DS1

23 septembre 2023

La calculatrice est interdite. L'usage de tout document est interdit. La rigueur, le soin, la présentation seront fortement pris en compte dans la notation. Les résultats de chaque question seront encadrés. Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre qui vous plaît, mais veuillez bien indiquer le numéro de l'exercice.

Problème : tourner en rond tout en étant rationnel !

On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$, ainsi f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

1. Calculer l'image de $\dfrac{1}{2}$ par la fonction f.
2. Déterminer le ou les antécédents de $\dfrac{1}{2}$ par la fonction f.
3. Déterminer la limite de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.
4. Étudier la parité/imparité de f.
5. Écrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :
   (a) f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.
   (b) f n'est pas une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.
   (c) f est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$.
   (d) f n'est pas une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$.
6. À l'aide de la question précédente, justifier que f n'est ni croissante sur $\mathbb{R}$ ni décroissante sur $\mathbb{R}$.
7. Dresser le tableau de variation f.
8. Donner l'équation de la tangente de f en $\dfrac{1}{2}$.
9. Représenter f dans un repère orthonormé (ainsi que la tangente précédemment trouvée).
10. Donner la définition, avec des quantificateurs, de $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
11. Démontrer que f est bornée.
12. Montrer que f n'est pas périodique.
13. Soit $h\colon I \to J$. Donner la définition de h bijective avec des quantificateurs.
14. Soit $h\colon I \to J$. Donner la définition de l'image de h notée $h(I)$.

Pour tout $x \geqslant 1$, on pose $g(x) = f(x)$. La fonction f est ainsi définie sur $\mathbb{R}$, tandis que la fonction g est définie sur $[\,1\,; +\infty\,[$.

15. Montrer que g est une bijection de $[\,1\,; +\infty\,[$ vers un intervalle à déterminer.
16. Déterminer la bijection réciproque de g, notée g^{-1}.
17. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.
18. Rappeler, sans preuve, l'ensemble de définition de tan.
19. Donner deux formules de la dérivée de tan (en précisant bien sûr sur quel ensemble ces formules sont valables).
20. Soit $x \in \mathbb{R}$, on suppose que x et $\dfrac{x}{2}$ sont dans l'ensemble de définition de tan, Montrer que

$$\cos(x) = \frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \qquad \text{et} \qquad \tan(x) = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

On dit qu'un point de coordonnées (x, y) est birationnel si x et y sont tous les deux rationnels.

21. Montrer que le point de coordonnées $\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$ est un point birationnel appartenant au cercle trigonométrique.
22. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
23. En déduire que le point de coordonnées $(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}})$ est un point du cercle trigonométrique et n'est pas birationnel.
24. Démontrer que le cercle trigonométrique contient une infinité de nombres birationnels.

Exercice : soyez fonctionnels !

On cherche ici à résoudre une équation fonctionnelle. C'est une équation dont l'inconnue est une fonction. On veut déterminer toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x)f(x') - f(xx') = x + x'$$

1. Si f est une telle solution, déterminer $f(0)$ et $f(1)$.
2. Déterminer les solutions de l'équation.

Exercice : trouver le bon raisonnement pour répondre à la grande question sur la vie, l'univers et le reste

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique fonction g et une unique fonction h telles que $f = g + h$ où $g(0) = g(42) = 0$ et $h\colon x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x)$ où a et b sont des réels.

Exercice : le football se joue à 11 et la fin, c'est l'exponentielle qui gagne [1]

1. On rappelle que $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$ pour $n \geqslant 1$ et que $0! = 1$ (par convention). Écrire une fonction `Factoriel(n)` en Python qui renvoie $n!$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Écrire une fonction `Somme(n,x)` en Python qui à $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, renvoie

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

   On pourra, bien sûr, utiliser la fonction écrite à la question précédente.
3. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$,

$$\mathrm{e}^x \geqslant \sum_{k=0}^{11} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{11}}{11!}$$

1. Histoire de troller la coupe du monde de rugby !