Chapitre 3

# Nombres complexes

Ce chapitre a pour but de présenter les nombres complexes et d'effectuer des calculs avec ces nombres. Nous verrons aussi comment résoudre certaines équations avec des nombres complexes.

**Attention : utiliser un lecteur de pdf adapté**

Ce polycopié contient une animation, il est donc conseillé d'utiliser un lecteur de pdf capable de lire les animations (comme Adobe Reader, Foxit PDF Reader, Okular ou autres).

## Table des matières

# 1 Définition des nombres complexes et propriétés

**Définition des nombres complexes**

Si i vérifie $\mathrm{i}^2 = -1$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a + ib$ est appelé **nombre complexe**. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

**Remarques 1.**
- Les nombres réels sont des nombres complexes. En effet, si $x \in \mathbb{R}$, alors $x = x + 0\mathrm{i} \in \mathbb{C}$.
- Cette définition part du principe qu'un tel nombre i existe ce qui est surprenant et ne donne pas d'explication sur ce qu'est le produit $ib$ ni l'addition entre $a$ et $ib$. En fait, cette définition est bien rigoureuse car on peut construire un tel nombre i et définir $a + ib$. Cette construction, hors programme, se trouve en fin de chapitre.
- Une telle construction permettrait aussi de montrer qu'une telle écriture est unique : si $z = a + ib = a' + ib'$ avec $(a, a', b, b') \in \mathbb{R}^4$, alors $a = a'$ et $b = b'$, on admet donc aussi l'unicité d'une telle écriture.
- Soit $z = a + ib$ avec $a$ et $b$ des réels. Si $b = 0$, alors $z = a \in \mathbb{R}$. Si $a = 0$, alors $z = ib$, on dit dans ce cas que $z$ est un imaginaire pur.

**Définition de la partie réelle, de la partie imaginaire et de l'écriture algébrique**

Si $z = a + ib$ avec $a$ et $b$ réels, on dit que $a$ est la **partie réelle** de $z$ et que $b$ est la **partie imaginaire** de $z$. On note $\mathrm{Re}(z) = a$ et $\mathrm{Im}(z) = b$. L'égalité $z = a + ib$ s'appelle l'**écriture algébrique** de $z$.

**Définition des opérations sur les nombres complexes**

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes (avec $a$, $a'$, $b$ et $b'$ des nombres réels). Alors on pose

$$z + z' = (a + \mathrm{i}b) + (a' + \mathrm{i}b') = a + a' + \mathrm{i}(b + b') \quad \text{et} \quad z \times z' = (a + \mathrm{i}b) \times (a' + \mathrm{i}b') = (aa' - bb') + \mathrm{i}(ab' + a'b)$$

**Proposition nº 1 : propriétés algébriques des complexes**

Soit $(z, z', \tilde{z}, \lambda) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{R}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. $z + 0 = z$ | 0 : neutre de l'addition | 2. $z \times 1 = z$ | 1 : neutre de multiplication |
| 3. $z + z' = z' + z$ | commutativité de l'addition | 4. $zz' = z'z$ | commutativité de la multiplication |
| 5. $(z + z') + \tilde{z} = z + (z' + \tilde{z})$ | associativité de l'a. | 6. $(z \times z') \times \tilde{z} = z \times (z' \times \tilde{z})$ | associativité de la m. |
| 7. $\exists! w \in \mathbb{C} \mid z + w = 0$ | opposé | 8. $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad \exists! w \in \mathbb{C} \quad zw = 1$, noté $w = \frac{1}{z}$ | inverse |
| 9. $z \times (z' + \tilde{z}) = zz' + z\tilde{z}$ | distributivité de la m. | 10. $zz' = 0 \iff z = 0$ ou $z' = 0$ | intégrité de $\mathbb{C}$ |
| 11. $\mathrm{Re}(\lambda z + z') = \lambda \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$ | linéarité partie réelle | 12. $\mathrm{Im}(\lambda z + z') = \lambda \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$ | lin. par. imaginaire |

**Démonstration de la proposition nº 1 :** Écrivons $z = a + \mathrm{i}b$, $z' = a' + \mathrm{i}b'$, $\tilde{z} = \tilde{a} + \mathrm{i}\tilde{b}$ avec $(a, b, a', b', \tilde{a}, \tilde{b}) \in \mathbb{R}^6$.

1. $z + 0 = (a + \mathrm{i}b) + (0 + \mathrm{i}0) = (a + 0) + \mathrm{i}(b + 0) = a + \mathrm{i}b$
2.
3.
4.
5.
6.
7. Posons $w = (-a) + \mathrm{i}(-b)$ de sorte que $z + w = (a + \mathrm{i}b) + (-a + \mathrm{i}(-b)) = (a + (-a)) + \mathrm{i}(b + (b-)) = 0$ De plus, si $w' \in \mathbb{C}$ tel que $z + w' = 0$, alors $w' = w' + 0 = w' + (z + w) = (w' + z) + w = 0 + w = w$, d'où l'unicité.
8. Prenons $z \in \mathbb{C}^*$, alors nécessairement, au moins l'un des deux réels $a$ et $b$ est non nul (par l'absurde si les deux l'étaient, alors $z = 0$). Posons alors $w = \dfrac{a}{a^2 + b^2} + \mathrm{i}\dfrac{-b}{a^2 + b^2}$ de sorte que $zw = \dfrac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} + \mathrm{i}0 = 1$. De plus, si $w' \in \mathbb{C}$ tel que $zw' = 1$, alors $w' = w' \times 1 = w' \times (zw) = (w'z)w = 1w = w$ d'où l'unicité.
9.
10. Supposons $zz' = 0$, alors il y a deux cas : si $z = 0$, alors il n'y a rien à faire. Si $z \neq 0$, alors $\dfrac{1}{z}(zz') = \dfrac{1}{z}0$ d'où $z' = 0$.
11.

■

**Exemples 1.** Écrire les nombres suivants sous forme algébrique : $(1 + 2\mathrm{i})(3 - 2\mathrm{i})$, $\dfrac{1}{1 + 2\mathrm{i}}$.

**Attention : la partie réelle/imaginaire du produit n'est pas ce que vous croyez**

En général, $\mathrm{Re}(zz') \neq \mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(zz') \neq \mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(z')$. Considérez $z = z' = \mathrm{i}$.

**Péril imminent : on ne compare pas les complexes seulement les réels.**

Il n'y a pas de $\leqslant$, $<$, $\geqslant$ ou $>$ définis sur $\mathbb{C}$ (et même s'il y en avait, vous écririez des choses fausses avec).

**Définition de point d'affixe**

On note $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé d'un plan. Soit $z \in \mathbb{C}$.

- On appelle **point d'affixe** de $z$ le point $M(z)$ de coordonnées $(a, b)$ avec $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$.
- On appelle **vecteur d'affixe** de $z$ le vecteur $\overrightarrow{v(z)}$ de coordonnées $(a, b)$.

**Définition du conjugué**

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On appelle **conjugué** de $z = a + \mathrm{i}b$ le complexe $\bar{z} = a - \mathrm{i}b$.

**Proposition n° 2 : propriétés du conjugué**

Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et $x \in \mathbb{R}$.

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $z$ est réel ssi $\overline{z} = z$
3. $z$ est un imaginaire pur ssi $\overline{z} = -z$
4. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
5. $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$
6. $\overline{xz} = x\overline{z}$
7. $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$
8. $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}}$
9. $z \neq 0 \implies \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$
10. $z \neq 0 \implies \overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$

**Démonstration de la proposition n° 2 :** Notons $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$ avec $(a, b, a', b') \in \mathbb{R}^4$.

1. $z = a + \mathrm{i}b$ donc $\overline{z} = a + \mathrm{i}(-b)$, ainsi, $\overline{\overline{z}} = a + \mathrm{i}(-(-b)) = a + \mathrm{i}b = z$
2. Si $z$ est réel, $a + \mathrm{i}b = z + \mathrm{i}0$. Par unicité de l'écriture algébrique, $a = z$ et $b = 0$, donc $z = a + \mathrm{i}0$, dès lors, $\overline{z} = a + \mathrm{i}(-0) = a = z$. Réciproquement, si $\overline{z} = z$, alors $a + \mathrm{i}b = a + \mathrm{i}(-b)$ par unicité de l'écriture algébrique, $b = -b$ soit $2b = 0$ soit $b = 0$, finalement, $z = a \in \mathbb{R}$.
3. Si $z$ est un imaginaire pur, alors $z = 0 + \mathrm{i}b$ et $\overline{z} = 0 + \mathrm{i}(-b) = -\mathrm{i}b = -z$. Réciproquement, si $\overline{z} = -z$, alors $a - \mathrm{i}b = -a - \mathrm{i}b$. Par unicité de l'écriture algébrique, $a = -a$ soit $2a = 0$ et donc $a = 0$, ainsi, $z = 0 + \mathrm{i}b$ est un imaginaire pur.
4. En calculant $z + z'$ puis son conjugué, il vient
$$\overline{z + z'} = \overline{(a + a') + \mathrm{i}(b + b')} = (a + a') - \mathrm{i}(b + b') = a - \mathrm{i}b + a' - \mathrm{i}b = \overline{z} + \overline{z'}$$
5. En calculant $z \times z'$ puis son conjugué, il vient
$$\overline{z \times z'} = \overline{(a + \mathrm{i}b)(a' + \mathrm{i}b')} = \overline{aa' - bb' + \mathrm{i}(ab' + a'b)} = aa' - bb' - \mathrm{i}(ab' + a'b)$$
De plus, $\overline{z}\,\overline{z'} = (a - \mathrm{i}b)(a' - \mathrm{i}b') = aa' - bb' - \mathrm{i}(ab' + a'b)$, ainsi, on a bien $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$.
6. En utilisant les points 5. et 2., il vient $\overline{xz} = \overline{x} \times \overline{z} = x\overline{z}$.
7. $z + \overline{z} = (a + \mathrm{i}b) + (a - \mathrm{i}b) = 2a = 2\mathrm{Re}(z)$, en divisant par 2, on obtient le résultat.
8. $z - \overline{z} = (a + \mathrm{i}b) - (a - \mathrm{i}b) = 2\mathrm{i}b = 2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z)$, en divisant par $2\mathrm{i}$, on obtient le résultat.
9. Supposons $z \neq 0$, alors
$$\frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{a - \mathrm{i}b} = \frac{a + \mathrm{i}b}{(a - \mathrm{i}b)(a + \mathrm{i}b)} = \frac{a + \mathrm{i}b}{a^2 + b^2}$$
Tandis que
$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{a + \mathrm{i}b}\right)} = \overline{\left(\frac{a - \mathrm{i}b}{(a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b)}\right)} = \overline{\left(\frac{a - \mathrm{i}b}{a^2 + b^2}\right)} = \overline{\left(\frac{a}{a^2 + b^2} + \mathrm{i}\frac{-b}{a^2 + b^2}\right)} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \mathrm{i}\frac{b}{a^2 + a^2}$$
On a donc bien démontré l'égalité
10. Supposons $z \neq 0$, alors, en utilisant les points 5. et 9. il en découle que $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \overline{z' \times \dfrac{1}{z}} = \overline{z'}\,\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \overline{z'}\dfrac{1}{\overline{z}} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$ ■

**Définition du module**

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On appelle **module** de $z = a + ib$ le réel $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

**Remarque 2.** Le module de $z$ est la norme du vecteur $\overrightarrow{OM(z)}$.

**Proposition n° 3 : propriétés du module**

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$.

1. $|z| \geqslant 0$
2. $|z| = 0$ ssi $z = 0$
3. $|z|^2 = z \times \overline{z}$
4. $|zz'| = |z| \times |z'|$
5. $|z| = |\overline{z}|$
6. $z \neq 0 \implies \left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$
7. $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$
8. $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$
9. $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)
10. $||z| - |z'|| \leqslant |z - z'|$ (2nd inégalité triangulaire)
11. $|z + z'| = |z| + |z'| \iff \exists \lambda \geqslant 0 \mid z = \lambda z'$ ou $z' = \lambda z$ (cas d'égalité de l'inégalité triangulaire)

**Démonstration de la proposition n° 3 :** Prenons $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

1. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geqslant 0$
2. Si $z = 0$, donc $a = 0$ et $b = 0$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 0$. Réciproquement, si $|z| = 0$, alors $\sqrt{a^2 + b^2} = 0$, en mettant au carré on obtient $a^2 + b^2 = 0$, or $a^2 \geqslant 0$ et $b^2 \geqslant 0$ et si une somme de termes positifs est nul alors chacun des termes sont nuls. Donc $a^2 = 0$ et $b^2 = 0$, ainsi, $a = b = 0$, d'où $z = 0$.
3. $z \times \overline{z} = (a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) = a^2 + b^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2 = |z|^2$
4. $|zz'| = \sqrt{|zz'|^2} = \sqrt{(zz')(\overline{zz'})} = \sqrt{zz'\overline{z}\,\overline{z'}} = \sqrt{z\overline{z}z'\overline{z'}} = \sqrt{|z|^2|z'|^2} = |z| \times |z'|$
5. $|\overline{z}| = |a - \mathrm{i}b| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$
6. Supposons $z \neq 0$, alors $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \sqrt{\dfrac{z'}{z} \times \overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)}} = \sqrt{\dfrac{z'}{z} \times \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}} = \sqrt{\dfrac{z'\overline{z'}}{z\overline{z}}} = \sqrt{\dfrac{|z'|^2}{|z|^2}} = \dfrac{|z'|}{|z|}$
7. $|\mathrm{Re}(z)| = |a| = \sqrt{|a|^2} \leqslant \sqrt{|a|^2 + |b|^2} = |z|$
8. $|\mathrm{Im}(z)| = |b| = \sqrt{|b|^2} \leqslant \sqrt{|a|^2 + |b|^2} = |z|$
9. $$\begin{aligned} |z + z'| &= \sqrt{(z + z')\overline{(z + z')}} = \sqrt{(z + z')(\overline{z} + \overline{z'})} = \sqrt{|z|^2 + |z'|^2 + z\overline{z'} + \overline{z}z'} = \sqrt{|z|^2 + |z'|^2 + z\overline{z'} + \overline{z\overline{z'}}} \\ &= \sqrt{|z|^2 + |z'|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{z'})} \leqslant \sqrt{|z|^2 + |z'|^2 + 2|z\overline{z'}|} = \sqrt{|z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'|} = \sqrt{(|z| + |z'|)^2} = |z| + |z'| \end{aligned}$$
10. $|z| = |(z - z') + z'| \leqslant |z - z'| + |z'|$ donc $|z| - |z'| \leqslant |z - z'|$. De même, $|z'| = |(z' - z) + z| \leqslant |z' - z| + |z|$ donc $|z'| - |z| \leqslant |z' - z| = |z - z'|$. De plus, $||z| - |z'|| = \max(|z| - |z'|, |z'| - |z|) \leqslant |z - z'|$
11. ∎

**Comment écrire les fractions sous forme algébrique ?**

L'égalité $|z|^2 = z \times \bar{z}$ permet d'écrire les fractions sous forme algébrique en multipliant le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

**Exemples 2.** Écrire sous forme algébrique les complexes $\dfrac{1}{1 + \mathrm{i}}$ et $\dfrac{2 + \mathrm{i}}{-3 + \mathrm{i}}$.

## 2 Nombres complexes de module 1

**Définition du cercle unité**

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$. C'est le **cercle unité/trigonométrique**.

**Définition de l'exponentielle complexe**

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on définit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$.

**Proposition nº 4 : propriétés de l'exponentielle complexe**

Soient $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$.

1. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \in \mathbb{U}$
2. $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\} = \mathbb{U}$.
3. $\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}) = \cos(\theta)$
4. $\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}) = \sin(\theta)$
5. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\theta+\theta')} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'}$ (ce qui justifie la notation exponentielle)
6. $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}}$
7. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'} \iff \theta \equiv \theta' \ [2\pi]$
8. $\cos(\theta) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}}{2}$ $\quad \sin(\theta) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}}{2\mathrm{i}}$ (formules d'Euler)
9. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\theta}$ i.e. $(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$ (formule de Moivre)

**Application à la trigonométrie**

On peut simplifier beaucoup de calculs de trigonométrie en passant par les complexes grâce aux outils suivants :

- $\cos(x) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x})$
- $\sin(x) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x})$
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(x+x')} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x'}$
- La formule de Moivre
- Les formules d'Euler
- Linéarité partie réelle/imaginaire
- La factorisation par l'angle moitié : $1 \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$ se factorise par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x/2}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,y}$ se factorise par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{x+y}{2}}$.

**Exemples 3.**
- Linéariser $\sin(x)^3$ (linéariser veut dire écrire $\sin(x)^3$ comme somme de $A\cos(px)$ et $B\sin(qx)$).
- Calculer $\cos(p) + \cos(q)$, on pourrait de même calculer $\cos(p) - \cos(q)$, $\sin(p) \pm \sin(q)$.
- Calculer $\cos(p)\cos(q)$ etc.

## 3 Forme trigonométrique

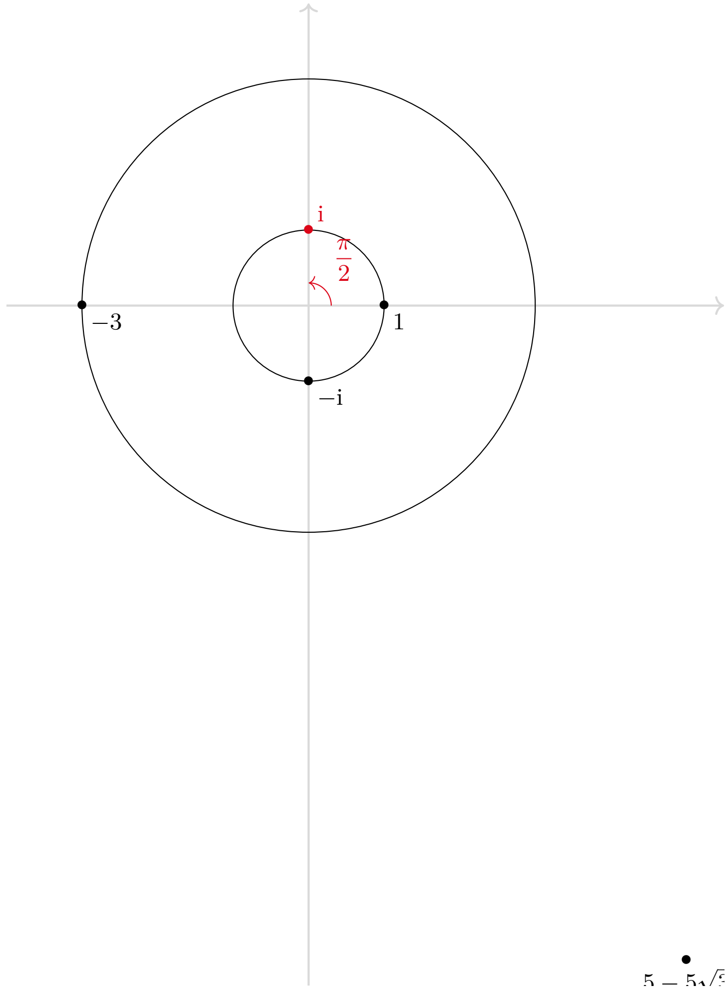
**Proposition nº 5 : existence de la forme trigonométrique d'un nombre complexe**

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$. De plus, $r = |z|$ et $\theta$ est unique modulo $2\pi$.

**Démonstration de la proposition nº 5 :** Comme $z \neq 0$, $|z| \neq 0$, posons $u = \frac{z}{|z|}$, alors $|u| = \frac{|z|}{|z|} = 1$. Ainsi, $u \in \mathbb{U}$, d'après la proposition 4, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$, ainsi, $z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$. Par conséquent, on a montré l'existence de décomposition de $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ avec $r = |z|$. Soit $r' > 0$ et $\theta' \in \mathbb{R}$ tel $z = r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'}$, alors $|z| = |r'| \times |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'}| = r' = r$. Dès lors, $r' = r$. Donc $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$. Il en découle que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$. Dès lors, $\theta' \equiv \theta\ [2\pi]$ (d'après la proposition 4). ■

**Exemples 4.** Écrire 1, i, $-3$, $-\mathrm{i}$, $5 - 5\sqrt{3}\mathrm{i}$ sous forme $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

**Solution des exemples 4 :**
- $|1| = 1$ donc $1 = 1 \times (1 + 0\mathrm{i}) = 1(\cos(0) + \mathrm{i}\sin(0)) = 1 \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,0}$
- $|\mathrm{i}| = 1$ donc $\mathrm{i} = 1 \times (0 + 1 \times \mathrm{i}) = (\cos(\pi/2) + \mathrm{i}\sin(\pi/2)) = 1 \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi/2}$.
- $|-3| = 3$ donc $-3 = 3 \times (-1) = 3 \times (-1 + \mathrm{i}0) = 3(\cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi)) = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi}$
- $|-\mathrm{i}| = 1$, donc $-\mathrm{i} = 1 \times (0 + (-1) \times \mathrm{i}) = 1 \times (\cos(-\pi/2) + \mathrm{i}\sin(-\pi/2)) = 1 \times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\pi/2}$
- $|5 - 5\sqrt{3}| = \sqrt{5^2 + 5^2 \times 3} = \sqrt{100} = 10$, donc $5 - 5\sqrt{3} = 10\left(\frac{5}{10} - \frac{5\sqrt{3}}{0}\mathrm{i}\right) = 10(\cos(-\pi/3) + \mathrm{i}\sin(-\pi/3)) = 10\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}$




**Définition de la forme trigonométrique et de l'argument**

L'écriture $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ s'appelle la **forme trigonométrique** de $z$. De plus, $r = |z|$ est le module et on dit que $\theta$ est **un** argument de $z$. On note $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$.

**Exemple 5.** Calculer un argument de $1 + i$.

**Attention à ne pas confondre le et un**

Il n'y a pas unicité de $\theta$ car c'est un angle on dit donc «un argument» et non «l'argument».

**Remarque 3.** L'argument est unique si on le prend dans $[\,0\,;2\pi\,[$ : $\quad \forall z \in \mathbb{C}^* \quad \exists!\theta \in [\,0\,;2\pi\,[ \quad z = |z|e^{i\theta}$

**Proposition n° 6 : propriétés des arguments**

Soient $z$ et $z'$ deux nombres complexes non nuls.

1. $z = z'$ ssi ($|z| = |z'|$ et $\arg(z) \equiv \arg(z')\ [2\pi]$)
2. $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$
3. $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$
4. $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$
5. $z \in \mathbb{R}_+$ ssi 0 est un argument de $z$
6. $z \in \mathbb{R}_-$ ssi $\pi$ est un argument de $z$

**Exemple 6.** Calculer $(1+\mathrm{i})^6$.

**Remarque 4.** Si $f(t) = A\cos(t-\varphi)$ ($A$ l'amplitude et $\varphi$ la phase), alors $f(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$ avec $a = A\cos(\varphi)$ et $b = A\sin(\varphi)$. Si on part de $a\cos(t) + b\sin(t)$, écrire sous forme trigonométrique $z = a + ib$ pour retrouver $A$ et $\varphi$.

**Exemple 7.** Si $f : t \mapsto 3\sqrt{3}\cos(t) + 3\sin(t)$, retrouver l'amplitude et la phase.

**Définition de l'exponentielle complexe**

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $z = a + ib \in \mathbb{C}$, on appelle exponentielle complexe de $z$ le complexe : $\exp(z) = \exp(a)\exp(ib)$.

**Proposition n° 7 : propriétés de l'exponentielle complexe**

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$

1. $|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}(z))$
2. $\arg(\exp(z)) \equiv \mathrm{Im}(z)\ [2\pi]$
3. $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$
4. $\exp(z+z') = \exp(z)\exp(z')$
5. $\dfrac{1}{\exp(z)} = \exp(-z)$
6. $\exp(z-z') = \dfrac{\exp(z)}{\exp(z')}$
7. $\exp(z) = \exp(z')$ ssi $z \equiv z'\ [\mathrm{i}2\pi]$ (ssi il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = z' + 2\mathrm{i}k\pi$)

# 4 Résolutions d'équations complexes

## 4.1 Résolution des équations de la forme $z^2 = Z$

**Définition d'une racine carrée d'un complexe**

Soit $Z \in \mathbb{C}$, on appelle **racine carrée** de $Z$ tout nombre complexe $z$ tel que $z^2 = Z$.

**Proposition n° 8 : racines carrées d'un nombre complexe**

Si $Z \in \mathbb{C}^*$, alors $Z$ possède exactement deux racines carrées qui sont opposés.

**Démonstration de la proposition n° 8 :** Comme $Z \in \mathbb{C}^*$, il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $Z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Posons $z = \sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$, alors

$$z^2 = (\sqrt{r})^2\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\right)^2 \underset{\text{Moivre}}{=} r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = Z$$

De plus, $(-z)^2 = (-1)^2z^2 = Z$. Ainsi, $z$ et $-z$ sont deux racines carrées de $Z$. En outre, comme $Z \neq 0$, $z \neq 0$, ainsi $z$ et $-z$ sont deux racines carrées de $Z$ distinctes et opposées. Soit $\tilde{z}$ une racine carrée de $Z$, alors $\tilde{z}^2 = Z = z^2$. En particulier, $0 = \tilde{z}^2 - z^2 = (\tilde{z}-z)(\tilde{+}z)$, ainsi $\tilde{z} - z = 0$ ou $\tilde{z} + z = 0$ soit $\tilde{z} = z$ ou $\tilde{z} = -z$. ∎

**Attention au symbole $\sqrt{}$**

Le symbole $\sqrt{}$ ne s'utilise que pour des nombres réels positifs.

**Comment calculer les racines carrées de nombres complexes ?**

1. Si $Z \in \mathbb{R}_+$, alors les racines carrées sont $\sqrt{Z}$ et $-\sqrt{Z}$.
2. Si $Z \in \mathbb{R}_-$, alors les racines carrées sont $\mathrm{i}\sqrt{-Z}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{-Z}$.
3. Si $Z = r\mathrm{e}^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta$ connu, alors les racines carrées sont $\pm\sqrt{r}\mathrm{e}^{\frac{i\theta}{2}}$
4. Si $Z = A + \mathrm{i}B$, on pose $w = a + ib \in \mathbb{C}$, alors :

$$w^2 = Z \iff \begin{cases} |w^2| = |Z| \\ a^2 - b^2 + \mathrm{i}2ab = A + \mathrm{i}B \end{cases} \iff \begin{cases} |w|^2 = |Z| \\ a^2 - b^2 = A \\ 2ab = B \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 + b^2 = \sqrt{A^2+B^2} \\ a^2 - b^2 = A \\ 2ab = B \end{cases}$$

Les deux premières équations permettent de trouver la valeur de $a^2$ et de $b^2$, on trouve alors deux valeurs pour $a$ et deux valeurs pour $b$, seulement l'équation $2ab = B$ indique si $a$ et $b$ ont ou non le même signe.

**Exemples 8.** Donner les racines carrées de 0 $\quad 9, \quad -1, \quad -9, \quad 2\mathrm{i}, \quad -3+4\mathrm{i}$

## 4.2 Résolution des équations de la forme $az^2+bz+c=0$

**Proposition n° 9 : résolution des équations du second degré**

Soit $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$ avec $a\neq 0$ et l'équation $az^2+bz+c=0$. On note $\Delta=b^2-4ac$ son discriminant et $\delta$ une racine carrée de $\Delta$, alors :

- Si $\Delta\neq 0$ alors l'équation admet deux solutions distinctes : $\dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $\dfrac{-b+\delta}{2a}$
- Si $\Delta=0$, alors l'équation admet une solution double : $-\dfrac{b}{2a}$

**Démonstration de la proposition n° 9 :** Soit $z\in\mathbb{C}$, posons $\Delta=b^2-4ac$ et $\delta$ une racine carrée de $\Delta$ (qui existe bien d'après la proposition 8), alors :

$$\begin{aligned}
az^2+bz+c &= a\left(z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right) &&= a\left(z^2+2z\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\tfrac{c}{a}\right)\\
&= a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) &&= a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)\\
&= a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\delta^2}{4a^2}\right) &&= a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right)\\
&= a\left(z+\frac{b-\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b+\delta}{2a}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, $z$ est racine de $az^2+bz+c$ ssi $z=\dfrac{-b\pm\delta}{2a}$. Si $\Delta=0$, alors $\delta=0$ et donc la seule racine est $z=\dfrac{-b}{2a}$. Si $\Delta\neq 0$, alors on a bien trouvé deux racines car : $\dfrac{-b+\delta}{2a}-\dfrac{-b-\delta}{2a}=\dfrac{\delta}{a}\neq 0$. ■

**Exemple 9.** Résoudre l'équation $z^2-(1+4\mathrm{i})z+3\mathrm{i}-3=0$.

**Remarques 5.**
- En notant $z_1$ et $z_2$ les deux racines (éventuellement égales), $z_1+z_2=\dfrac{-b}{a}$ et $z_1z_2=\dfrac{c}{a}$.
- En considérant qu'une racine double compte ... deux fois, on peut dire qu'une équation du second degré à coefficients complexes a toujours exactement deux racines complexes comptées avec multiplicité. Finalement le cas réel est plus complexe que le cas complexe, car il y avait trois cas : deux racines, une racine ou pas de racine.

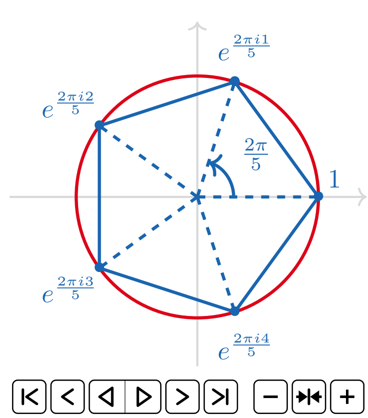
## 4.3 Résolution des équations de la forme $z^n=1$

**Définition des racines $n$-ièmes de l'unité**

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on appelle racine $n$-ième de l'unité (ou de 1) tout nombre complexe $z$ tel que $z^n=1$.
L'ensemble des racines $n$-ièmes de l'unité est noté $\mathbb{U}_n=\{z\in\mathbb{C}\mid z^n=1\}$

**Théorème n° 1 : expression des racines $n$-ièmes de l'unité**

Si $n\in\mathbb{N}^*$, les racines $n$-ièmes de 1 sont les $n$ complexes $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi k}{n}}$ pour $k\in[\![0\,;n-1]\!]$ :$\mathbb{U}_n=\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}\mid k\in[\![0\,;n-1]\!]\right\}$



**Démonstration du théorème n° 1 :**

- Soit $k \in [\![ 0\,; n-1 ]\!]$. Posons $z = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{2\pi k}{n}}$, alors, d'après la formule de Moivre, $z^n = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,2k\pi} = 1$.
- Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = 1$, alors $z \neq 0$ et il existe un unique $\theta \in [\,0\,;2\pi\,[$ tel que $z = |z|\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}$, alors $1 = z^n = |z|^n \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,n\theta} = 1\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,0}$, ainsi nécessairement $|z|^n = 1$ et $n\theta \equiv 0\ [2\pi]$. Ainsi, $|z| = 1$ et il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n\theta = 0 + 2k\pi$. En particulier, $\theta = \dfrac{2k\pi}{n} \in [\,0\,;\pi\,[$. Par conséquent, $k \in [\![ 0\,; n-1 ]\!]$ et $z = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{2k\pi}{n}}$.
- Notons que $0 = \dfrac{0\pi}{n} < \dfrac{2\pi}{n} < \dfrac{4\pi}{n} < \ldots < \dfrac{2\pi(n-1)}{n} < 2\pi$. Ainsi, nous avons $n$ nombres complexes dont les arguments sont tous dans $[\,0\,;2\pi\,[$, par unicité de l'argument dans cet intervalle, on peut en conclure que les $n$ racines $n$-ièmes sont deux à deux distinctes.

**Remarque 6.** Les racines $n$-ièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier dont l'un des sommets est 1.

## 4.4 Résolution des équations de la forme $z^n = Z$

**Définition des racines $n$-ièmes d'un complexe**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $Z \in \mathbb{C}^*$, on appelle racine $n$-ième de $Z$ tout nombre complexe $z$ tel que $z^n = Z$.

**Proposition n° 10 : expression des racines $n$-ièmes d'un nombre complexe**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $Z = \rho\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
L'équation $z^n = Z$ admet exactement $n$ solutions qui sont $\sqrt[n]{\rho}\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{\theta}{n}}\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{2\pi k}{n}}$ pour $k \in [\![ 0\,; n-1 ]\!]$.

**Exemple 10.** Donner les racines quatrièmes de $2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$.

**Remarque 7.** Comme on sait résoudre les équations du type $az^2 + bz + c = 0$ et celles du types $z^n = Z$. On peut se poser la question suivante : est-il possible de résoudre des équations de degré supérieurs comme $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ ou $az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e = 0$ ? La réponse est oui mais avec des formules plus compliquées que pour celles de degré 2 ( ces formules utiliseront des racines cubiques et quatrièmes de nombres complexes formés à partir de $a$, $b$, $c$, $d$ et $e$). Par contre, on peut démontrer (mais c'est très difficile) qu'il est impossible de trouver de telles formules pour des équations de degré 5 ou plus.

# 5 Fonctions à valeurs complexes

**Définition d'une fonction dérivable**

Si $f : I \to \mathbb{C}$, si $\mathrm{Re}(f) : x \mapsto \mathrm{Re}(f(x))$ et $\mathrm{Im}(f) : x \mapsto \mathrm{Im}(f(x))$ sont dérivables sur $I$, alors on dit que $f$ est dérivable sur $I$ et on pose pour tout $x \in I$, $f'(x) = \mathrm{Re}(f)'(x) + \mathrm{i}\mathrm{Im}(f)'(x)$.

**Exemples 11.**
- L'application $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,x}$.
- De manière générale, si $u : I \to \mathbb{C}$ est dérivable, alors $x \mapsto \mathrm{e}^{\,u(x)}$ est dérivable de dérivée $x \mapsto u'(x)\mathrm{e}^{\,u(x)}$.

**Solution des exemples 11 :**

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$, or cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$f'(x) = -\sin(x) + \mathrm{i}\cos(x) = \mathrm{i}(\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,x}$$
- Posons $g : x \mapsto \mathrm{e}^{\,u(x)}$. Alors, pour tout $x \in I$,
$$g(x) = \mathrm{e}^{\,\mathrm{Re}(u(x))+\mathrm{i}\mathrm{Im}(u(x))} = \mathrm{e}^{\,\mathrm{Re}(u(x)}\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(u(x))} = \mathrm{e}^{\,\mathrm{Re}(u(x))}\cos(\mathrm{Im}(u(x))) + \mathrm{i}\mathrm{e}^{\,\mathrm{Re}(u(x))}\sin(\mathrm{Im}(u(x)))$$
Or, $x \mapsto \mathrm{Re}(u(x))$ est dérivable par hypothèse tout comme exponentielle, par composée, $x \mapsto \exp(\mathrm{Re}(u(x))$ est dérivable. De même, $x \mapsto \cos(\mathrm{Im}(u(x)))$ et $x \mapsto \sin(\mathrm{Im}(u(x)))$ sont dérivables, donc $x \mapsto \cos(\mathrm{Im}(u(x))) + \mathrm{i}\sin(\mathrm{Im}(u(x)))$ est dérivable, par produit et somme, $g$ est dérivable sur $I$ et
$$g' \quad = \quad \mathrm{Re}(u)'\mathrm{e}^{\,\mathrm{Re}(u)}\cos(\mathrm{Im}(u)) - \mathrm{e}^{\,\mathrm{Re}(u)}\mathrm{Im}(u)'\sin(\mathrm{Im}(u)) + \mathrm{i}\left(\mathrm{Re}(u)'\mathrm{e}^{\,\mathrm{Re}(u)}\cos(\mathrm{Im}(u))\mathrm{e}^{\,\mathrm{Re}(u)} - \mathrm{Im}(u)'\sin(\mathrm{Im}(u))\right)$$

**Remarques 8.**
- Les formules pour la somme/le produit/le quotient de fonctions dérivables s'appliquent encore.
- Si $f : I \to \mathbb{C}$ est dérivable alors, pour $x \in I$, $\mathrm{Re}(f'(x)) = \mathrm{Re}(f)'(x)$ et $\mathrm{Im}(f'(x)) = \mathrm{Im}(f)'(x)$.
- Si $f : I \to \mathbb{C}$ est une fonction dérivable, alors $f$ est constante sur l'intervalle $I$ ssi pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.

# 6 Transformations du plan complexe

**Proposition n° 11 : traduction géométrique du module et de l'argument**

Soient $A, B, M$ trois points distincts d'affixes $z_A$, $z_B$ et $z$, alors $|z_A - z_B| = AB$ et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})$. est un argument de $\dfrac{z - z_B}{z - z_A}$.

**Remarque 9.** Le segment $[AB]$ est l'ensemble des points $M$ d'affixe $z = z_A + \lambda(z_B - z_A)$ avec $\lambda \in [\,0\,;1\,]$.

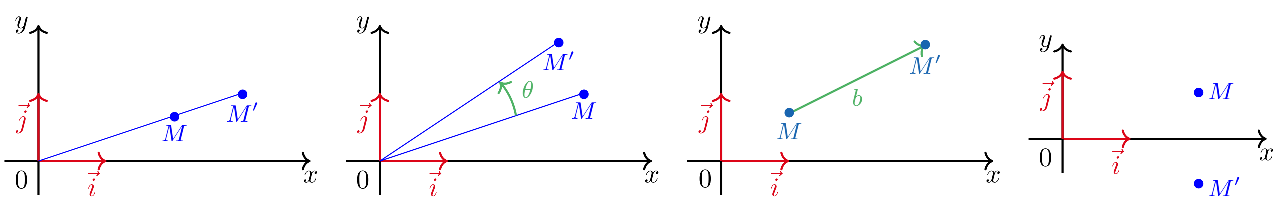
**Proposition n° 12 : traduction complexe de l'alignement et de l'orthogonalité**

1. Les points $A, B$ et $M$ sont alignés si et seulement si $\dfrac{z - z_B}{z - z_A} \in \mathbb{R}$.
2. Le triangle $ABM$ est rectangle en $M$ si et seulement si $\dfrac{z - z_B}{z - z_A}$ est un imaginaires pur.

**Exemple 12.** Soit $A = (1, -1)$, $B = (5, 2)$ et $C = (2, 6)$, le triangle $ABC$ est-il rectangle ?

**Proposition n° 13 : transformations du plan et opérations sur les complexes**

1. La fonction associant au point $M$ d'affixe $z$ le point $M'$ d'affixe $az$ avec $a \in \mathbb{R}$ est l'**homothétie** de centre $O$ de rapport $a$.
2. La fonction associant à $M$ d'affixe $z$ le point $M'$ d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} z$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ est la **rotation** de centre $O$ d'angle $\theta$.
3. La fonction associant à $M$ d'affixe $z$ le point $M'$ d'affixe $z + b$ avec $b \in \mathbb{C}$ est la **translation** du vecteur d'affixe $b$.
4. La fonction associant à $M$ d'affixe $z$ le point $M'$ d'affixe $\overline{z}$ est la **symétrie** par rapport à l'axe des abscisses.



(a) Homothétie (b) Rotation (c) Translation (d) Symétrie axiale

**Exemples 13.**
- La rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\pi$ coïncide avec l'homothétie de centre $\Omega$ de rapport $-1$.
- Déterminer l'expression de la rotation de centre $\Omega = (2, 1)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$.

# 7 Construction de l'ensemble des nombres complexes (hors programme)

**Attention à la lecture de ce paragraphe**

Il est possible que vous ne compreniez pas ce qui suit, ou que cette lecture vous donne des troubles métaphysiques.

Notons provisoirement, $\mathbb{R}'$ l'ensemble des nombres réels, $0'$ le nombre nul et $1'$ le nombre un. Et posons $\mathbb{C}$ l'ensemble des couples d'éléments de $\mathbb{R}'$ :

$$\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{R}' \text{ et } b \in \mathbb{R}'\}$$

Ainsi, $z \in \mathbb{C}$ veut dire qu'il existe $a \in \mathbb{R}'$ et $b \in \mathbb{R}'$ tel que $z = (a, b)$. Par unicité d'un couple, un tel $a$ et un tel $b$ sont uniques. On va définir deux opérations sur $\mathbb{C}$. Pour tout $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ et $z' = (a', b') \in \mathbb{C}$, on pose :

$$z + z' = (a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \quad \text{et} \quad z \times z' = (a, b) \times (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$$

Ainsi, $z + z' \in \mathbb{C}$ et $zz' \in \mathbb{C}$. Posons, $1 = (1', 0)$ et $\mathrm{i} = (0, 1')$, $0 = (0', 0')$ Alors, on vérifie que :

$$\begin{array}{rrcl}
 & z \times 1 = (a, b) \times 1 & = & (a, b) \times (1', 0') = (a \times 1' - b \times 0', a \times 0' + 1' \times b) = (a, b) = z \\
 & z + 0 = (a, b) + 0 & = & (a, b) + (0', 0') = (a + 0', b + 0') = (a, b) = z \\
 & (a, b) + (-a, -b) & = & (a + (-a), b + (-b)) = (0', 0') = 0 \quad \text{ainsi} \quad (-a, -b) = -(a, b) \\
\text{si } a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0 & (a, b) \times \left( \dfrac{a}{a^2 + b^2}, \dfrac{-b}{a^2 + b^2} \right) & = & (1', 0) = 1 \\
 & \mathrm{i}^2 = \mathrm{i} \times \mathrm{i} = (0', 1') \times (0', 1') & = & (0' \times 0' - 1' \times 1', 0' \times 1' + 1' \times 0') = (-1', 0) = -(1', 0') = -1
\end{array}$$

Autrement dit, dans $\mathbb{C}$, on a un nombre $0 \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z + 0 = z$, un nombre $1 \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \times 1 = z$ et un nombre $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{i}^2 = -1$. Tous les éléments ont un opposé. Les éléments non nuls ont bien un inverse. Les nombres, 1, 0 et i font donc ce qu'on attend d'eux. Notons

$$\mathbb{R} = \left\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}'\right\}$$

Notons que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}'$ sont en bijection par l'application $x \mapsto (x, 0)$, mais au moins $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
Soit $z = (a', b') \in \mathbb{C}$, on note $a = (a', 0) \in \mathbb{R}$ et $b = (b', 0) \in \mathbb{R}$, on a :

$$z = (a', b') = (a' + 0', 0' + b') = (a', 0') + (0', b') = (a', 0') + (b', 0') \times (0', 1') = a + b \times \mathrm{i} = a + \mathrm{i}b = a \times 1 + b \times \mathrm{i} = a + \mathrm{i}b$$

Finalement, dans $\mathbb{C}$ tout nombre complexe est de la forme $a + \mathrm{i}b$ avec $a$ et $b$ des réels et i tel que $\mathrm{i}^2 = -1$. Enfin, on décide, à partir de maintenant, que les nombres réels sont dans $\mathbb{R}$ et non dans $\mathbb{R}'$. Enfin, on «oublie» cette construction, c'est-à-dire qu'on n'utilise plus que les complexes ont été définies comme des couples de nombres. On considère ainsi les complexes comme des «vrais» nombres, en particulier, i existe bien, il n'a rien d'imaginaire...