Correction de l'exercice 1.

Correction de l'exercice 2.

Correction de l'exercice 3. 1. (a) En multipliant par le conjugué du dénominateur, on obtient :

$$f(z) = \frac{(1+\mathrm{i}z)(\overline{1-\mathrm{i}z})}{|1-\mathrm{i}z|^2} = \frac{(1+\mathrm{i}z)(\bar{1}-\bar{\mathrm{i}}\bar{z})}{|1-\mathrm{i}z|^2} = \frac{(1+\mathrm{i}z)(1+\mathrm{i}\bar{z})}{|1-\mathrm{i}z|^2} = \frac{(1-z\bar{z})+\mathrm{i}(z+\bar{z})}{|1-\mathrm{i}z|^2} = \frac{1-|z|^2}{|1-\mathrm{i}z|^2} + \mathrm{i}\frac{2\mathrm{Re}(z)}{|1-\mathrm{i}z|^2}$$

Ainsi, $f(z) \in \mathbb{R}$ ssi $\mathrm{Im}(f(z)) = 0$ ssi $\mathrm{Re}(z) = 0$ ssi $z \in \mathrm{i}\mathbb{R}\backslash\{\mathrm{i}\}$.

(b) En reprenant le calcul de $f(z)$ de la question précédente, $f(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ ssi $\mathrm{Re}(f(z)) = 0$ ssi $|z|^2 = 1$ ssi $z \in \mathbb{U}\backslash\{\mathrm{i}\}$.

(c) $|f(z)| = 1$ ssi $|1+\mathrm{i}z|^2 = |1-\mathrm{i}z|^2$ ssi $(1+\mathrm{i}z)(1-\mathrm{i}\bar{z}) = (1-\mathrm{i}z)(1+\mathrm{i}\bar{z})$ ssi $1+\mathrm{i}(z-\bar{z})+|z|^2 = 1+\mathrm{i}(-z+\bar{z})+|z|^2$ ssi $2\mathrm{i}(z-\bar{z}) = 0$ ssi $2\mathrm{i}(2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z)) = 0$ ssi $\mathrm{Im}(z) = 0$ ssi $z \in \mathbb{R}$.

2. Le premier cas correspond à l'axe des ordonnées privé de i. Le second cas correspond au cercle trigonométrique privé de i. Le dernier cas correspond à l'axe des abscisses.

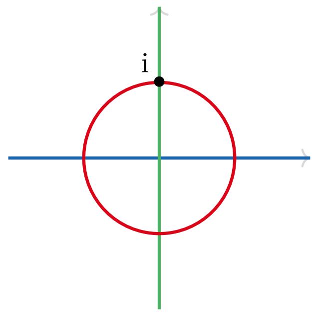


Figure 1 – En vert le premier cas, en rouge le second et en bleu le dernier. Le point i est exclu des ensembles considérés.

Correction de l'exercice 4.

Correction de l'exercice 5.

Correction de l'exercice 6. 1.

2. $|1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$, ainsi

$$1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4)\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi/4}$$

Ainsi, en utilisant la formule de Moivre, $z = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi/4}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi n}{4}}$ Ainsi, $|z| = 2^{n/2}$ et $\arg(z) \equiv \frac{\pi n}{4}\ [2\pi]$.

3. On commence par factoriser par l'angle moitié

$$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}\right) = 2\sin(\theta/2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}(-\mathrm{i}) = 2\sin(\theta/2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}$$

Alors $|z| = |2\sin(\theta/2)|$. Il faut distinguer les cas suivant le signe du sinus :
- Si $\sin(\theta/2) \geqslant 0$, alors $|z| = 2\sin(\theta/2)$ et alors $z = |z_2|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\theta/2-\pi/2)}$ et ainsi $\arg(z) \equiv (\theta-\pi)/2\ [2\pi]$.
- Si $\sin(\theta/2) < 0$, alors $|z| = -2\sin(\theta/2)$ et alors

$$z = |z|(-1)\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\theta/2-\pi/2)} = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\theta/2-\pi/2)}|z|\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\theta/2-\pi/2+\pi)}$$

et ainsi $\arg(z) = (\theta+\pi)/2\ [2\pi]$.

4. Tout d'abord, il est nécessaire que $\theta \in \mathbb{R}\backslash\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. De plus,

$$|z| = \sqrt{1^2 + \tan^2(\theta)} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2(\theta)}} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2(\theta)}} = \frac{1}{|\cos(\theta)|}$$

   Ainsi, il faut distinguer les cas suivant le signe de $\cos(\theta)$:
   - Si $\cos(\theta) > 0$, $|z| = \dfrac{1}{\cos(\theta)}$, ainsi on factorise par $|z|$ dans z :

$$z = \frac{1}{\cos(\theta)}\left(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\right) = \frac{1}{\cos(\theta)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$$

     Ainsi, dans ce cas $|z| = 1/\cos(\theta)$ et $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$.
   - Si $\cos(\theta) < 0$, $|z| = \dfrac{-1}{\cos(\theta)}$, ainsi on factorise par $|z|$ dans z :

$$z = \frac{-1}{\cos(\theta)}\left(-\cos(\theta) - \mathrm{i}\sin(\theta)\right) = \frac{-1}{\cos(\theta)}\left(\cos(\theta+\pi) + \mathrm{i}\sin(\theta+\pi)\right) = \frac{-1}{\cos(\theta)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta+\pi}$$

     Ainsi, dans ce cas $|z| = -1/\cos(\theta)$ et $\arg(z) \equiv \theta + \pi\ [2\pi]$.
5. Remarquons que le dénominateur s'annule ssi $\theta \equiv 0\ [2\pi]$. On considère donc $\theta \in \mathbb{R}\backslash\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. En factorisant encore par l'angle moitié

$$z = \frac{1+\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta)}{1-(\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta))} = \frac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta/2}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta 2} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta/2}\right)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta/2}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta 2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta/2}\right)} = \frac{2\cos(\theta/2)}{-2\mathrm{i}\sin(\theta/2)} = \frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\mathrm{i} = \frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi/2}$$

   Ce qui nous force, encore une fois, à distinguer les cas :
   - Si $\dfrac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} > 0$, alors $|z| = \dfrac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$ et $\arg(z) \equiv \pi/2\ [2\pi]$.
   - Si $\dfrac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} < 0$, alors $|z| = -\dfrac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$ et $z = |z| \times (-1) \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi/2} = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi/2} = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,3\pi/2}$, ainsi $\arg(z) \equiv 3\pi/2\ [2\pi]$.
6.

Correction de l'exercice 7. Posons $z = 1 + \mathrm{i}\alpha \neq 0$, ainsi $|z| \neq 0$, notons θ un argument de z compris entre $-\pi$ et π. Alors :

$$z = |z|\left(\frac{1}{|z|} + \mathrm{i}\frac{\alpha}{|z|}\right) = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} = |z|\left(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\right)$$

Alors $\cos(\theta) = 1/|z| > 0$, ainsi $\theta \in\ ]-\pi/2\,;\pi/2\,[$. De plus, $\sin(\theta) = \alpha/|z|$. En effectuant le quotient, on obtient $\tan(\theta) = \alpha$. Ainsi, $\arctan(\tan(\theta)) = \arctan(\alpha)$. Cependant, comme $\theta \in\ ]-\pi/2\,;\pi/2\,[$, on obtient $\theta = \arctan(\alpha)$.

Correction de l'exercice 8. Calculons $|a-b|^2$:

$$\begin{aligned} |a-b|^2 &= (a-b)(\overline{a-b}) = (a-b)(\overline{a}-\overline{b}) = a\overline{a} - a\overline{b} + b\overline{a} + b\overline{b} \\ &= |a|^2 - (a\overline{b} + \overline{a\overline{b}}) + |b|^2 = |a|^2 - 2\mathrm{Re}(a\overline{b}) + |b|^2 \end{aligned}$$

De même, calculons $|a+b|^2$:

$$\begin{aligned} |a+b|^2 &= (a+b)(\overline{a+b}) = (a+b)(\overline{a}+\overline{b}) = a\overline{a} + a\overline{b} + b\overline{a} + b\overline{b} \\ &= |a|^2 + (a\overline{b} + \overline{a\overline{b}}) + |b|^2 = |a|^2 + 2\mathrm{Re}(a\overline{b}) + |b|^2 \end{aligned}$$

En sommant ces deux résultats, on obtient $|a-b|^2 + |a+b|^2 = 2|a|^2 + 2|b|^2$, en divisant par deux, on trouve le résultat demandé.

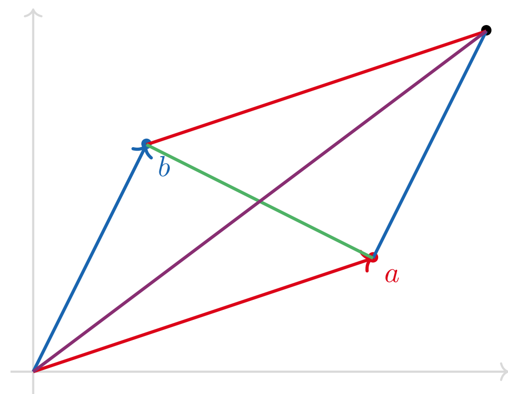


FIGURE 2 – Interprétation graphique de la formule de l'exercice 8, $|a|$ est la longueur d'un côté d'un parallélogramme, $|b|$ est la longueur d'un côté adjacent. Ainsi, $2|a|^2 + 2|b|^2$ est la somme des carrées des quatre côtés du parallélogramme, $|a+b|$ est la longueur de la plus grande diagonale en violet, $|a-b|$ est la longueur de la plus petite diagonale en vert.

Correction de l'exercice 9. 1. Posons l'hypothèse de récurrence, $\mathscr{P}(n)$: «Pour tout $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |z_k|$».

- Pour $n = 2$, soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, alors, on sait d'après l'inégalité triangulaire que $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$. Ainsi, $\mathscr{P}(2)$ est vraie.
- Soit un entier $n \geqslant 2$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Soit $(z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$. Alors :

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| = \left|\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) + z_{n+1}\right| \underset{\mathscr{P}(2)}{\leqslant} \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| + |z_{n+1}| \underset{\mathscr{P}(n)}{\leqslant} \sum_{k=1}^{n} |z_k| + |z_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$$

  Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- Par récurrence, ceci montre que pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |z_k|$.

2. Soit $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$.
- Supposons que $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum\limits_{k=1}^{n} |z_k|$. Distinguons deux cas :
  — Si pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $z_i = 0$, alors il est vrai de dire que pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $z_i = \lambda_i z_1$ avec $\lambda_i = 0 \geqslant 0$.
  — S'il existe $i \in [\![1 ; n]\!]$ tel que $z_i \neq 0$. Soit $j \in [\![1 ; n]\!]$, supposons qu'il n'existe pas de $\lambda_j \geqslant 0$ tel que $z_j = \lambda_j z_i$. Alors, d'après le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire, $|z_i + z_j| < |z_i| + |z_j|$. Ainsi,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \left|z_i + z_j + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i\\k\neq j}}^{n} z_k\right| \leqslant |z_i + z_j| + \left|\sum_{\substack{k=1\\k\neq i\\k\neq j}}^{n} z_k\right| \leqslant |z_i + z_j| + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i\\k\neq j}}^{n} |z_k| < |z_i| + |z_j| + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i\\k\neq j}}^{n} |z_k| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

  Ainsi, il n'y a pas égalité ce qui est absurde. On peut en conclure qu'il existe $\lambda_j \geqslant 0$, tel que $z_j = \lambda_j z_i$, et ce pour tout $j \in [\![1 ; n]\!]$.
- Réciproquement, s'il existe $i \in [\![1 ; n]\!]$ tel que pour tout $j \in [\![1 ; n]\!]$, il existe $\lambda_j \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_j = \lambda_i z_i$, alors :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_i\right| = \left|\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) z_i\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right| \times |z_i| \underset{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \geqslant 0}{=} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) |z_i| \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |z_i| \underset{\lambda_k \geqslant 0}{=} \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k z_i| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|\end{aligned}$$

3. Le cas d'égalité est possible que si tous les z_k sont alignés sur une même demi-droite partant de 0 (la demi-droite dirigée par z_i si $z_i \neq 0$, si $z_i = 0$ tous les points sont nuls).

Correction de l'exercice 10. On remarque que $|z_1|^2 = a^2 + b^2 = n_1$ et $|z_2|^2 = c^2 + d^2 = n_2$. Considérons alors $z_3 = z_1 z_2 = ac - bd + \mathrm{i}(ad + bc)$. Alors $|z_3|^2 = |z_1 z_2|^2 = |z_1|^2|z_2|^2 = n_1 n_2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$. Comme $ad + bc \in \mathbb{N}$ (somme et produits d'entiers naturels). En outre $ac - bd \in \mathbb{Z}$ (la différence d'entiers naturels peut être négatif). Cependant, comme la fonction carrée est paire, $n_1 n_2 = (|ac - bd|)^2 + (ad + bc)^2$ est bien une somme de deux carrées.

Correction de l'exercice 11. Procédons par analyse-synthèse :

- **Analyse :** soit $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$ et pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $f(z + z') = f(z) + f(z')$ et $f(zz') = f(z)f(z')$. Soit $z = a + \mathrm{i}b$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Le but est de calculer explicitement, $f(z)$:
$$f(z) = f(a + \mathrm{i}b) = f(a) + f(\mathrm{i}b) = f(a) + f(\mathrm{i})f(b) = a + f(\mathrm{i})b$$
Cependant, on ne connaît pas $f(\mathrm{i})$. Comme $\mathrm{i} \times \mathrm{i} = -1$, on $f(-1) = f(\mathrm{i} \times \mathrm{i}) = f(\mathrm{i}) \times f(\mathrm{i}) = f(\mathrm{i})^2$. Ainsi, $f(\mathrm{i})^2 = -1$. Ainsi, $f(\mathrm{i})$ est une racine carrée de -1, or il y a deux racines carrées de -1 : i et $-\mathrm{i}$. Ainsi, nécessairement, $f(\mathrm{i}) = \mathrm{i}$ ou $f(\mathrm{i}) = -\mathrm{i}$. Dans le premier cas, $f(z) = a + \mathrm{i}b = z$, ainsi $f\colon z \mapsto z$. Dans le second cas, $f(z) = a - \mathrm{i}b = \overline{z}$, ainsi, $f\colon z \mapsto \overline{z}$.
- **Synthèse :** posons les fonctions suivantes :
$$f\colon \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto z \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g\colon \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \overline{z} \end{cases}$$
Et vérifions qu'elles conviennent. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$, pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $f(z + z') = z + z' = f(z) + f(z')$ et $f(zz') = zz' = f(z)f(z')$. Pour tout $x \in R$, $g(x) = \overline{x} = x$, pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $g(z + z') = \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} = g(z) + g(z')$ et $g(zz') = \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'} = g(z)g(z')$ (d'après les propriétés du cours sur le conjugué d'un complexe). Ainsi, les fonctions f et g ainsi posées vérifient bien les conditions demandées.

La synthèse montre que les fonctions $z \mapsto z$ et $z \mapsto \overline{z}$ vérifient bien les propriétés recherchées. L'analyse montre que ce sont les seules fonctions.

Correction de l'exercice 12. Soit $t \in \mathbb{R}$,
$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} - 1| = \sqrt{(\cos(t) - 1)^2 + \sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t) - 2\cos(t) + 1 + \sin^2(t)} = \sqrt{2(1 - \cos(t))}$$
Or $\sin^2(t) = \dfrac{1 - \cos(2t)}{2}$. Ainsi, $1 - \cos(t) = 2\sin^2(t/2)$. Dès lors, $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} - 1| = \sqrt{4(\sin^2(t/2)} = 2|\sin(t/2)|$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leqslant |x|$. Ainsi, $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} - 1| \leqslant 2|t/2| = |t|$. On peut donner une interprétation graphique de cette inégalité (voir figure 3).

Correction de l'exercice 13.

Correction de l'exercice 14.

Correction de l'exercice 15.

Correction de l'exercice 16.

Correction de l'exercice 17. 1. Les racines cubiques de 1 sont $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi \times 0}{3}} = 1$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi \times 1}{3}} = j$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi \times 2}{3}} = j^2$.

2. $\overline{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,-\frac{2\pi}{3}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,-\frac{2\pi}{3}+2\pi} = j^2$, $1 \times j \times j^2 = j^3 = 1$, $1 + j + j^2 = \dfrac{1 - j^3}{1 - j} = \dfrac{1 - 1}{1 - j} = 0$ (somme des termes d'une suite géométrique de raison $j \neq 1$). $j(j + 1) = j^2 + j = -1$.

Correction de l'exercice 18.

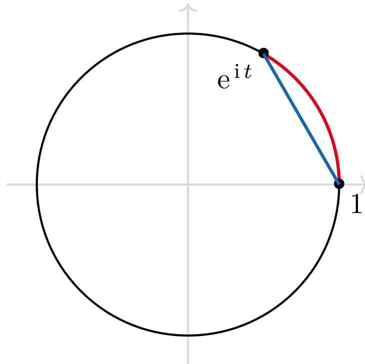


FIGURE 3 – $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}-1|$ représente la longueur du segment d'extrémités 1 et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}$. Ce segment est en bleu bleu, $|t|$ représente la valeur absolue de l'angle de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}$ donc la longueur de l'arc, cet arc est en rouge. Comme la ligne droite est le plus court chemin qui relie deux points, $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}-1| \leqslant |t|$

Correction de l'exercice 19.

Correction de l'exercice 20.

Correction de l'exercice 21.

1. Comme $-\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{3\pi}{2}}$, les racines n-ièmes de $-\mathrm{i}$ sont exactement $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{3\pi}{2n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2k\pi}{n}}$ pour $k \in [\![\, 0\,;n-1\,]\!]$.
   Comme $|1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$, $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right) = 2^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}$. Ainsi, les racines n-ièmes de $1+\mathrm{i}$ sont exactement $2^{\frac{1}{2n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2k\pi}{n}}$ pour $k \in [\![\, 0\,;n-1\,]\!]$.
2. L'équation $z^2-z+1-\mathrm{i}=0$ a pour discriminant $\Delta = (-1)^2-4(1-\mathrm{i}) = -3+4\mathrm{i}$. Posons $\delta = a+\mathrm{i}b$, alors :
$$\delta^2=\Delta \iff \begin{cases} a^2-b^2=-3 \\ 2ab=4 \\ |\delta|^2=|\Delta| \end{cases} \iff \begin{cases} a^2+b^2=\sqrt{3^2+4^2}=5 \\ a^2-b^2=-3 \\ ab=2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a^2 &= 2 \\ a^2-b^2 &= -3 \\ ab=2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a^2 &= 1 \\ b^2 &= 4 \\ ab &= 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= \pm 1 \\ b &= \pm 2 \\ ab &= 2 \end{cases}$$
   La dernière ligne indique, en particulier, que a et b sont de même signe. Ainsi, prenons $\delta = 1+2\mathrm{i}$. Par conséquent, les solutions de l'équation sont $\frac{1-(1+2\mathrm{i})}{2} = -\mathrm{i}$ et $\frac{1+(1+2\mathrm{i})}{2} = 1+\mathrm{i}$.
3. Soit $\omega \in \mathbb{C}$, alors ω est solution de $z^{2n}-z^n+1-\mathrm{i}=0$ ssi ω^n est solution de $z^2-z+1-\mathrm{i}=0$ ssi $\omega^n=-\mathrm{i}$ ou $\omega^n = 1+\mathrm{i}$ ssi il existe $k \in [\![\, 0\,;n-1\,]\!]$ tel que $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{3\pi}{2n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2k\pi}{n}}$ ou $2^{\frac{1}{2n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2k\pi}{n}}$. Ainsi, l'ensemble des solutions de cette équation est :
$$\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{3\pi}{2n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2k\pi}{n}} \mid k \in [\![\, 0\,;n-1\,]\!]\right\} \bigcup \left\{ \sqrt[2n]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2k\pi}{n}} \mid k \in [\![\, 0\,;n-1\,]\!]\right\}$$

Correction de l'exercice 22.

1.
2.
3.
4.
5.
6.

7. Remarquons que $z=1$ n'est pas solution, car $2^n-0^n\neq 0$. Fixons $z\in\mathbb{C}\backslash\{1\}$ (en particulier $z-1\neq 0$) Alors :

$$\begin{aligned}
(z+1)^n-(z-1)^n=0 &\iff \frac{(z+1)^n}{(z-1)^n}-1=0\\
&\iff \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n=1\\
&\iff \exists k\in[\![\,0\,;n-1\,]\!]\quad \frac{z+1}{z-1}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2k\pi}{n}}\\
&\iff \exists k\in[\![\,0\,;n-1\,]\!]\quad z+1=(z-1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2k\pi}{n}}\\
&\iff \exists k\in[\![\,0\,;n-1\,]\!]\quad z(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2k\pi}{n}})=-1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2k\pi}{n}}
\end{aligned}$$

On remarque que $k=0$ est impossible et que si $k\in[\![\,1\,;n-1\,]\!]$, $1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2k\pi}{n}}\neq 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
(z+1)^n-(z-1)^n=0 &\iff \exists k\in[\![\,1\,;n-1\,]\!]\quad z=-\frac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2k\pi}{n}}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2k\pi}{n}}}\\
&\iff \exists k\in[\![\,1\,;n-1\,]\!]\quad z=-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{k\pi}{n}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{k\pi}{n}}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{k\pi}{n}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{k\pi}{n}}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{k\pi}{n}}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{k\pi}{n}}}\\
&\iff \exists k\in[\![\,1\,;n-1\,]\!]\quad z=\frac{2\cos\left(\frac{k}{n}\pi\right)}{2\mathrm{i}\sin\left(\frac{k}{n}\pi\right)}
\end{aligned}$$

Ainsi, les solutions sont $\dfrac{-\mathrm{i}\cos\left(\frac{k}{n}\pi\right)}{\sin\left(\frac{k}{n}\pi\right)}$ pour $k\in[\![\,1\,;n-1\,]\!]$.

Correction de l'exercice 23.

Correction de l'exercice 24. 1. D'après la formule de Moivre, $w^5=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{10\pi}{5}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi}=1$ (au cas où vous n'auriez pas remarqué, w est une racine 5-ième de l'unité. $a=w+w^4=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{5}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{8\pi}{5}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{5}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{5}}=2\cos(2\pi/5)$. De même $b=w^2+w^3=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{4\pi}{5}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{6\pi}{5}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{4\pi}{5}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{4\pi}{5}}=\cos(4\pi/5)$.

2. En reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique de raison $w\neq 1$, $a+b=1+w+w^2+w^3+w^4-1=\dfrac{1-w^5}{1-w}-1=-1$. De plus, $ab=(w+w^4)(w^2+w^3)=w^3+w^4+w^6+w^7=w^3+w^4+w^1+w^2=-1$. Ainsi, a et b sont racines du polynôme $(X-a)(X-b)=X^2-(a+b)X+ab=X^2+X-1$. Or les racines de ce polynôme sont $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Comme $2\pi/5\in\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\cos(2\pi/5)>0$ et donc $a>0$. Ainsi, comme $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}<0$, nécessairement $a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $b=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

3. Dès lors, $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$. De plus, $\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)\geqslant 0$. Ainsi,

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\sqrt{1-\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)^2}=\sqrt{1-\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{16}\right)}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$$

Correction de l'exercice 25.

Correction de l'exercice 26. z et z' sont solutions de ce système ssi z et z' sont racines de

$$P=(X-z)(X-z')=X^2-(z+z')X+zz'=X^2-(5+2\mathrm{i})X+5+5\mathrm{i}$$

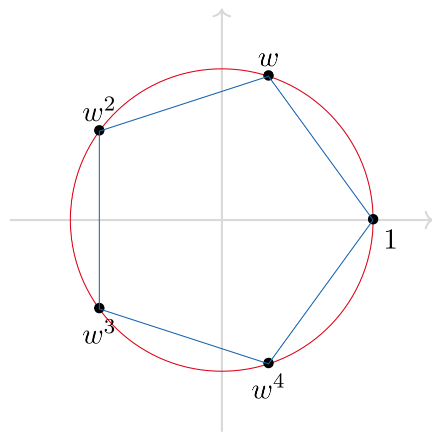


FIGURE 4 – Le pentagone régulier formé par les cinq racines de l'unité.

Cherchons donc les racines de $P = X^2 - (5+2\mathrm{i})X + 5 + 5\mathrm{i}$. Le discriminant vaut

$$\Delta = (-(5+2\mathrm{i})^2) - 4(5+5\mathrm{i}) = 25 + 20\mathrm{i} - 4 - 20 - 20\mathrm{i} = 1 = (1)^2$$

Ainsi les solutions sont $\dfrac{5+2\mathrm{i}-1}{2}$ et $\dfrac{5+2\mathrm{i}+1}{2}$ ainsi soit $z = 2+\mathrm{i}$ et $z' = 3+\mathrm{i}$ soit $z = 3+\mathrm{i}$ et $z' = 2+\mathrm{i}$.

Correction de l'exercice 27.

Correction de l'exercice 28.

Correction de l'exercice 29.

1. $|z+\mathrm{i}| = |z-\mathrm{i}|$ ssi z est à équidistance de $-\mathrm{i}$ et de i ssi z est sur la médiatrice du segment d'extrémité $-\mathrm{i}$ et i ssi $z \in \mathbb{R}$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}^*$, tel que $|z| = \left|\dfrac{1}{z}\right| = |1+z|$. Comme $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ Ainsi, on $|z| = \dfrac{1}{|z|}$ donc $|z|^2 = 1$ donc $|z| = 1$.

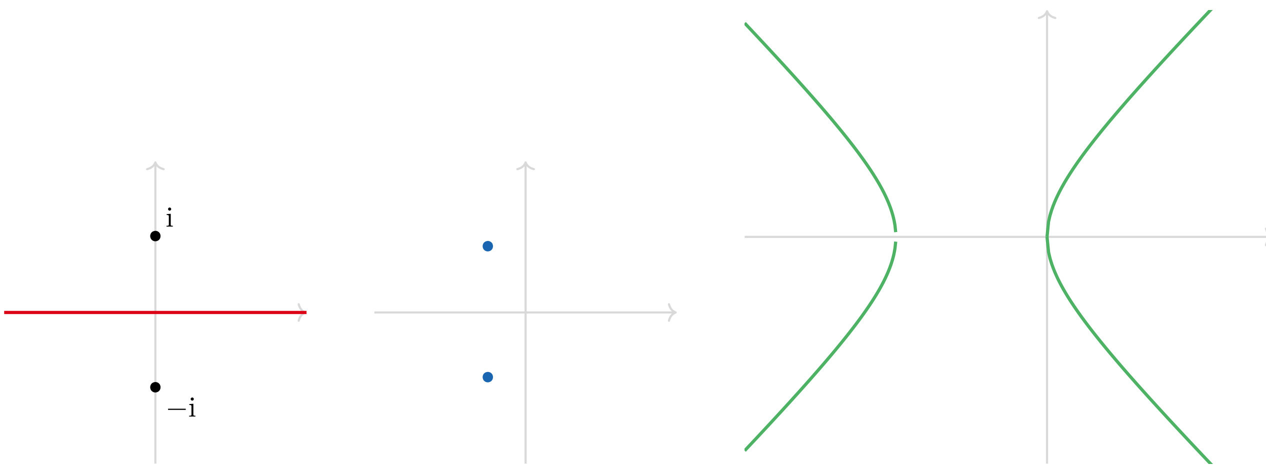
   De plus,
   $$|1+z|^2 = (1+z)(\overline{1+z}) = (1+z)(1+\overline{z}) = 1 + z + \overline{z} + |z|^2 = |z|^2$$
   donc $1 + z + \overline{z} = 0$ en multipliant par z on a $z + z^2 + \overline{z}z = 0$ donc $z + z^2 + 1 = 0$. Or, le discriminant de cette équation vaut $\Delta = 1 - 4 = -3 = (\mathrm{i}\sqrt{3})^2$, ainsi $z = \dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ ou $z = \dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

   Réciproquement si $z = \dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$, alors $\dfrac{1}{z} = \dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $1+z = \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et donc $|z| = |1+z| = \left|\dfrac{1}{z}\right| = 1$ et si $z = \dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ alors $\dfrac{1}{z} = \dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $1+z = \dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et donc $|z| = |1+z| = \left|\dfrac{1}{z}\right| = 1$.

   En conclusion, les solutions sont $z = \dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $z = \dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$
3. Posons $z = a + \mathrm{i}b$, alors $z + \overline{z} = z\overline{z}$ ssi $2a = a^2 + b^2$ ssi $b^2 = a^2 + 2a$ ssi $a \in \left]-\infty\,;-2\right] \cup \left[0\,;+\infty\right[$ et $b = \pm\sqrt{a^2+2a}$

Correction de l'exercice 30.

Correction de l'exercice 31.



(a) Ensemble des points z tel que $|z - \mathrm{i}| = |z + \mathrm{i}|$.

(b) Ensemble des points z tel que $|z| = \left|\dfrac{1}{z}\right| = |1 + z|$.

(c) Ensemble des points z tel que $z + \overline{z} = z\overline{z}$.

Figure 5 – Ensembles des points de l'exercice 29.