Problème : tourner en rond tout en étant rationnel !

1. $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2 \times \dfrac{1}{2}}{1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{\dfrac{5}{4}} = \dfrac{4}{5}$. $\boxed{\text{L'image de } \dfrac{1}{2} \text{ par } f \text{ vaut } \dfrac{4}{5}.}$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{2} \quad &\iff \quad \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \quad \iff \quad 2x = \frac{1+x^2}{2} \quad \iff \quad 4x = 1 + x^2 \\ &\iff \quad x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \iff \quad x = \frac{4+\sqrt{12}}{2} \text{ ou } x = \frac{4-\sqrt{12}}{2} \end{aligned}$$
Ainsi, $\boxed{\text{les antécédents de } \dfrac{1}{2} \text{ par } f \text{ sont } 2+\sqrt{3} \text{ et } 2-\sqrt{3}.}$

   Remarque 1. Puisque $\dfrac{1}{2}$ a deux antécédents pour la fonction f, f n'est pas bijective.

3. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors,
$$f(x) = \frac{2x}{x^2(1+x^{-2})} = \frac{2}{x(1+x^{-2})}$$
Or, $(1+x^{-2}) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$, ainsi, par un produit de limites, $x(1+x^{-2}) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Par passage à l'inverse, on en déduit que $\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par parité de la fonction carrée, $f(-x) = \dfrac{2(-x)}{1+(-x)^2} = -\dfrac{2x}{1+x^2} = -f(x)$. Ainsi, $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est impaire.}}$

5. (a) $\forall (x,x') \in \mathbb{R}^2 \qquad x \leqslant x' \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leqslant f(x')$.
   (b) $\exists (x,x') \in \mathbb{R}^2 \qquad x \leqslant x' \quad \text{et} \quad f(x) > f(x')$
   (c) $\forall (x,x') \in \mathbb{R}^2 \qquad x \leqslant x' \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geqslant f(x')$.
   (d) $\exists (x,x') \in \mathbb{R}^2 \qquad x \leqslant x' \quad \text{et} \quad f(x) < f(x')$

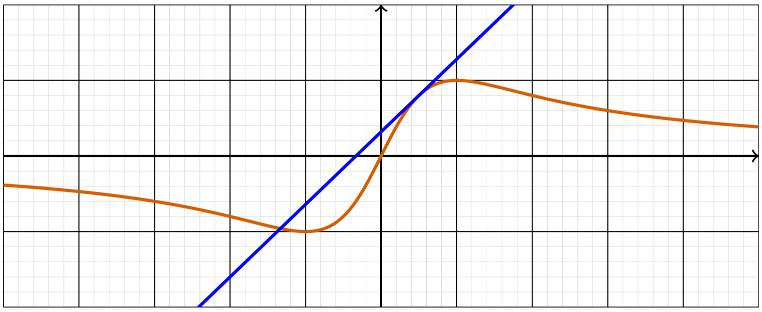
6. Posons $x = 1 \in \mathbb{R}$ et $x' = 2+\sqrt{3} \in \mathbb{R}$, ainsi, $x \leqslant x'$ et
$$f(x) = f(1) = 1 > \frac{1}{2} = f(2+\sqrt{3}) = f(x')$$
Par conséquent, on a montré qu'il existe $(x,x') \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \leqslant x'$ et $f(x) > f(x')$.
Donc, $\boxed{\text{La fonction } f \text{ n'est pas croissante sur } \mathbb{R}.}$
Posons $x = 0 \in \mathbb{R}$ et $x' = 1 \in \mathbb{R}$, ainsi, $x \leqslant x'$ et
$$f(x) = f(0) = 0 < 1 = f(1) = f(x')$$
On a montré qu'il existe $(x,x') \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \leqslant x'$ et $f(x) < f(x')$.
Par conséquent, $\boxed{\text{La fonction } f \text{ n'est pas décroissante sur } \mathbb{R}.}$

7. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = \frac{2(1+x^2) - (2x)(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$
Remarquons que $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 1$ ou $x = -1$. Ainsi, pour $x \in [-1\,;1]$, $1 - x^2 \geqslant 0$ et donc $f'(x) \geqslant 0$, f est strictement croissante sur $[-1\,;1]$. Pour $x \geqslant 1$ ou $x \leqslant -1$, $1 - x^2 \leqslant 0$ et donc $f'(x) \leqslant 0$, f est strictement décroissante sur $[1\,;+\infty[$ et f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;-1]$.

8. D'après la question précédente,

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2\left(1-\frac{1}{4}\right)}{\left(1+\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\frac{6}{4}}{\left(\frac{5}{4}\right)^2}=\frac{24}{25}$$

Ainsi, $\boxed{\text{la tangente en } \frac{1}{2} \text{ de } f \text{ a pour équation } y=\frac{24}{25}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{4}{5}=\frac{24}{25}x+\frac{8}{25}.}$



9.

10. On dit que h est bornée sur $\mathbb{R}$ si

$$\exists (m,M)\in\mathbb{R}^2 \quad \forall x\in\mathbb{R} \qquad m\leqslant h(x)\leqslant M$$

11. Soit $x\in\mathbb{R}$, distinguons les cas :
   - Si $x\geqslant 1$, alors comme f est décroissante sur $[\,1\,;+\infty\,[$, $f(x)\leqslant f(1)=1$, de plus, $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}\geqslant 0$, ainsi $0\leqslant f(x)\leqslant 1$.
   - Si $-1\leqslant x\leqslant 1$, f étant croissante sur $[\,-1\,;1\,]$, $f(-1)\leqslant f(x)\leqslant f(1)$, donc $-1\leqslant f(x)\leqslant 1$
   - Si $x\leqslant -1$, alors comme f est décroissante sur $]\,-\infty\,;-1\,]$, $f(x)\geqslant f(-1)=-1$, de plus, $f(x)\leqslant 0$, donc $-1\leqslant f(x)\leqslant 0$

   Ainsi, dans tous les cas, $-1\leqslant f(x)\leqslant 1$. Posons $m=-1$ et $M=1$, ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $m\leqslant f(x)\leqslant M$. Par conséquent, on a montré qu'il existe $(m,M)\in\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $m\leqslant f(x)\leqslant M$. $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc bornée sur } \mathbb{R}.}$

   Remarque 2. On pouvait aller plus vite, en écrivant [1] que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $(1-|x|)^2\geqslant 0$, et donc $1-2|x|+x^2\geqslant 0$, ainsi, $2|x|\leqslant 1+x^2$ dès lors, $|f(x)|\leqslant 1$ et f est ainsi bornée.

12. Présentons deux méthodes :
   - Supposons que f soit périodique. Ainsi, il existe $T>0$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x+T)=f(x)$. En particulier, pour $x=0$, $f(T)=f(0)=0$. Dès lors, $\dfrac{2T}{1+T^2}=0$, en multipliant par $1+T^2$, on en déduit que $T=0$, ce qui est absurde. On a ainsi montré que $\boxed{f \text{ n'est pas périodique.}}$
   - Supposons que f soit périodique. Ainsi, il existe $T>0$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x+T)=f(x)$. En particulier, pour $x=1$, $f(T+1)=f(1)$. Comme $T>0$, $T+1>1$, or f est strictement décroissante sur $[\,1\,;+\infty\,[$, donc $f(T+1)<f(1)$. Ce qui est une contradiction. On a ainsi montré que $\boxed{f \text{ n'est pas périodique.}}$

13. La fonction h est bijective si

$$\forall y\in J \quad \exists! x\in I \qquad y=h(x)$$

14. $\boxed{h(I)=\{h(x)\mid x\in I\}}$

15. La fonction g est continue et strictement décroissante sur $[\,1\,;+\infty\,[$, ainsi d'après le théorème de la bijection strictement croissante, g est une bijection de $[\,1\,;+\infty\,[$ vers

$$g([\,1\,;+\infty\,[)=\left]\lim_{x\to+\infty}f(x)\,;f(1)\right]=\,]\,0\,;1\,]$$

1. Méthode vue dans l'exercice 2 du TD2.

16. Soit $y \in]0;1]$. Comme $g\colon [1;+\infty[\to]0;1]$ est bijective, il existe un unique $x \in [1;+\infty[$ tel que $y = g(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$, ainsi, $(1+x^2)y = 2x$ soit $yx^2 - 2x + y = 0$, comme $y > 0$, x est solution d'une équation du second degré dont le discriminant est $\Delta = 4 - 4y^2$. Distinguons les cas :
    - Si $y = 1$, alors $\Delta = 0$ et $x = \dfrac{2}{2y} = 1$.
    - Si $y \in]0;1[$. Comme $0 < y < 1$ et que la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, $0^2 < y^2 < 1^2$, ainsi, $\Delta > 0$. Dès lors,
    $$x = \frac{2+\sqrt{4-4y^2}}{2y} = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} \quad \text{ou} \quad x = \frac{2-\sqrt{4-4y^2}}{2} = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$$
    Notons $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$ et $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$, comme $\sqrt{1-y^2} > 0$, $1+\sqrt{1-y^2} > 1$, comme $0 < y < 1$, $\dfrac{1}{y} > 1$ (la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$), par produit $x_1 > 1$. De plus, $x_1 x_2 = \dfrac{y}{y} = 1$, donc $x_2 = \dfrac{1}{x_1} < 1$.
    Comme $x > 1$, on en déduit que $x = x_2$ est impossible, dès lors, $x = x_1$.

    Remarquons que si $y = 1$, alors l'équation $x = \dfrac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$ est encore vraie. Dès lors, pour tout $y \in]0;1]$, l'unique $x \in [1;+\infty[$ tel que $y = g(x)$ vérifie $x = \dfrac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$.

    $$\boxed{\text{Par conséquent, } g^{-1}\colon \begin{cases}]0;1] \longrightarrow [1;+\infty[\\ \quad y \quad \longmapsto \dfrac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} \end{cases}.}$$

    Remarque 3. Si on préfère, on peut écrire $g^{-1}\colon \begin{cases}]0;1] \longrightarrow [1;+\infty[\\ \quad x \quad \longmapsto \dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \end{cases}$

17. $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$ et $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$
18. L'ensemble de définition de tan est $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. On peut aussi noter cet ensemble de définition par :
    $$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$$
19. tan est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ et
    $$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \qquad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$
20. En écrivant tan comme $\dfrac{\sin}{\cos}$ puis en multipliant par $\cos^2$ et en utilisant la formule de $\cos(2\theta)$ avec $\theta = \dfrac{x}{2}$, on obtient :
    $$\frac{1-\tan^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\dfrac{x}{2}\right)} = \frac{1 - \dfrac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}}{1 - \dfrac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}} = \frac{\cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2})} = \frac{\cos(2\frac{x}{2})}{1} = \cos(x)$$
    En écrivant tan comme $\dfrac{\sin}{\cos}$ puis en multipliant par $\cos^2$ et en utilisant la formule de $\sin(2\theta)$ avec

$\theta = \dfrac{x}{2}$, on obtient :

$$\frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2\dfrac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})}}{1-\dfrac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}} = \frac{2\cos(\frac{x}{2})\sin(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})+\sin^2(\frac{x}{2})} = \frac{\sin(2\frac{x}{2})}{1} = \sin(x)$$

En écrivant que $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$, on obtient :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\dfrac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{\dfrac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

21. $\dfrac{3}{5}$ et $\dfrac{4}{5}$ sont bien des rationnels. Si on note M le point de coordonnées $\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$ et O l'origine du repère, alors
$$OM^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9+16}{25} = 1$$
Ainsi, le point de coordonnées $\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$ est bien un point birationnel appartenant au cercle trigonométrique.

22. Voir démo du cours.

23. Comme $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$, on peut en conclure que le point de coordonnées $(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}})$ est bien sur le cercle trigonométrique. De plus, si $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$, alors il existe p et q deux entiers non nuls (car $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$) tels que $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{p}{q}$, donc $\sqrt{2} = \dfrac{q}{p} \in \mathbb{Q}$ ce qui est impossible. Donc $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.

$\boxed{\text{Ainsi, le point de coordonnées } (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ est sur le cercle trigonométrique mais n'est pas birationnel.}}$

24. Soit un entier $n \geqslant 2$, comme tan réalise une bijection de $]-\pi/2\,;\pi 2[$ vers $\mathbb{R}$, il existe un unique $t \in]-\pi/2\,;\pi/2[$ tel que $n = \tan(t)$. Notons $x = 2t$. D'après la question 20,
$$\sin(x) = \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = \frac{2n}{1+n^2} = g(n)$$
De même, $\cos(x) = \dfrac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = \dfrac{1-n^2}{1+n^2}$. Ainsi le point de coordonnées
$$(\cos(x), \sin(x)) = (\frac{2n}{1+n^2}, \frac{1-n^2}{1+n^2})$$
est bien un point birationnel du cercle trigonométrique (car $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$). De plus, g est une bijection de $[1\,;+\infty[$ vers $]0\,;1]$, ainsi si n et m sont deux entiers supérieurs ou égaux à 2 avec $n \neq m$, alors $g(n) \neq g(m)$, autrement dit les points de coordonnées $(\dfrac{2n}{1+n^2}, \dfrac{1-n^2}{1+n^2})$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, ont tous des ordonnées différentes donc ce sont des points deux à deux distincts et ceux sont des points birationnels du cercle trigonométrique.

$\boxed{\text{Il existe une infinité de points à coordonnées birationnels sur le cercle trigonométrique.}}$

Remarque 4. Comme le point $(\cos(x), \sin(x))$ est sur le cercle trigonométrique, on a

$$\left(\frac{1-n^2}{1+n^2}\right)^2 + \left(\frac{2n}{1+n^2}\right)^2 = 1$$

En multipliant par $(1+n^2)^2$, on obtient, $(1-n^2)^2 + (2n)^2 = (1+n^2)^2$ (et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$) ce qui prouve qu'il existe un nombre infini de triplets Pythagoricien. On a fait le lien ici entre deux choses a priori différentes, les points birationnels du cercle trigonométrique et les triplets d'entiers (a, b, c) vérifiant $c^2 = a^2 + b^2$.

Exercice : soyez fonctionnels !

1. En prenant $x = x' = 0$, on obtient $f(0)f(0) - f(0) = 0$, ainsi $f(0)(f(0) - 1) = 0$. Par conséquent, $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Supposons que $f(0) = 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)f(0) - f(x \times 0) = x$, pour $x = 3$, on obtient $f(3) \times 0 - 0 = 3$ donc $3 = 0$ ce qui est absurde. Ainsi, $\boxed{f(0) = 1}$. Prenons $x = 0$ et $x' = 1$, alors $f(0)f(1) - f(0 \times 1) = 0 + 1$ donc $f(0)f(1) = 1 + f(0)$. Comme $f(0) = 1$, on obtient $\boxed{f(1) = 2}$.
2. Raisonnons par analyse-synthèse :
   - **Analyse :** si f est solution, alors la question précédente montre que $f(0) = 1$, ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)f(0) - f(x \times 0) = x + 0$, soit $f(x) = x + f(0) = x + 1$. Ainsi, $f : x \mapsto x + 1$.
   - **Synthèse :** posons $f : x \mapsto x + 1$, alors $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Soit $(x, x') \in \mathbb{R}^2$,

     $$f(x)f(x') - f(xx') = (x+1)(x'+1) - (xx'+1) = xx' + x + x' + 1 - xx' - 1 = x + x'$$

     Ainsi, f est bien solution de l'équation fonctionnelle.

   Par conséquent, la synthèse montre que la fonction $x \mapsto x + 1$ est bien solution de l'équation fonctionnelle. L'analyse montre que c'est la seule solution de l'équation fonctionnelle. En conclusion, $\boxed{\text{L'équation fonctionnelle admet une et unique solution et c'est } x \mapsto x+1.}$

Exercice : trouver le bon raisonnement pour répondre à la grande question sur la vie, l'univers et le reste

Raisonnons par analyse-synthèse :

- **Analyse :** supposons qu'il existe g et h deux fonctions telles que $f = g + h$ avec $g(0) = g(42) = 0$ et $h : x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x)$ avec a et b des réels. Alors,

  $$\begin{array}{rcl} f(0) & = & g(0) + h(0) = 0 + a = a \\ f(42) & = & g(42) + h(42) = a\cos(42) + b\sin(42) \end{array}$$

  Ainsi, $b\sin(42) = f(42) - f(0)\cos(42)$. Supposons que $\sin(42) = 0$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $42 = k\pi$, ainsi nécessairement, $k \neq 0$ et $\pi = \dfrac{42}{k} \in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde car π est irrationnel. Par conséquent, $\sin(42) \neq 0$ et $b = \dfrac{f(42) - f(0)\cos(42)}{\sin(42)}$ Dès lors, $h : x \mapsto f(0)\cos(x) + \dfrac{f(42) - f(0)\cos(42)}{\sin(42)}\sin(x)$. De plus, comme $f = g + h$, on obtient :

  $$g : x \mapsto f(x) - f(0)\cos(x) - \frac{f(42) - f(0)\cos(42)}{\sin(42)}\sin(x)$$

- **Synthèse :** posons les deux fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$:

  $$g : x \mapsto f(x) - f(0)\cos(x) - \frac{f(42) - f(0)\cos(42)}{\sin(42)}\sin(x) \text{ et}$$
  $$h : x \mapsto f(42)\cos(x) + \frac{f(42) - f(0)\cos(42)}{\sin(42)}\sin(x)$$

Ainsi, il existe bien $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $h\colon x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x)$. De plus,

$$\begin{aligned} g(0) &= f(0) - f(0) \times 1 + \frac{f(42) - f(0)\cos(42)}{\sin(42)} \times 0 = 0 \\ g(42) &= f(42) - f(0)\cos(42) - \frac{f(42) - f(0)\cos(42)}{\sin(42)} \sin(42) = 0 \end{aligned}$$

En conclusion, la synthèse montrer qu'il existe g et h deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que $g(0) = g(42) = 0$ et $h\colon x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x)$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $f = g + h$. L'analyse nous a permis de montrer que g et h sont uniques.

Exercice : le football se joue à 11 et la fin, c'est l'exponentielle qui gagne [2]

1.
```
def Factoriel(n):
    if n==0:
        return 1
    else:
        p=1
        for i in range(1,n+1):#i va prendre toutes les valeurs entre 1 et n
            p=p*i
        return p
```

   On remarque que si $n = 0$, alors il y aura aucune étape de réalisé dans la boucle `for i in range(1,n+1)`, on peut donc faire le code suivant plus court :

```
def Factoriel(n):
    p=1
    for i in range(1,n+1):#i va prendre toutes les valeurs entre 1 et n
        p=p*i
    return p
```

2.
```
def Somme(n,x):
    S=0
    for k in range(0,n+1):#k va prendre toutes les valeurs entre 0 et n
        S=S+x**k/Factoriel(k)
    return S
```

3. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « pour tout $x \geqslant 0$, $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.».
   - Pour $n = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, comme exp est croissante et que $x \geqslant 0$, $\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^0 = 1$. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Posons, pour $x \in \mathbb{R}$,
   $$f(x) = \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \ldots - \frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$
   Remarquons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par différence de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$
   $$f'(x) = \mathrm{e}^x - 0 - 1 - \frac{2x}{2} - \frac{3x^2}{6} - \ldots \frac{nx^{n-1}}{n!} - \frac{(n+1)x^n}{(n+1)!} = \mathrm{e}^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \ldots \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{x^n}{n!}$$
   En utilisant $\mathscr{P}(n)$, il en découle que pour tout x appartenant à l'intervalle $\mathbb{R}_+$, $f'(x) \geqslant 0$ Ainsi, f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \geqslant f(0) = 0$. Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   - Par récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   En particulier, $\mathscr{P}(11)$ est vraie, ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+,\ \mathrm{e}^x \geqslant \sum_{k=0}^{11} \frac{x^k}{k!}.}$

2. Histoire de troller la coupe du monde de rugby !