Chapitre 3

Nombres complexes

Ce chapitre a pour but de présenter les nombres complexes et d'effectuer des calculs avec ces nombres. Nous verrons aussi comment résoudre certaines équations avec des nombres complexes.

Table des matières

1 Définition des nombres complexes et propriétés

Définition des nombres complexes

Si i vérifie $\mathrm{i}^2 = -1$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a + \mathrm{i}b$ est appelé **nombre complexe**. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Remarque 1. Cette définition part du principe qu'un tel nombre i existe ce qui est surprenant. En fait, cette définition est bien rigoureuse car on peut construire un tel nombre. Cette construction, hors programme, se trouve en fin de chapitre. Noter que les nombres réels sont des nombres complexes. En effet, si $x \in \mathbb{R}$, alors $x = x + 0\mathrm{i} \in \mathbb{C}$.

Proposition n° 1 : unicité de l'écriture algébrique

Soit $z \in \mathbb{C}$, alors il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a + \mathrm{i}b$.

Remarque 2. Soit $z = a + \mathrm{i}b$ avec a et b des réels. Si $b = 0$, alors $z = a \in \mathbb{R}$. Si $a = 0$, alors $z = \mathrm{i}b$, on dit dans ce cas que z est un imaginair pur.

Définition de la partie réelle, de la partie imaginaire et de l'écriture algébrique

Si $z = a + \mathrm{i}b$ avec a et b réels, on dit que a est la partie réelle de z et que b est la partie imaginaire de z. On note $\mathrm{Re}(z) = a$ et $\mathrm{Im}(z) = b$. L'écriture $z = a + \mathrm{i}b$ s'appelle l'écriture algébrique de z.

Définition des opérations sur les nombres complexes

Soient $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$ deux nombres complexes (avec a, a', b et b' des nombres réels). Alors on pose

$$z + z' = (a + \mathrm{i}b) + (a' + \mathrm{i}b') = a + a' + \mathrm{i}(b + b') \quad \text{et} \quad z \times z' = (a + \mathrm{i}b) \times (a' + \mathrm{i}b') = (aa' - bb') + \mathrm{i}(ab' + a'b)$$

Proposition n° 2 : propriétés algébriques des complexes

Soit $(z, z', \tilde{z}, \lambda) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{R}$

1. $z + 0 = z$ $\quad$ $z \times 1 = z$ $\quad$ 0 (resp. 1) est l'élément neutre de l'addition (resp. multiplication)
2. $z + z' = z' + z$ et $zz' = z'z$ $\quad$ commutativité de l'addition/multiplication
3. $(z + z') + \tilde{z} = z + (z' + \tilde{z})$ $\quad$ $(z \times z') \times \tilde{z} = z \times (z' \times \tilde{z})$ $\quad$ associativité de l'addition/multiplication
4. $z \times (z' + \tilde{z}) = zz' + z\tilde{z}$ $\quad$ distributivité de la multiplication
5. Si $z \in \mathbb{C}^*$, alors il existe un unique $z' \in \mathbb{C}$ tel que $zz' = 1$, on note $z' = \dfrac{1}{z}$ $\quad$ existence de l'inverse
6. Si $zz' = 0$ alors $z = 0$ ou $z' = 0$ $\quad$ intégrité de $\mathbb{C}$
7. $\mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$, $\mathrm{Re}(\lambda z) = \lambda \mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$, $\mathrm{Im}(\lambda z) = \lambda \mathrm{Im}(z)$ linéarité des parties réelles/imaginaires

Exemple 1. Écrire les nombres suivants sous forme algébrique : $(1 + 2\mathrm{i})(3 - 2\mathrm{i})$, $\dfrac{1}{1 + 2\mathrm{i}}$.

Attention : la partie réelle/imaginaire du produit n'est pas ce que vous croyez

En général, $\mathrm{Re}(zz') \neq \mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(zz') \neq \mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(z')$. Considérez $z = z' = \mathrm{i}$.

Péril imminent : on ne compare pas les complexes seulement les réels.

Il n'y a pas de $\leqslant$, $<$, $\geqslant$ ou $>$ définis sur $\mathbb{C}$ (et même s'il y en avait, vous écririez des choses fausses avec).

Définition de point d'affixe

On note $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé d'un plan. Soit $z \in \mathbb{C}$.

- On appelle **point d'affixe** de z le point $M(z)$ de coordonnées (a, b) avec $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$.
- On appelle **vecteur d'affixe** de z le vecteur $\overrightarrow{v(z)}$ de coordonnées (a, b).

Définition du conjugué

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On appelle **conjugué** de $z = a + ib$ le complexe $\bar{z} = a - ib$.

Proposition n° 3 : propriétés du conjugué

Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et $x \in \mathbb{R}$.

$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$, $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$, $\overline{xz} = x\overline{z}$ si $z' \neq 0$, alors $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$, $\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}}$ $\overline{\overline{z}} = z$

De plus, z est réel ssi $\overline{z} = z$, z est un imaginaire pur ssi $\overline{z} = -z$

Définition du module

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On appelle **module** de $z = a + ib$ le réel $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Remarque 3. Le module de z est la norme du vecteur $\overrightarrow{OM(z)}$.

Proposition n° 4 : propriétés du module

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$.

1. $|z| \geqslant 0$, $|z| = 0$ ssi $z = 0$, $|z|^2 = z \times \overline{z}$, $|zz'| = |z| \times |z'|$, $|z| = |\overline{z}|$
   si $z' \neq 0$ alors $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$, $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$, $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$
2. $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ première inégalité triangulaire
3. $|z + z'| = |z| + |z'|$ ssi il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que $z = \lambda z'$ ou $z' = \lambda z$ cas d'égalité de l'inégalité triangulaire
4. $||z| - |z'|| \leqslant |z - z'|$ deuxième inégalité triangulaire

Comment écrire les fractions sous forme algébrique ?

L'égalité $|z|^2 = z \times \bar{z}$ permet d'écrire les fractions sous forme algébrique en multipliant le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Exemple 2. Écrire sous forme algébrique les complexes $\frac{1}{1 + \mathrm{i}}$ et $\frac{2 + \mathrm{i}}{-3 + \mathrm{i}}$.

2 Nombres complexes de module 1

Définition du cercle unité

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$. C'est le cercle unité/trigonométrique.

Définition de l'exponentielle complexe

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on définit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$.

Proposition n° 5 : propriétés de l'exponentielle complexe

Soient $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$.

1. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \in \mathbb{U}$
2. Tout nombre complexe de module 1 est de la forme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$. Ainsi, $\mathbb{U} = \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.
3. $\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}) = \cos(\theta)$ et $\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}) = \sin(\theta)$
4. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\theta+\theta')} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'}$ (ce qui justifie la notation exponentielle)
5. $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}}$
6. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'} \iff \theta \equiv \theta'\ [2\pi]$
7. $\cos(\theta) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}}{2\mathrm{i}}$ (formules d'Euler)
8. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\theta}$ donc $(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$ (formule de Moivre)

Application à la trigonométrie

On peut simplifier beaucoup de calculs de trigonométrie en passant par les complexes grâce aux outils suivants :

- $\cos(x) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x})$ et $\sin(x) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x})$
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(x+x')} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x'}$
- La formule de Moivre
- Les formules d'Euler
- La factorisation par l'angle moitié : $1 \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$ se factorise par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x/2}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,y}$ se factorise par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{x+y}{2}}$.

Exemple 3. Linéariser $\sin(x)^3$ (linéariser veut dire écrire $\sin(x)^3$ comme somme de $A\cos(px)$ et $B\sin(qx)$).

Exemple 4. Calculer $\cos(p)+\cos(q)$, on pourrait de même calculer $\cos(p)-\cos(q)$, $\sin(p)\pm\sin(q)$. On peut aussi retrouver $\cos(p)\cos(q)$ etc.

3 Forme trigonométrique

Proposition n° 6 : existence de la forme trigonométrique d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$. De plus, $r = |z|$ et θ est unique modulo 2π.

Démonstration de la proposition n° 6 : Comme $z \neq 0$, $|z| \neq 0$, posons $u = \frac{z}{|z|}$, alors $|u| = \frac{|z|}{|z|} = 1$. Ainsi, $u \in \mathbb{U}$, d'après la proposition 5, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$, ainsi, $z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$. On a donc montré l'existence de décomposition de $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ avec $r = |z|$.

Soit $r' > 0$ et $\theta' \in \mathbb{R}$ tel $z = r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'}$, alors $|z| = |r'| \times |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'}| = r' = r$. Dès lors, $r' = r$. Donc $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$. Il en découle que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$. Dès lors, $\theta' \equiv \theta\ [2\pi]$ (d'après la proposition 5). ∎

Exemple 5. Écrire 1, i, -3, $-\mathrm{i}$, $5 - 5\sqrt{3}\mathrm{i}$ sous forme $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Définition de la forme trigonométrique et de l'argument

L'écriture $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ s'appelle la **forme trigonométrique** de z. De plus, $r = |z|$ est le module et on dit que θ est **un** argument de z. On note $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$.

Exemple 6. Calculer un argument de $1 + \mathrm{i}$.

Attention à ne pas confondre le et un

Il n'y a pas unicité de θ car c'est un angle on dit donc «un argument» et non «l'argument».

Remarque 4. L'argument est unique si on le prend dans $[\,0\,;2\pi\,[$: $\quad \forall z \in \mathbb{C}^* \quad \exists! \theta \in [\,0\,;2\pi\,[\quad z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$

Proposition n° 7 : propriétés des arguments

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

1. $z = z'$ ssi $(|z| = |z'|$ et $\arg(z) \equiv \arg(z')\ [2\pi])$
2. $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$, $\quad \arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$, $\quad \arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$
3. $z \in \mathbb{R}_+$ ssi 0 est un argument de z, $\quad z \in \mathbb{R}_-$ ssi π est un argument de z

Exemple 7. Calculer $(1 + \mathrm{i})^6$.

Remarque 5. Si A et ϕ sont fixés, alors $A\cos(t - \varphi)$ (A est l'amplitude et φ la phase) se décompose en $a\cos(t) + b\sin(t)$ avec $a = A\cos(\varphi)$ et $b = A\sin(\varphi)$. Peut-on inverser le processus ?

Exemple 8. Si $f : t \mapsto 3\sqrt{3}\cos(t) + 3\sin(t)$, retrouver l'amplitude et la phase.

Définition de l'exponentielle complexe

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $z = a + ib \in \mathbb{C}$, on appelle exponentielle complexe de z le complexe : $\exp(z) = \exp(a)\exp(ib)$.

Proposition n° 8 : propriétés de l'exponentielle complexe

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$

1. $|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}(z))$, $\quad \arg(\exp(z)) \equiv \mathrm{Im}(z)\ [2\pi]$, $\quad \overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$
2. $\exp(z + z') = \exp(z)\exp(z')$, $\quad \dfrac{1}{\exp(z)} = \exp(-z)$, $\quad \exp(z - z') = \dfrac{\exp(z)}{\exp(z')}$
3. $\exp(z) = \exp(z')$ ssi $z \equiv z'\ [\mathrm{i}2\pi]$ (ssi il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = z' + 2\mathrm{i}k\pi$).

4 Résolutions d'équations complexes

4.1 Résolution des équations de la forme $z^2 = Z$

Définition d'une racine carrée d'un complexe

Soit $Z \in \mathbb{C}$, on appelle racine carrée de Z tout nombre complexe z tel que $z^2 = Z$.

Proposition n° 9 : racines carrées d'un nombre complexe

Si $Z \in \mathbb{C}^*$, alors Z possède exactement deux racines carrées qui sont opposés.

Démonstration de la proposition n° 9 : Comme $Z \in \mathbb{C}^*$, il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $Z = re^{\mathrm{i}\,\theta}$. Posons $z = \sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}$, alors

$$z^2 = (\sqrt{r})^2 \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}\right)^2 \underset{\text{Moivre}}{=} r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} = Z$$

De plus, $(-z)^2 = (-1)^2 z^2 = Z$. Ainsi, z et $-z$ sont deux racines carrées de Z. En outre, comme $Z \neq 0$, $z \neq 0$, ainsi z et $-z$ sont deux racines carrées de Z distinctes et opposées. Soit $\tilde{z}$ une racine carrée de Z, alors $\tilde{z}^2 = Z = z^2$. En particulier, $0 = \tilde{z}^2 - z^2 = (\tilde{z} - z)(\tilde{+}z)$, ainsi $\tilde{z} - z = 0$ ou $\tilde{z} + z = 0$ soit $\tilde{z} = z$ ou $\tilde{z} = -z$. ■

Attention au symbole $\sqrt{\ }$

Le symbole $\sqrt{\ }$ ne s'utilise que pour des nombres réels positifs.

Exemple 9. Donner les racines carrées des nombres suivants :

0 $\quad 9,$ $\quad -1,$ $\quad -9,$ $\quad 2\mathrm{i},$ $\quad -3 + 4\mathrm{i}$

Comment calculer les racines carrées de nombres complexes ?

1. Si $Z \in \mathbb{R}_+$, alors les racines carrées sont $\sqrt{Z}$ et $-\sqrt{Z}$.
2. Si $Z \in \mathbb{R}_-$, alors les racines carrées sont $\mathrm{i}\sqrt{-Z}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{-Z}$.
3. Si $Z = re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et θ connu, alors les racines carrées sont $\pm\sqrt{r}\mathrm{e}^{\frac{i\theta}{2}}$
4. Si $Z = A + \mathrm{i}B$, on pose $w = a + ib \in \mathbb{C}$, alors :

$$w^2 = Z \iff \left\{\begin{array}{lcl} |w^2| & = & |Z| \\ a^2 - b^2 + \mathrm{i}2ab & = & A + \mathrm{i}B \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} |w|^2 & = & |Z| \\ a^2 - b^2 & = & A \\ 2ab & = & B \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a^2 + b^2 & = & \sqrt{A^2 + B^2} \\ a^2 - b^2 & = & A \\ 2ab & = & B \end{array}\right.$$

Les deux premières équations permettent de trouver la valeur de a^2 et de b^2, on trouve alors deux valeurs pour a et deux valeurs pour b, seulement l'équation $2ab = B$ indique si a et b ont ou non le même signe.

4.2 Résolution des équations de la forme $az^2 + bz + c = 0$

Proposition n° 10 : résolution des équations du second degré

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ avec $a \neq 0$ et l'équation $az^2 + bz + c = 0$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant et δ une racine carrée de Δ, alors :

- Si $\Delta \neq 0$ alors l'équation admet deux solutions distinctes : $\dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $\dfrac{-b+\delta}{2a}$
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une solution double : $-\dfrac{b}{2a}$

Exemple 10. Résoudre l'équation $z^2 - (1 + 4\mathrm{i})z + 3\mathrm{i} - 3 = 0$.

Remarque 6. En notant z_1 et z_2 les deux racines (éventuellement égales), $z_1 + z_2 = \dfrac{-b}{a}$ et $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$.

4.3 Résolution des équations de la forme $z^n = 1$

Définition des racines n-ièmes de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle racine n-ième de l'unité (ou de 1) tout nombre complexe z tel que $z^n = 1$.
L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est noté $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$

Proposition n° 11 : expression des racines n-ièmes de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $z^n = 1$ admet exactement n solutions qui sont $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{2\pi k}{n}}$ pour $k \in [\![\, 0\,;n-1\,]\!]$.
Ainsi, $\mathbb{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{2k\pi}{n}} \mid k \in [\![\, 0\,;n-1\,]\!] \right\}$.

Démonstration de la proposition n° 11 :

- Soit $k \in [\![\, 0\,;n-1\,]\!]$. Posons $z = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{2\pi k}{n}}$, alors, d'après la formule de Moivre, $z^n = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,2k\pi} = 1$.
- Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = 1$, alors $z \neq 0$ et il existe un unique $\theta \in [\,0\,;2\pi\,[$ tel que $z = |z|\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}$, alors $1 = z^z = |z|^n \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,n\theta} = 1\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,0}$, ainsi nécessairement $|z|^n = 1$ et $n\theta \equiv 0\ [2\pi]$. Ainsi, $|z| = 1$ et il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n\theta = 0 + 2k\pi$. En particulier, $\theta = \dfrac{2k\pi}{n} \in [\,0\,;\pi\,[$. Par conséquent, $k \in [\![\, 0\,;n-1\,]\!]$ et $z = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{2k\pi}{n}}$.
- Notons que $0 = \dfrac{0\pi}{n} < \dfrac{2\pi}{n} < \dfrac{4\pi}{n} < \ldots < \dfrac{2\pi(n-1)}{n} < 2\pi$. Ainsi, nous avons n nombres complexes dont les arguments sont tous dans $[\,0\,;2\pi\,[$, par unicité de l'argument dans cet intervalle, on peut en conclure que les n racines n-ièmes sont deux à deux distinctes.

Exemple 11. Donner les racines troisièmes/quatrièmes/cinquièmes de l'unité et les représenter sur le plan complexe.

Remarque 7. Les racines n-ièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier dont l'un des sommets est 1.

4.4 Résolution des équations de la forme $z^n = Z$

Définition des racines n-ièmes d'un complexe

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $Z \in \mathbb{C}^*$, on appelle racine n-ième de Z tout nombre complexe z tel que $z^n = Z$.

Proposition n° 12 : expression des racines n-ièmes d'un nombre complexe

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $Z = \rho\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
L'équation $z^n = Z$ admet exactement n solutions qui sont $\sqrt[n]{\rho}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{\theta}{n}}\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{2\pi k}{n}}$ pour $k \in [\![\, 0\,;n-1\,]\!]$.

Exemple 12. Donner les racines quatrièmes de $2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$.

Remarque 8. Comme on sait résoudre les équations du type $az^2 + bz + c = 0$ et celles du types $z^n = Z$. On peut se poser la question suivante : est-il possible de résoudre des équations de degré supérieurs comme $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ ou $az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e = 0$? La réponse est oui mais avec des formules plus compliquées que pour celles de degré 2 (ces formules utiliseront des racines cubiques et quatrièmes de nombres complexes formés à partir de a, b, c, d et e). Par contre, on peut démontrer (mais c'est très difficile) qu'il est impossible de trouver de telles formules pour des équations de degré 5 ou plus.

5 Transformations du plan complexe

Proposition n° 13 : traduction complexe du module et de l'argument

Soient a, b deux complexes et $z \neq a, b$. Si A, B, M sont les points d'affixes a, b et z alors : $|a - b| = AB$ et un argument de $\dfrac{z-b}{z-a}$ est $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})$.

Remarque 9. Le segment $[AB]$ est l'ensemble des points M d'affixe $z = z_A + \lambda(z_B - z_A)$ avec $\lambda \in [\,0\,;1\,]$.

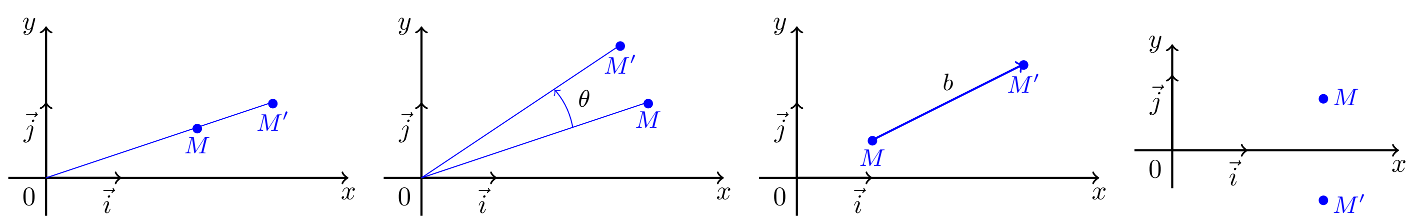
Proposition n° 14 : traduction complexe de l'alignement et de l'orthogonalité

1. Les points A, B et M sont alignés si, et seulement si, $\dfrac{z-b}{z-a} \in \mathbb{R}$.
2. Le triangle ABM est rectangle en M si, et seulement si, $\dfrac{z-b}{z-a} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ (ensemble des imaginaires pures).

Exemple 13. Soit $A = (1, -1)$, $B = (5, 2)$ et $C = (2, 6)$, le triangle ABC est-il rectangle ?

Proposition n° 15 : Transformations du plan

1. La transformation plane h_a associant au point M d'affixe z le point M' d'affixe z' où $z' = az$ $(a \in \mathbb{R})$ est l'**homothétie** de centre O et de rapport a.
2. La transformation plane r_θ associant à M d'affixe z le point M' d'affixe z' où $z' = e^{i\theta} z$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ est la **rotation** de centre O et d'angle θ.
3. Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan d'affixe $b \in \mathbb{C}$. La transformation plane $t_b\ : z \mapsto z + b$ associant à M d'affixe z le point M' d'affixe z' tel que $z' = z + b$ est la **translation** de vecteur $\vec{u}$.
4. La transformation plane associant à M d'affixe z le point M' d'affixe z' tel que $z' = \overline{z}$ correspond à la **symétrie** par rapport à l'axe des abscisses.



(a) Homothétie (b) Rotation (c) Translation (d) Symétrie axiale

Remarque 10. La rotation de centre Ω et d'angle π coïncide avec l'homothétie de centre Ω de rapport -1.

Exemple 14. Déterminer l'expression complexe de la rotation de centre $\Omega = (2, 0)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

6 Construction de l'ensemble des nombres complexes (hors programme)

Attention à la lecture de ce paragraphe

Il est possible que vous ne compreniez pas ce qui suit, ou que cette lecture vous donne des troubles métaphysiques.

Notons provisoirement, $\mathbb{R}'$ l'ensemble des nombres réels, $0'$ le nombre nul et $1'$ le nombre un. Et posons $\mathbb{C}$ l'ensemble des couples d'éléments de $\mathbb{R}'$:

$$\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{R}' \text{ et } b \in \mathbb{R}'\}$$

On va définir deux opérations sur $\mathbb{C}$. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}$ et $(a', b') \in \mathbb{C}$, on pose :

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \quad \text{et} \quad (a, b) \times (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$$

Ainsi, $(a, b) + (a', b') \in \mathbb{C}$ et $(a, b) \times (a', b') \in \mathbb{C}$. Posons, $1 = (1', 0)$ et $\mathrm{i} = (0, 1')$, $0 = (0', 0')$ Alors, on vérifie que :

$$\begin{array}{rrcl}
 & (a, b) \times 1 & = & (a, b) \times (1', 0') = (a \times 1' - b \times 0', a \times 0' + 1' \times b) = (a, b) \\
 & (a, b) + 0 & = & (a, b) + (0', 0') = (a + 0', b + 0') = (a, b) \\
 & (a, b) + (-a, -b) & = & (a + (-a), b + (-b)) = (0', 0') = 0 \quad \text{ainsi} \quad (-a, -b) = -(a, b) \\
\text{si } a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0 & (a, b) \times \left(\dfrac{a}{a^2 + b^2}, \dfrac{-b}{a^2 + b^2} \right) & = & (1', 0) = 1 \\
 & \mathrm{i}^2 = \mathrm{i} \times \mathrm{i} = (0', 1') \times (0', 1') & = & (0' \times 0' - 1' \times 1', 0' \times 1' + 1' \times 0') = (-1', 0) = -(1', 0') = -1
\end{array}$$

Autrement dit, dans $\mathbb{C}$, on a un nombre $0 \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z + 0 = z$, un nombre $1 \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \times 1 = z$ et un nombre $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{i}^2 = -1$. Tous les éléments ont un opposé. Les éléments non nuls ont bien un inverse. Les nombres, 1, 0 et i font donc ce qu'on attend d'eux. Notons

$$\mathbb{R} = \left\{ (x, 0) \mid x \in \mathbb{R}' \right\}$$

Notons que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}'$ sont en bijection par l'application $x \mapsto (x, 0)$, mais au moins $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
Soit $(a', b') \in \mathbb{C}$, on note $a = (a', 0) \in \mathbb{R}$ et $b = (b', 0) \in \mathbb{R}$, on a :

$$(a', b') = (a' + 0', 0' + b') = (a', 0') + (0', b') = (a', 0') + (b', 0') \times (0', 1') = a + b \times \mathrm{i} = a + \mathrm{i}b = a \times 1 + b \times \mathrm{i} = a + \mathrm{i}b$$

Finalement, dans $\mathbb{C}$ tout nombre complexe est de la forme $a + \mathrm{i}b$ avec a et b des réels et i tel que $\mathrm{i} = -1$. Enfin, on décide, à partir de maintenant que les nombres réels sont dans $\mathbb{R}$ et non dans $\mathbb{R}'$.