ainsi, $\ln(1/x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$, dès lors, $\ln(x) = -\ln(1/x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$.
9. Comme la dérivée de ln est strictement positive, ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, d'après le théorème de la bijection strictement monotone, ln est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers
$$\ln(\mathbb{R}_+^*) = \left]\lim_{x\to 0^+} \ln(x)\,;\lim_{x\to+\infty} \ln(x)\right[= \left]-\infty\,;+\infty\right[= \mathbb{R}$$
10. Posons, pour $x > -1$, $f(x) = x - \ln(1+x)$. Par différence et composée, f est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ et pour tout $x > -1$, $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}$.
D'une part, pour $x \geqslant 0$, $f'(x) \geqslant 0$, ainsi, f est croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc, pour $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant f(0) = 0$.
D'autre part, pour $x \in]-1\,;0]$, $f'(x) \leqslant 0$, ainsi f est décroissante sur $]-1\,;0]$, donc pour $x \in]-1\,;0]$, $f(x) \geqslant f(0) = 0$. Dès lors, pour $x > -1$, $x - \ln(1+x) \geqslant 0$ donc $\ln(1+x) \leqslant x$.

Remarque 11. Le logarithme en base 10 (resp 2) est défini par, pour tout $x > 0$, $\log_{10}(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$ (resp. $\log_2(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$). Ces fonctions ont des propriétés similaires au logarithme népérien, mais $\log_{10}(10) = 1$ et que $\log_2(2) = 1$.

2.2 La fonction exponentielle

Définition de la fonction exponentielle

On appelle **exponentielle** la bijection réciproque de $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ et on note exp cette fonction. Ainsi, $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est une bijection.

Proposition n° 9 : propriétés de la fonction exponentielle

Pour tout $(x, x', y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*$:

1. $y = \exp(x) \iff x = \ln(y)$.
2. $\exp(0) = 1$
3. exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp'(x) = \exp(x)$
4. $\exp(x + x') = \exp(x)\exp(x')$
5. $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$
6. $\exp(x - x') = \dfrac{\exp(x)}{\exp(x')}$
7. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(x)^n = \exp(xn)$
8. $\exp(x) \geqslant 1 + x$
9. $\exp(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $\exp(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$

Remarque 12. On peut montrer que exp est la seule fonction dérivable égale à sa dérivée et prenant la valeur 1 en 0.

Remarque 13. Si $a \in \mathbb{R}_+^*$, on peut définir la fonction exponentielle en base a par $x \mapsto a^x = \exp(x\ln(a))$. On obtient une fonction qui vaut a en 1, qui transforme les sommes en produit et dont la dérivée est $x \mapsto \ln(a)a^x$.

2.3 Fonctions puissances

Définition de la puissance

On définit x^α dans plusieurs cas :

- Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, alors, on pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}$, par convention $x^0 = 1$.
- Si $\alpha = n \in \mathbb{Z}_-$, alors on pose pour $x \in \mathbb{R}^*$, $x^n = \dfrac{1}{x^{-n}}$
- Sinon, on pose pour $x > 0$, $x^\alpha = \exp(\alpha\ln(x))$.

Dans chacun de ces cas, on a défini une fonction $x \mapsto x^\alpha$ définie soit sur $\mathbb{R}$, soit sur $\mathbb{R}^*$, soit sur $\mathbb{R}_+^*$.

Attention à ne pas confondre puissance et exponentielle

Les fonctions $x \mapsto a^x$ et $x \mapsto x^a$ ne doivent pas être confondus !

Proposition n° 10 : propriétés de la fonction puissance

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{*2}$.

1. $x^\alpha \times y^\alpha = (xy)^\alpha$, $x^\alpha \times x^\beta = x^{\alpha+\beta}$ et $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$
2. $p_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$, $(p_\alpha)'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
3. Sur $\mathbb{R}_+^*$, p_α est strictement croissante si $\alpha > 0$ et strictement décroissante si $\alpha < 0$.
4. Si $\alpha > 0$, $x^\alpha \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, $x^\alpha \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
5. Si $\alpha < 0$, $x^\alpha \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, $x^\alpha \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$.

Remarque 14. Si $\alpha > 0$, on pose $p_\alpha(0) = 0$, ainsi la fonction p_α est maintenant définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ (et non $\mathbb{R}_+^*$).

Exemple la fonction racine n-ième

- Si $n \in \mathbb{N}^*$ est pair, $x \mapsto x^n$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$ et sa bijection réciproque est notée $x \mapsto \sqrt[n]{x}$
- Si $n \in \mathbb{N}$ est impair, $x \mapsto x^n$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et sa bijection réciproque est $x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

Remarque 15. Pour $x > 0$, $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

Proposition n° 11 : croissances comparées

Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$:

1. $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$
2. $\frac{\ln(x)^\alpha}{x^\beta} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$
3. $\frac{x}{\exp(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$
4. $\frac{x^\beta}{\exp(\alpha x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$
5. $x \exp(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$
6. $|x|^\beta \mathrm{e}^{\alpha x} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$
7. $x \ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$
8. $x^\alpha |\ln(x)|^\beta \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$

Démonstration de la proposition n° 11 :

1. Soit $x > 1$, $0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x} = \frac{2\ln(\sqrt{x})}{x} \leqslant \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$. Par encadrement, $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.
2. Soit $x > 1$, $\frac{\ln^\alpha(x)}{x^\beta} = \left(\frac{\ln(x)}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^\alpha = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha \left(\frac{\ln(x^{\frac{\beta}{\alpha}})}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^\alpha \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$
3. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, $\frac{x}{\exp(x)} = \left(\frac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}\right)^2 \leqslant \left(\frac{\sqrt{x}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{4}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.
4.
5.
6.
7.
8.

■

2.4 La valeur absolue

Définition de la valeur absolue

La fonction $x \mapsto |x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$, définie sur $\mathbb{R}$, est appelée valeur absolue.

Proposition n° 12 : propriétés de la valeur absolue

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

1. $|-x| = |x|$ (la valeur absolue est une fonction paire)
2. $|xy| = |x| \times |y|$ (la valeur absolue du produit est le produit des valeurs absolues)
3. $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ (inégalité triangulaire)
4. $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$ (deuxième inégalité triangulaire)
5. $|x| \leqslant r \iff -r \leqslant x \leqslant r$, $|x| < r \iff -r < x < r$, $|x| = r \iff x = \pm r$, $|x| \geqslant r \iff x \geqslant r$ ou $x \leqslant -r$

Démonstration de la proposition n° 12 :

1. $|-x| = \max(-x, x) = \max(x, -x) = |x|$
2. En distinguant les cas :
   - Si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, alors $|xy| = xy = |x||y|$.
   - Si $x \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$, alors $xy \leqslant 0$ et $|xy| = -xy = |x||y|$.
   - Si $x \leqslant 0$ et $x \geqslant 0$, alors $xy \leqslant 0$ et $|xy| = -xy = |x||y|$.
   - Si $x \leqslant 0$ et $y \leqslant 0$, alors $xy \geqslant 0$ et $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$.
3. En calculant le carré de $|x + y|^2$:
$$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = |x|^2 + 2xy + |y|^2 \leqslant |x|^2 + 2|xy| + |y|^2 = |x|^2 + 2|x| \times |y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$
   Comme la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on obtient $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.
4. $|x| = |x - y + y| \leqslant |x - y| + |y|$ donc $|x| - |y| \leqslant |x - y|$, de même $|y| = |y - x + x| \leqslant |y - x| + |x|$, donc $|y| - |x| \leqslant |y - x| = |x - y|$. Ainsi, $||x| - |y|| = \max(|x| - |y|, |y| - |x|) \leqslant |x - y|$.
5.

■

2.5 Fonctions trigonométriques

Définition des fonctions cosinus et sinus

Soit $x \in \mathbb{R}$, on note M le point du cercle trigonométrique tel que un angle entre $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OM}$ soit x. On note $\cos(x)$ l'abscisse de M et $\sin(x)$ son ordonnée. On a donc défini deux fonctions $\cos\colon \mathbb{R} \to [-1\,;1]$ et $\sin\colon \mathbb{R} \to [-1\,;1]$.

Remarque 16. Si $x = y + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors ils définissent le même point M sur le cercle trigo. On note alors $x \equiv y\ [2\pi]$.

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	NaN

Remarque 17. Il faut savoir retrouver les cosinus et sinus de $x \pm \pi$ et $\pi/2 \pm x$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Proposition n° 13 : propriétés des fonctions $\cos$ et $\sin$

1. $\sin$ est impaire, 2π-périodique
2. $\cos$ est paire, 2π-périodique,
3. $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
4. $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$
5. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
6. $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
7. $\sin$ dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\sin' = \cos$.
8. $\cos$ dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\cos' = -\sin$.
9. $\cos(a)^2 + \sin^2(a) = 1$
10. $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
11. $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1$
12. $\cos^2(a) = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$, $\sin^2(a) = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$.
13. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leqslant |x|$.

Remarque 18. Grâce à ces formules, on peut trouver une formule de $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\cos(b)$ etc.

Remarque 19. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\cos(a) = \cos(b)$ ssi $\exists k \in \mathbb{Z} \mid b = a + 2k\pi$ ou $b = -a + 2k\pi$ et $\sin(a) = \sin(b)$ ssi $\exists k \in \mathbb{Z} \mid b = a + 2k\pi$ ou $b = \pi - a + 2k\pi$

Définition de la fonction tangente

Pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $\cos(x) \neq 0$, on pose $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Ceci définit la fonction tangente.

Proposition n° 14 : propriétés de la fonction tangente

1. La fonction $\tan$ est impaire, π-périodique, dérivable sur $D_{\tan} = \mathbb{R}\backslash\{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et pour tout $x \in D_{\tan}$: $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$
2. Si $(a, b, a+b) \in D_{\tan}^3$, alors $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$, si $(a, b, a-b) \in D_{\tan}^3$, alors $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

2.6 Fonctions trigonométrique réciproques

Remarque 20. Les fonctions $\cos$ et $\sin$ ne sont pas des bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ni $\tan$ de $D_{\tan}$ vers $\mathbb{R}$.

Proposition n° 15 : bijectivité des fonctions trigonométriques sur les «bons» intervalles

$$c\colon \begin{cases} [0\,;\pi] \longrightarrow [-1\,;1] \\ x \longmapsto \cos(x) \end{cases},\ s\colon \begin{cases} \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1\,;1] \\ x \longmapsto \sin(x) \end{cases} \text{ et } t\colon \begin{cases} \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \tan(x) \end{cases} \text{ sont bijectives.}$$

Démonstration de la proposition n° 15 :

1. La fonction c est continue sur $[\,0\,;\pi\,]$, de plus elle est strictement décroissante (en effet, c est dérivable, sa dérivée est négative ou nulle et pour tout $x \in \,]\,0\,;\pi\,[$, $c'(x) = -\sin'(x) < 0$), ainsi, c est une bijection de $[\,0\,;\pi\,]$ vers $[\,c(\pi)\,;c(0)\,] = [\,-1\,;1\,]$.
2. La fonction s est continue sur $[\,-\pi/2\,;\pi/2\,]$, de plus elle est strictement croissante (en effet, s est dérivable, sa dérivée est positive ou nulle et pour tout $x \in \,]\,-\pi/2\,;\pi/2\,[$, $s'(x) = \cos'(x) > 0$), ainsi, s est une bijection de $[\,-\pi/2\,;\pi/2\,]$ vers $[\,s(-\pi/2)\,;s(\pi/2)\,] = [\,-1\,;1\,]$.
3. La fonction t est continue sur $]\,-\pi/2\,;\pi/2\,[$, de plus elle est strictement croissante (en effet, t est dérivable et pour $x \in \,]\,-\pi/2\,;\pi/2\,[$, $t'(x) = 1 + \tan^2(x) > 0$), ainsi, t est une bijection de $]\,-\pi/2\,;\pi/2\,[$ vers $\left]\lim\limits_{x\to-\pi/2^+} t(x)\,;\lim\limits_{x\to\pi/2^-} t(x)\right[= \mathbb{R}$. ■

Définition des fonctions trigonométriques réciproques

- La bijection réciproque de c: $[\,0\,;\pi\,] \to [\,-1\,;1\,]$ est appelée **arccos**: $[\,-1\,;1\,] \to [\,0\,;\pi\,]$.
- La bijection réciproque de s: $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right] \to [\,-1\,;1\,]$ est appelée **arcsin**: $[\,-1\,;1\,] \to \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.
- La bijection réciproque de t: $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ est appelée **arctan**: $\mathbb{R} \to \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$

Remarque 21.
- Pour tout $x \in [\,-1\,;1\,]$, $\cos(\arccos(x)) = x$ et pour tout $x \in [\,0\,;\pi\,]$, $\arccos(\cos(x)) = x$.
- Pour tout $x \in [\,-1\,;1\,]$, $\sin(\arcsin(x)) = x$ et pour tout $x \in [\,-\pi/2\,;\pi/2\,]$, $\arcsin(\sin(x)) = x$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$ et pour tout $x \in \,]\,-\pi/2\,;\pi/2\,[$, $\arctan(\tan(x)) = x$.

Exemple 12. Calculer, $\arctan(1)$, $\arcsin(0)$, $\arcsin(1)$, $\cos(\arccos(0))$, $\arccos(\cos(0))$, $\arccos(\cos(2\pi))$.

Proposition n° 16 : propriétés des fonctions trigonométriques réciproques

1. $\arccos\colon [\,-1\,;1\,] \to [\,0\,;\pi\,]$ est continue sur $[\,-1\,;1\,]$, dérivable sur $]\,-1\,;1\,[$ et pour tout $x \in \,]\,-1\,;1\,[$, $\arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
2. $\arcsin\colon [\,-1\,;1\,] \to \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ est impaire, continue sur $[\,-1\,;1\,]$, dérivable sur $]\,-1\,;1\,[$ et pour tout $x \in \,]\,-1\,;1\,[$, $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
3. $\arctan\colon \mathbb{R} \to \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ est impaire, dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Démonstration de la proposition n° 16 : Admettons que si $f\colon I \to J$ est une bijection continue, alors f^{-1} est continue sur J.

1. Soit $x \in \,]\,-1\,;1\,[$, posons $a = \arccos(x) \in [\,0\,;\pi\,]$, alors $\cos(a) = x$, alors comme $x \neq 1$, $a \neq 0$ et comme $x \neq -1$, $a \neq \pi$, donc $a \in \,]\,0\,;\pi\,[$. En particulier, c est une bijection dérivable en a et $c'(a) = -\sin(a) < 0$, alors d'après le théorème de dérivation de la bijection réciproque, arccos est dérivable en x et Or , donc
$$\arccos'(x) = \frac{1}{c'(a)} == \frac{1}{-\sin(a)} \underset{\sin(a)>0}{=} \frac{-1}{\sqrt{\sin^2(a)}} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(a)}} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$
2. Soit $x \in \,]\,-1\,;1\,[$, posons $a = \arcsin(x) \in [\,-\pi/2\,;\pi/2\,]$, alors $\sin(a) = x$, alors comme $x \neq 1$, $a \neq \pi/2$ et comme $x \neq -1$, $a \neq -\pi/2$, donc $a \in \,]\,\pi/2\,;\pi/2\,[$. En particulier, s est une bijection dérivable en a et $s'(a) = \cos(a) > 0$, alors d'après le théorème de dérivation de la bijection réciproque, arcsin est dérivable en x et Or , donc
$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(a)} \underset{\cos(a)>0}{=} \frac{1}{\sqrt{\cos^2(a)}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(a)}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
Soit $x \in [\,-1\,;1\,]$, alors $-x \in [\,-1\,;1\,]$. Posons $a = \arcsin(x) \in [\,-\pi/2\,;\pi/2\,]$ et $b = \arcsin(-x) \in [\,-\pi/2\,;\pi/2\,]$. Alors, $\sin(a) = x$ et $\sin(-b) = -\sin(b) = -(-x) = x$, avec a et b dans $[\,-\pi/2\,;\pi/2\,]$. Par bijectivité de la fonction s, on en déduit que $a = -b$. Soit $-\arcsin(-x) = \arcsin(x)$. Ainsi, la fonction arcsin est impaire.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$, posons $a = \arctan(x) \in \,]\,-\pi/2\,;\pi/2\,[$, alors t est une bijection dérivable en a et $t'(a) = 1 + \tan^2(a) > 0$, alors d'après le théorème de dérivation de la bijection réciproque, arctan est dérivable en x et Or , donc
$$\arctan'(x) = \frac{1}{t'(a)} = \frac{1}{1+\tan^2(a)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$
Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$. Posons $a = \arctan(x) \in \,]\,-\pi/2\,;\pi/2\,[$ et $b = \arctan(-x) \in \,]\,-\pi/2\,;\pi/2\,[$. Alors, $\tan(a) = x$ et $\tan(-b) = -\tan(b) = -(-x) = x$, avec a et b dans $]\,-\pi/2\,;\pi/2\,[$. Par bijectivité de la fonction t, on en déduit que $a = -b$. Soit $-\arctan(-x) = \arctan(x)$. Ainsi, la fonction arctan est impaire.

On peut aussi montrer directement que si $f\colon I \to J$ avec I et J deux intervalles symétriques par par rapport à 0 et f bijective impaire, alors f^{-1} est aussi impaire. ■

2.7 Fonctions hyperboliques

Pour $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on rappelle qu'il existe une unique fonction paire $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une unique fonction impaire $i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f = p + i$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $i(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.

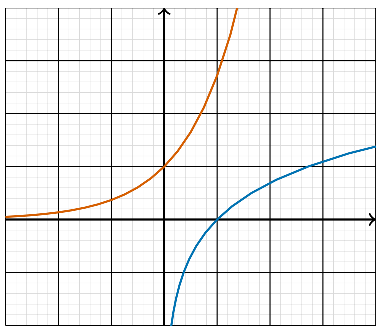
Définition des fonctions cosinus et sinus hyperboliques

On définit les fonctions cosinus hyperbolique ch : $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} \end{cases}$ et sinus hyperbolique sh : $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2} \end{cases}$

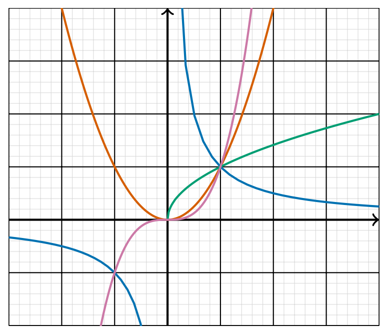
Proposition n° 17 : propriétés des fonctions hyperboliques

1. La fonction ch est paire et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$
2. La fonction sh est impaire et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$
3. $\mathrm{ch}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, $\mathrm{sh}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, $\mathrm{ch}(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$ et $\mathrm{sh}(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$
5. La fonction sh est croissante sur $\mathbb{R}$ et la fonction ch est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-$.
6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) \geqslant 1$ et si $x \geqslant 0$, $\mathrm{sh}(x) \geqslant 0$ et si $x \leqslant 0$, $\mathrm{sh}(x) \leqslant 0$.

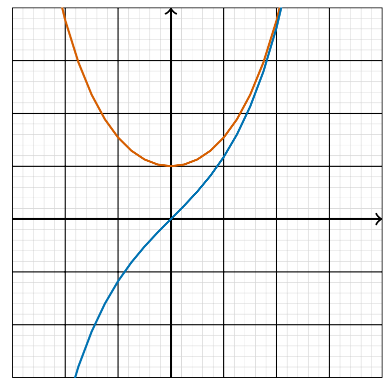
3 Représentation graphique des fonctions usuelles



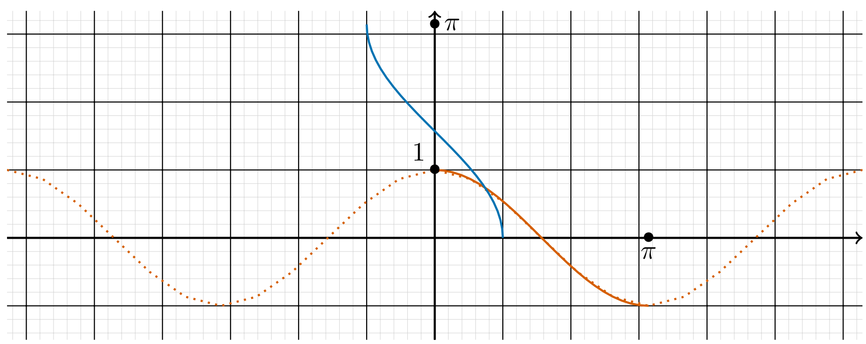
(a) Les fonctions exponentielle et logarithme



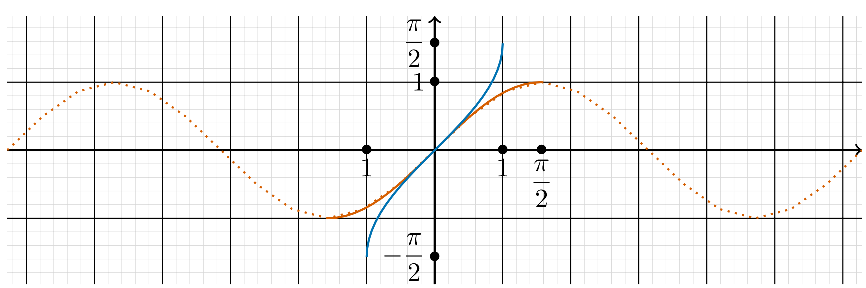
(b) Les fonctions puissance



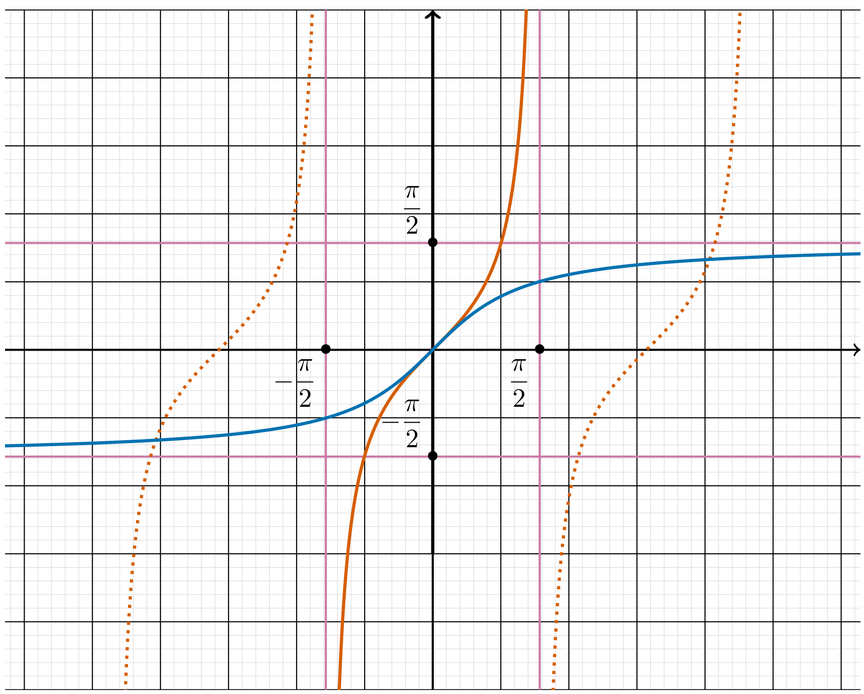
(c) Les fonctions ch et sh



(d) La fonction cosinus et la fonction arccos



(e) La fonction sinus et la fonction arcsinus



(a) La fonction tan et la fonction arctan