Chapitre 4

Primitives et équations différentielles

Dans ce chapitre, nous allons revoir la définition et le calculs des primitives et des intégrales d'une fonction continue. Puis nous verrons la résolution d'équations différentielles. Dans ce chapitre, nous ne donnerons pas une définition précise de l'intégrale, nous nous contenterons d'admettre ses propriétés ainsi que le théorème fondamental de l'analyse. Nous reviendrons sur la construction de l'intégrale au second semestre et ce sera l'occasion de démontrer ce fameux théorème fondamental.

Table des matières

Dans ce chapitre, on considère $\mathbb{K}$ qui vaut $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I un intervalle.

1 Calcul de primitives et d'intégrales

1.1 Rappels des propriétés de l'intégrale et extension aux fonctions à valeurs complexes

Dans ce chapitre, on admet que pour $f\colon [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$, une fonction continue sur $[\,a\,;b\,]$, on peut lui associer un nombre qui représente l'aire algébrique sous la courbe, noté $\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, vérifiant les propriétés suivantes :

Proposition n° 1 : propriétés de l'intégrale des fonctions continues sur un segment *(admis)*

Pour tout $(f,g) \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,],\mathbb{R})^2$, $c \in [\,a\,;b\,]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes :

1. $\int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$ (linéarité)
2. si $f \geqslant 0$ alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ (positivité)
3. Si $f \leqslant g$ alors $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$ (croissance)
4. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(u)\,\mathrm{d}u$ (Chasles)

Définition de l'intégrale d'une fonction continue à valeurs complexes

Si $f\colon [\,a\,;b\,] \to \mathbb{C}$ est continue, i.e. $x \mapsto \mathrm{Re}(f(x))$ et $x \mapsto \mathrm{Im}(f(x))$ sont continues sur $[\,a\,;b\,]$, alors on définit l'intégrale de f par :
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{Re}(f(x))\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_a^b \mathrm{Im}(f(x))\,\mathrm{d}x$$

Remarques 1.

- Ainsi, $\mathrm{Re}\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_a^b \mathrm{Re}(f(x))\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{Im}\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_a^b \mathrm{Im}(f(x))\,\mathrm{d}x$. De plus, la linéarité et la relation de Chasles restent vraies avec des fonctions à valeurs complexes. En revanche, la positivité et la croissance n'ont plus de sens.
- Si $a > b$, alors on pose $\int_a^b f = -\int_b^a f$ et, par convention, $\int_a^a f = 0$.

1.2 Théorème fondamental de l'analyse et conséquences

Définition d'une primitive

Soit $f\colon I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On appelle **primitive** de f toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Exemple 1. Si $f(x) = x^3$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors une primitive de f est $x \mapsto$

Théorème n° 1 : fondamental de l'analyse *(admis provisoirement)*

Soient $x_0 \in I$ et $f \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{C})$. Posons, pour $x \in I$, $G(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. G est une primitive de f qui s'annule en x_0.
2. Les primitives de f sont exactement les fonctions de la forme $G + c$ où $c \in \mathbb{R}$.
3. La fonction G est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en x_0.

Attention il n'y a pas unicité des primitives

On dit donc «une primitive de f» et non «la primitive de f». Les primitives diffèrent toutes d'une constante.

Remarque 2. Pour une fonction f continue, on note $\int^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour dire une primitive «générique» de f.

Exemple 2. Pour $\lambda \neq 0$, $\int^x \mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{\lambda x} + c$ où c est une constante. Si $\lambda = 0$, $\int^x \mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathrm{d}t = x + c$.

Théorème n° 2 : calcul d'intégrale

Soit $f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,],\mathbb{C})$ et F une primitive de f, alors : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$

Démonstration du théorème n° 2 : Posons $G(x) = \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$. Il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $G = F + c$, alors, $\begin{cases} G(a) = F(a) + c \\ G(b) = F(b) + c \end{cases}$.
Par différence, $F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. ■

Exemples 3. Calculer $\int_3^4 x^3\,\mathrm{d}x$, et $\int_2^3 \frac{1}{t+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}t$.

1.3 Primitives usuelles

	Condition(s)	Intervalle(s)
$\int^x \lambda\,\mathrm{d}t = \lambda x + k$	$\lambda \in \mathbb{C}$	$\mathbb{R}$
$\int^x t^\alpha\,\mathrm{d}t = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k$	$\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ si $\alpha \in \mathbb{Z}_-$, $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha \notin \mathbb{Z}$
$\int^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln\lvert x\rvert + k$		$\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$
$\int^x \mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{\lambda x} + k$	$\lambda \in \mathbb{C}^*$	$\mathbb{R}$
$\int^x a^t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\ln a}a^x + k$	$a > 0$ et $a \neq 1$	$\mathbb{R}$
$\int^x \cos(\omega t + \varphi)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\omega}\sin(\omega x + \varphi) + k$	$\omega \in \mathbb{R}^*$, $\varphi \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\int^x \sin(\omega t + \varphi)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\omega}\cos(\omega x + \varphi) + k$	$\omega \in \mathbb{R}^*$, $\varphi \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\int^x \tan t\,\mathrm{d}t = -\ln(\lvert\cos x\rvert) + k$		$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$
$\int^x 1 + \tan^2(t)\,\mathrm{d}t = \int^x \frac{1}{\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t = \tan x + k$		$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$
$\int^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \arctan(x) + k$		$\mathbb{R}$
$\int^x \frac{1}{f+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{f}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{f}}\right) + k$	$f > 0$	$\mathbb{R}$
$\int^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \arcsin(x) + k$		$]-1\,;1\,[$
$\int^x \mathrm{ch}(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\omega}\mathrm{sh}\omega x + k$	$\omega \in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$
$\int^x \mathrm{sh}(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\omega}\mathrm{ch}\omega x + k$	$\omega \in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$

TABLE 1 – Primitives usuelles

	Condition(s)
$\int^x u'(t)\times u(t)^\alpha \,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}(x)$	$\alpha \neq -1$, $u\colon I\to\mathbb{C}^*$ si $\alpha\in\mathbb{Z}_-$, $u\colon I\to\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha\notin\mathbb{Z}$
$\int^x \frac{u'}{u^2} = -\frac{1}{u(x)}$	$u\colon I\to\mathbb{C}^*$
$\int^x \frac{u'(t)}{\sqrt{u(t)}}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{u(x)}$	$u\colon I\to\mathbb{R}_+^*$
$\int^x u'\mathrm{e}^u = \mathrm{e}^{u(x)}$	aucune
$\int^x \frac{u'}{u} = \ln(\lvert u(x)\rvert)$	$u\colon I\to\mathbb{R}^*$
$\int^x u'(t)\sin(u(t))\,\mathrm{d}t = -\cos(u(x))$	aucune
$\int^x u'\cos u = \sin(u(x))$	aucune

TABLE 2 – Primitives usuelles grâce à la dérivation d'une composée avec u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Exemples 4. Calculer $\int_2^3 \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x$ puis $\int^x \mathrm{e}^{2t}\cos(3t)\,\mathrm{d}t$, $\int^x \cos^3(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$.

Péril imminent : n'inventez pas fausses formules de primitives

Si on a des primitives de u et de v, en général, on ne peut en déduire des primitives de uv, u/v, $u\circ v$, ou de u^α.

1.4 Calculs des primitives de $x\mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$

Comment calculer des primitives de $x\mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ avec $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ et $a\neq 0$?

Déterminer le nombre de racines réelles de l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$:

1. S'il y a deux racines réelles distinctes x_1 et x_2, alors il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tel que
$$\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{x_1,x_2\}\qquad \frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}$$
2. S'il y a une racine double x_0, alors $x\mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a(x-x_0)^2}$
3. S'il y a zéro racine réelle, utiliser la forme canonique et $\int^x \frac{\mathrm{d}t}{(t+e)^2+f} = \frac{1}{\sqrt{f}}\arctan\left(\frac{x+e}{\sqrt{f}}\right)$ si $f>0$

Démonstration de la méthode pour calculer des primitives de $x\mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$:

1. S'il y a deux racines x_1 et x_2 avec $x_1<x_2$ Pour $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ et x différent de x_1 et x_2, alors :
$$\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2} = \frac{A(x-x_2)+B(x-x_1)}{(x-1)(x-x_2)} = \frac{(A+B)x-Ax_2-Bx_1}{(x-x_1)(x-x_2)}$$
$$= \frac{a(A+B)x-Aax_2-Bax_2}{a(x-1)(x-x_2)} = \frac{a(A+B)x-Aax_2-Bax_2}{ax^2+bx+c}$$
Ainsi, il suffit de prendre $B=-A$ et A tel que $Aa(x_2-x_1)=1$ ce qui est toujours possible car $a\neq 0$ et $x_2-x_1\neq 0$. On a donc bien démontré que A et B existe. De plus, $x\mapsto A\ln(\lvert x-x_1\rvert)+B\ln(\lvert x-x_2\rvert)$ est une primitive de $x\mapsto \frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}$ que ce soit sur $]-\infty\,;x_1[$, ou sur $]x_1\,;x_2[$ ou sur $]x_2\,;+\infty[$.

2. S'il y a une racine double, alors $\dfrac{1}{ax^2+bx+c} = \dfrac{1}{a(x-x_0)^2}$, et $x \mapsto \dfrac{-1}{a} \times \dfrac{1}{x-x_0}$ en est une primitive sur $]-\infty\,;x_0[$ ou sur $]x_0\,;+\infty[$.
3. S'il n'y a pas de racine réelle, alors le discriminant $\Delta = b^2-4ac < 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}\right) = a\left(x^2+2\times x\times\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)$$

et en posant $e = \dfrac{b}{2a}$ et $f = \dfrac{4ac-b^2}{4a^2} = \dfrac{-\Delta}{4a^2} > 0$. On obtient que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{ax^2+bx+c} = \dfrac{1}{a} \times \dfrac{1}{(x+e)^2+f}$. Posons alors la fonction $F\colon x \mapsto \dfrac{1}{a\sqrt{f}} \arctan\left(\dfrac{x+e}{\sqrt{f}}\right)$. Par composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = \frac{1}{a\sqrt{f}} \times \frac{1}{\sqrt{f}} \times \frac{1}{1+\left(\dfrac{x+e}{\sqrt{f}}\right)^2} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{(x+e)^2+f}$$

Par conséquent, F est bien une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ sur $\mathbb{R}$.

Exemples 5.
- En précisant les intervalles, déterminer des primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4x-12}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4x+4}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4x+10}$ puis de $x \mapsto \dfrac{4x+3}{x^2+4x-12}$
- Calculer $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

1.5 Calculs d'intégrales par intégrations par parties

Théorème n° 3 : intégration par parties

Soit $(u,v) \in \mathscr{C}^1([\,a\,;b\,],\mathbb{K})^2$, alors : $\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$

Démonstration du théorème n° 3 : Comme $(uv)' = u'v+uv'$ il vient par linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Or uv est une primitive de $(uv)'$, ainsi :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [(uv)]_a^b$$

Dès lors,

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x))]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

■

Exemples 6.
- Calculer $\displaystyle\int_1^2 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^2 x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.
- Calculer une primitive de ln et de arctan.

Remarque 3. Les IPP sont souvent utiles lorsque la dérivée d'une fonction est plus «simple» que la fonction elle-même.

1.6 Changement de variable

Théorème n° 4 : de changement de variable

Soient $\varphi \in \mathscr{C}^1([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ et $f \in \mathscr{C}^0(\varphi([\,a\,;b\,]),\mathbb{K})$, alors $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$

Démonstration du théorème n° 4 :

- Comme f est continue sur $\varphi([\,a\,;b\,])$, d'après le théorème fondamental de l'analyse, f admet au moins une primitive, notée F. Alors, $\displaystyle\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$
- Remarquons que, par composée, $F\circ\varphi$ est dérivable et $(F\circ\varphi)' = \varphi' \times (F'\circ\varphi) = \varphi' \times (f\circ\varphi)$. Ainsi, $F\circ\varphi$ est une primitive de $(f\circ\varphi)\times\varphi'$, par conséquent, $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = (F\circ\varphi)(b) - (F\circ\varphi)(a)$.

Ainsi, les deux intégrales sont égales. ■

Comment effectuer un changement de variable ?

Dans une intégrale à calculer dont la variable est t. Poser une nouvelle variable x en fonction de t. Il faut ne pas oublier chacune de ces trois étapes :

- Dans l'intégrande, remplacer les t par leur valeur qui dépend de x. Attention, soit la variable est t et dans ce cas-là, il n'y a pas de x, soit la variable est x et dans ce cas-là il n'y a pas de t.
- Changer les bornes : si t vaut une des bornes, calculer la nouvelle borne correspondante en x (le faire pour les deux bornes).
- Enfin, si $x = \varphi(t)$, par dérivation, $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, vous permet de remplacer $\mathrm{d}t$ par sa valeur en $\mathrm{d}x$.

Exemples 7. À l'aide de changement de variables du type $x = \ln(t)/\mathrm{e}^{\,t}/t^2/\sqrt{t}/\cos(t)/\sin(t)$,

1. calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}\,\mathrm{d}t$
2. calculer $\displaystyle\int_1^4 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
3. calculer $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos^2(t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$
4. calculer une primitive de $t\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}+1}$ et de $x\mapsto\dfrac{1}{(x+1)^2+9}$

Solution des exemples 7 :

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{2\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{\,t}+\mathrm{e}^{-t}}$, on pose $x = \mathrm{e}^{\,t}$, alors $\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\,t}\,\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}t$, donc $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$, ainsi

$$\int_1^2 \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{\mathrm{e}^{\,1}}^{\mathrm{e}^{\,2}} \frac{2}{x+x^{-1}}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_{\mathrm{e}^{\,1}}^{\mathrm{e}^{\,2}} \frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = [2\arctan(x)]_{\mathrm{e}^{\,1}}^{\mathrm{e}^{\,2}} = 2\arctan(\mathrm{e}^{\,2}) - 2\arctan(\mathrm{e}^{\,1})$$

2. On pose $t = \sqrt{x}$, alors $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2t}\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$, ainsi :

$$\int_1^4 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \mathrm{e}^{\,t}2t\,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^{\,t}2t\right]_1^2 - \int_1^2 \mathrm{e}^{\,t}2\,\mathrm{d}t = 4\mathrm{e}^{\,2} - 2\mathrm{e}^{\,1} - \left[2\mathrm{e}^{\,t}\right]_1^2 = 2\mathrm{e}^{\,2}$$

3. On pose $u = \cos(t)$, alors $\mathrm{d}u = -\sin(t)\,\mathrm{d}t$, soit $\mathrm{d}t = \dfrac{-\,\mathrm{d}u}{\sin(t)}$, donc $\dfrac{\mathrm{d}t}{\sin(t)} = \dfrac{-\,\mathrm{d}u}{\sin^2(t)} = \dfrac{-\,\mathrm{d}u}{1-\cos^2(t)} = \dfrac{-\,\mathrm{d}u}{1-u^2}$, ainsi

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{2}}^{0} u^2\frac{-\,\mathrm{d}u}{1-u^2} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{u^2-1+1}{1-u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{1}{2}} -1 + \frac{1}{1-u^2}\,\mathrm{d}u$$

Or, il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $u\in\mathbb{R}\backslash\{1,-1\}$,

$$\frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{(1-u)(1+u)} = \frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u}$$

En multipliant par $1-u$ et en faisant $u\to 1$, on trouve $A = \dfrac{1}{2}$, en multipliant par $1+u$ et en faisant $u\to -1$, on trouve $B = \dfrac{1}{2}$, ainsi, $\dfrac{1}{1-u^2} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{1-u} + \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{1+u}$, donc

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(t)}{\cos(t)}\,\mathrm{d}t &= \left[-u - \frac{1}{2}\ln(|1-u|) + \frac{1}{2}\ln(1+u)\right]_0^{\frac{1}{2}}\\ &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln(1/2) + \frac{1}{2}\ln(3/2)\\ &= \frac{\ln(3)-1}{2}\end{aligned}$$

4. On cherche à calculer $\displaystyle\int^t \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+1}$. On pose $u=\sqrt{x}$, $\mathrm{d}u=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2u}\,\mathrm{d}x$, alors $\mathrm{d}x=2u\,\mathrm{d}u$, alors

$$\int^t \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+1}=\int^{\sqrt{t}}\frac{2u\,\mathrm{d}u}{u+1}=\frac{2u+2-2}{u+1}\,\mathrm{d}u=\int^{\sqrt{t}}\frac{2u+2}{u+1}-\frac{2}{u+1}\,\mathrm{d}u=\left[2u-2\ln(|u+1|)\right]^{\sqrt{t}}=2\sqrt{t}-2\ln(\sqrt{t}+1)$$

Ainsi, $t\mapsto 2\sqrt{t}-2\ln(\sqrt{t}+1)$ est une primitive de $t\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{t}+1}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. On cherche à calculer $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2+9}=\int^x \frac{1}{9}\times\frac{\mathrm{d}t}{1+\left(\frac{t+1}{3}\right)^2}$. On pose $u=\dfrac{t+1}{3}$, alors $\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}t}{3}$, donc $\mathrm{d}t=3\,\mathrm{d}u$, ainsi

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2+9}=\int^{\frac{x+1}{3}}\frac{3\,\mathrm{d}u}{9(1+u^2)}=\left[\frac{1}{3}\arctan(u)\right]^{\frac{x+1}{3}}=\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x+1}{3}\right)$$

Ainsi, $x\mapsto\dfrac{1}{3}\arctan\left(\dfrac{x+1}{3}\right)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x\mapsto\dfrac{1}{(x+1)^2+9}$

2 Équation différentielle linéaire du premier ordre

2.1 Définition

On se fixe I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

Définition d'une équation différentielle linéaire du premier ordre

Soit $(a,b)\in\mathscr{C}^0(I,\mathbb{K})^2$. On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre** l'équation d'inconnue la fonction y : $$y'+a(x)y=b(x)\quad (E)$$
Si f est une fonction dérivable sur I telle que, pour tout $x\in I$, $f'(x)+a(x)f(x)=b(x)$, on dit que f est une **solution** de l'équation différentielle (E). On note souvent S_E l'ensemble des solutions de (E).

Exemples 8.
- L'équation $y'-\dfrac{1}{x\ln(x)}y=\ln(x)\mathrm{e}^x$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre sur $]\,0\,;1\,[$.
- Vérifier que $x\mapsto\ln(x)\mathrm{e}^x$ est une solution de cette équation.
- $xy'+2y=\mathrm{e}^x$ n'est pas *vraiment* une équation différentielle linéaire du premier ordre à cause du terme xy' (on dit que c'est une équation différentielle non normalisée). Pour la résoudre, on divise par x sur un intervalle où x ne s'annule pas. Il faudra donc travailler sur $\mathbb{R}_+^*$, puis faire le même travail sur $\mathbb{R}_-^*$. En effet, $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle.

Remarque 4. La notation en usage mélange fonctions et nombre dans l'équation différentielle, ce qui est bien malheureux. Il faut bien avoir en tête que cet abus n'est toléré que pour écrire l'équation que l'on est en train de traiter. Si vous voulez vérifier qu'une fonction f est solution d'une équation, il faudra écrire, «pour tout $x\in I$, $f'(x)+a(x)f(x)=\ldots=b(x)$»

Définition de l'équation homogène

Soit une EDL du premier ordre $y'+a(x)y=b(x)$. L'**équation homogène** associée est $y'+ay(x)=0$.

2.2 Résolution des équations différentielles linéaire du premier ordre

Proposition n° 2 : résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre homogène

Soit $y'+a(x)y=0$ avec $a\in\mathscr{C}^0(I,\mathbb{K})$ et A une primitive de a sur I. Les solutions de cette EDL homogène sont exactement les fonctions de la forme $x\mapsto C\mathrm{e}^{-A(x)}$ où $C\in\mathbb{K}$ $$S_H=\{x\mapsto C\mathrm{e}^{-A(x)}\text{ avec } C\in\mathbb{K}\}.$$

Démonstration de la proposition n° 2 : Posons $f\colon x \mapsto C\mathrm{e}^{-A(x)}$ où $C \in \mathbb{R}$ et montrons que f est solution. Comme A et exp sont dérivables, par composition, f est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) + a(x)f(x) = -CA'(x)\mathrm{e}^{-A(x)} + a(x)C\mathrm{e}^{-A(x)} = -Ca(x)\mathrm{e}^{-A(x)} + a(x)C\mathrm{e}^{-A(x)} = 0$$

Ainsi, f est solution de l'équation.

Réciproquement, soit f une solution de l'équation. Posons $g\colon x \mapsto f(x)\mathrm{e}^{A(x)}$, g est dérivable par produit et par composition et pour tout $x \in I$:

$$g'(x) = f'(x)\mathrm{e}^{A(x)} + f(x)A'(x)\mathrm{e}^{A(x)} = (-a(x)f(x))\mathrm{e}^{A(x)} + f(x)a(x)\mathrm{e}^{A(x)} = 0$$

La dérivée de g étant nulle sur l'intervalle I, g est constante. Notons C la constante : pour tout $x \in I$, $f(x)\mathrm{e}^{A(x)} = C$. Par conséquent, on obtient $f\colon x \mapsto C\mathrm{e}^{-A(x)}$ avec $C \in \mathbb{K}$. ∎

Exemples 9.
- Résoudre sur $\mathbb{R}$, $y' + xy = 0$ puis $y' - \dfrac{y}{1+x^2} = 0$.
- Si a est une constante, les solutions de $y' + ay = 0$ sont de la forme $x \mapsto C\mathrm{e}^{-ax}$ avec $C \in \mathbb{K}$.

Proposition n° 3 : ensemble des solutions à partir d'une solution particulière

Considérons l'EDL : $y' + a(x)y = b(x)$ (E). Supposons que l'on ait une solution particulière notée y_P. Alors les solutions de (E) sont exactement les fonctions de la forme $y_P + y_H$ où $y_H \in S_H$: $S_E = \{y_P + y_H \mid y_H \in S_H\}$.

Proposition n° 4 : variation de la constante

Considérons l'EDL : $y' + a(x)y = b(x)$. Il existe une solution particulière $y_P\colon x \mapsto C(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$ où C est une fonction dérivable sur I.

Démonstration de la proposition n° 4 : Soit C une fonction dérivable sur I. Posons $y_P\colon x \mapsto C(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$, par produit de fonctions dérivables, y_P est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$y_P{}'(x) + a(x)y_P = C'(x)\mathrm{e}^{-A(x)} + C(x)(-A'(x))\mathrm{e}^{-A(x)} + a(x)C(x)\mathrm{e}^{-A(x)} = C'(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$$

Ainsi, y_P est une solution particulière ssi pour tout x, $C'(x) = b(x)\mathrm{e}^{A(x)}$. Ainsi, fixons C une primitive de $x \mapsto b(x)\mathrm{e}^{A(x)}$ (existe car $b \times \mathrm{e}^{A}$ est une fonction continue sur I). $y_P : x \mapsto C(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$ est une solution particulière. ∎

Exemple 10. Résoudre $y' + \dfrac{1}{x}y = x^3$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition n° 5 : principe de superposition

Soient deux EDL : $y' + a(x)y = b_1(x)$ (E_1) et $y' + a(x)y = b_2(x)$ (E_2). Si y_1 (resp. y_2) est une solution de (E_1) (resp. de (E_2)) et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors $\lambda y_1 + \mu y_2$ est une solution particulière de $y' + a(x)y = \lambda b_1(x) + \mu b_2(x)$.

Théorème n° 5 : existence et unicité de la solution au problème de Cauchy

Soit $(a, b, x_0, y_0) \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})^2 \times I \times \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy : $y' + a(x)y = b(x)$ et $y(x_0) = y_0$ admet une unique solution sur I.

Exemple 11. Résoudre $y' + \dfrac{1}{x}y = x^3$ sur $\mathbb{R}_+^*$. avec la condition $y(1) = 5$.

3 Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

Définition d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

Soient $a, b \in \mathbb{K}$ et $f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})$. L'équation $y'' + ay' + by = f(x)$ (E) est appelée **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants**. Une **solution** de (E) est une fonction $g\colon I \to \mathbb{K}$ deux fois dérivable telle que, pour tout $x \in I$, $g''(x) + ag'(x) + bg(x) = f(x)$. L'**équation homogène associée** à cette EDL est $y'' + ay' + by = 0$ (H).

Exemple 12. L'équation différentielle $y'' + 2y' + 4y = \mathrm{e}^{x}$ est linéaire du second ordre à coefficients constants.

Définition de l'équation caractéristique associée

Soit $y'' + ay' + by = 0$ (H) une EDL homogène du second ordre à coefficients constants. On appelle **équation caractéristique** associée à (H) $r^2 + ar + b = 0$

Théorème n° 6 : résolution dans $\mathbb{K}$ d'une EDL du 2nd ordre homogène à coefficients constants

Soit $y'' + ay' + by = 0$ (H) avec $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ et $\Delta = a^2 - 4b$ le discriminant de l'équation caractéristique (EC).

1. Si l'EC admet deux racines distinctes dans $\mathbb{K}$ r_1 et r_2 (i.e. $\Delta \neq 0$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\Delta > 0$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) et
$$S_H = \left\{x \mapsto C_1\mathrm{e}^{r_1 x} + C_2\mathrm{e}^{r_2 x} \mid (C_1, C_2) \in \mathbb{K}^2\right\}$$
2. Si l'EC admet une racine double $r_1 \in \mathbb{K}$ (i.e. $\Delta = 0$) et $\quad S_H = \left\{x \mapsto (C_1 x + C_2)\mathrm{e}^{r_1 x} \mid (C_1, C_2) \in \mathbb{K}^2\right\}$
3. Si l'EC n'a pas de racines (i.e. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$), notons les deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $r_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta$ alors $\quad S_H = \left\{x \mapsto (C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x))\,\mathrm{e}^{\alpha x} \mid (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$

Démonstration du théorème n° 6 : Soient r_1 et r_2 les deux solutions de l'équation caractéristique (éventuellement égales et/ou complexes). Soit $y\colon I \to \mathbb{K}$ une fonction deux fois dérivable. Posons $u\colon x \mapsto \mathrm{e}^{-r_1 x}y(x)$, alors u est deux fois dérivables et :

- $y\colon x \mapsto \mathrm{e}^{r_1 x}u(x)$
- $y'\colon x \mapsto \mathrm{e}^{r_1 x}(r_1 u(x) + u'(x))$
- $y''\colon x \mapsto \mathrm{e}^{r_1 x}({r_1}^2 u(x) + 2r_1 u'(x) + u''(x))$

Alors :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} \qquad y''(x) + ay'(x) + by(x) &= \mathrm{e}^{r_1 x}\left[\left({r_1}^2 u(x) + 2r_1 u'(x) + u''(x)\right) + a\left(\mathrm{e}^{r_1 x}(r_1 u(x) + u'(x))\right) + bu(x)\right] \\ &= \mathrm{e}^{r_1 x}\left(u(x)({r_1}^2 + ar_1 + b) + u'(x)(2r_1 + \underbrace{a}_{=-r_1-r_2}) + u''(x)\right) = u'(x)(r_1 - r_2) + u''(x)\end{aligned}$$

Ainsi, y est solution de (H) ssi $u'(r_1 - r_2) + u'' = 0$ (EDL homogène d'ordre 1 dont u' est l'inconnue). Distinguons les cas :

1. S'il y a deux racines distinctes dans $\mathbb{K}$, alors y est solution de (H) ssi $u'\colon x \mapsto C\mathrm{e}^{(r_2 - r_1)x}$ avec $C \in \mathbb{K}$ ssi $u\colon x \mapsto C_2\mathrm{e}^{(r_2 - r_1)x} + C_1$ avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{K}^2$ ssi $y\colon x \mapsto C_2\mathrm{e}^{r_2 x} + C_1\mathrm{e}^{r_1 x}$
2. S'il y a une racine double dans $\mathbb{K}$, alors $r_1 - r_2 = 0$, ainsi y est solution de (H) ssi $u''\colon x \mapsto 0$ ssi $u\colon x \mapsto C_1 x + C_2$ avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{K}^2$ ssi $y\colon x \mapsto (C_1 x + C_2)\mathrm{e}^{r_1 x}$
3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$. Si y est une solution réelle, alors y est une solution complexe, en particulier, grâce au cas 1, il existe $(C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y\colon x \mapsto C_1\mathrm{e}^{r_1 x} + C_2\mathrm{e}^{r_2 x}$. On obtient alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{(\alpha + \mathrm{i}\beta)x} + C_2\mathrm{e}^{(\alpha - \mathrm{i}\beta)x} = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(C_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta x} + C_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta x}\right) = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(\frac{C_1 + C_2}{2}\cos(\beta x) + \frac{C_1 - C_2}{2}\mathrm{i}\sin(\beta x)\right)$$
Ainsi, $y\colon x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$ avec $(A, B) \in \mathbb{C}^2$. Seulement, $y(0) = A \in \mathbb{R}$ et $y\left(\dfrac{\pi}{2\beta}\right) = \mathrm{e}^{\alpha\pi/2\beta}B \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$, ainsi $y\colon x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
Réciproquement si $y\colon x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$, alors y est bien une fonction à valeurs réelles et en remplaçant cos et sin par les formules d'Euler, on obtient que $y\colon x \mapsto C_1\mathrm{e}^{r_1 x} + C_2\mathrm{e}^{r_2 x}$ avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$ donc que y est solution de l'équation différentielle en appliquant le point 1. ■

Exemples 13. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 4y' + 4y = 0$
2. $y'' - 3y' + 9y = 0$
3. $y'' + 5y' + 4y = 0$

Exemple : cas particulier des équations de la forme $y'' + {\omega_0}^2 y = 0$ où $\omega_0 > 0$

Une connaissance parfaite des solutions de cette équation est nécessaire car apparaît souvent en physique/SI.

Proposition n° 6 : ensemble des solutions à partir d'une solution particulière

Soit $y'' + ay' + by = f(x)$ (E) une EDL d'ordre 2 à coefficients constants définie sur I. Si y_P est une solution particulière de (E) alors les solutions de (E) sont exactement les fonctions de la forme : $y_H + y_P$ avec y_H solution de l'équation homogène associée (H). Ainsi, $S_E = \{y_H + y_P \mid y_H \in S_H\}$.

Proposition n° 7 : principe de superposition

Si $y_1''+ay_1'+by_1 = f_1$ et $y_2''+ay_2'+by_2 = f_2$, alors pour $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda y_1+\mu y_2$ est solution de $y''+ay'+by = \lambda f_1+\mu f_2$.

Remarque 5. Vous ne saurez pas résoudre $y'' + ay' + by = f$ avec $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et f quelconque sauf cas particuliers.

Définition de la multiplicité d'une racine

Considérons une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$) et $r \in \mathbb{C}$.

- Si r est une racine double, on peut factoriser par $(x - r)^2$, on dit que la multiplicité de r est 2.
- Si r est une racine mais pas double, on peut factoriser que par $(x - r)^1$, on dit que la multiplicité de r est 1.
- Si r n'est pas une racine, on peut factoriser que par $(x - r)^0 = 1$, on dit que la multiplicité de r est 0.

Proposition n° 8 : solution particulière pour certains seconds membres (principe de ressemblance)

Pour les fonctions f présentes dans ce tableau, l'équation différentielle $y'' + ay' + by = f$ (avec $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et d'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ noté EC), admet une solution particulière de la forme indiquée :

Si $f\colon x \mapsto \dots$	m multiplicité de	Il existe une solution particulière $x \mapsto \dots$
$Ae^{\omega x}$ avec $(A, \omega) \in \mathbb{K}^2$	ω dans l'EC	$x^m Be^{\omega x}$ avec $B \in \mathbb{K}$
$A\cos\omega x + B\sin\omega x$ avec $(a, b, A, B, \omega) \in \mathbb{R}^5$	$\mathrm{i}\omega$ dans l'EC	$x^m(C\cos\omega x + D\sin\omega x)$ avec $(C, D) \in \mathbb{R}^2$
$\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $a_k \in \mathbb{K}$	0 dans l'EC	$x^m \sum\limits_{k=0}^{n} b_k x^k$ avec $b_k \in \mathbb{K}$

Démonstration de la proposition n° 8 :

- Si $f\colon x \mapsto Ae^{\omega x}$ avec $A \in \mathbb{K}$ et que ω est de multiplicité 0 dans l'EC (autrement dit ω n'est pas racine de l'EC). Posons $g\colon x \mapsto Be^{\omega x}$ avec $B \in \mathbb{K}$. Alors, $g'\colon x \mapsto B\omega e^{\omega x}$ et $g''\colon x \mapsto B\omega^2 e^{\omega x}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$g''(x) + ag'(x) + bg(x) = B(\omega^2 + a\omega + b)e^{\omega x}$$
Remarquons que $\omega^2 + a\omega + b \neq 0$. Ainsi, g est solution de l'équation ssi $B = \dfrac{A}{\omega^2 + a\omega + b}$. Ainsi, $x \mapsto \dfrac{A}{\omega^2 + a\omega + b}e^{\omega x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle.
- Si $f\colon x \mapsto Ae^{\omega x}$ avec $A \in \mathbb{K}$ et que ω est de multiplicité 1 dans l'EC (autrement dit ω est racine de l'EC et il existe une seconde racine notée ω'). Posons $g\colon x \mapsto Bxe^{\omega x}$ avec $B \in \mathbb{K}$. Alors, $g'\colon x \mapsto Be^{\omega x}(1 + \omega x)$ et $g''\colon x \mapsto Be^{\omega x}(\omega^2 x + 2\omega)$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$g''(x) + ag'(x) + bg(x) = Be^{\omega x}\left(x(\omega^2 + a\omega + b) + (2\omega + a)\right) = (\omega - \omega')Be^{\omega x}$$
Ainsi, comme $\omega - \omega' \neq 0$, on prend $B = \dfrac{A}{\omega - \omega'}$. Dès lors, on a prouvé que $x \mapsto \dfrac{A}{\omega - \omega'}xe^{\omega x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle.
- Si $f\colon x \mapsto Ae^{\omega x}$ avec ω racine double de l'EC. Posons alors $g\colon x \mapsto Bx^2e^{\omega x}$, alors $g'\colon x \mapsto e^{\omega x}B\left(2x + \omega x^2\right)$ et $g''\colon x \mapsto Be^{\omega x}(2 + 4x\omega + \omega^2 + x^2)$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$g''(x) + ag'(x) + bg(x) = Be^{\omega x}\left(x^2(\omega^2 + a\omega + b) + x(4\omega + 2a) + 2\right) = 2Be^{\omega x}$$
On prend alors $B = \dfrac{A}{2}$, ainsi $x \mapsto \dfrac{A}{2}x^2e^{\omega x}$ est une solution particulière.
- Considérons $(a, b, A, B, \omega) \in \mathbb{R}^5$. D'après les formules d'Euler, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x) = \frac{A - \mathrm{i}B}{2}e^{\mathrm{i}\,\omega x} + \frac{A + \mathrm{i}B}{2}e^{-\mathrm{i}\,\omega x} = \mathrm{Re}\left((A - \mathrm{i}B)e^{\mathrm{i}\,\omega x}\right)$$
En appliquant la résolution de l'équation différentielle avec un second membre en exponentielle, il existe une solution de l'équation $y''+ay'+by = (A-\mathrm{i}B)e^{\mathrm{i}\,\omega}$ de la forme $g\colon x \mapsto x^m Ee^{\mathrm{i}\,\omega x}$ avec m la multiplicité de $\mathrm{i}\omega$ dans l'équation caractéristique. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g''(x) + ag'(x) + bg(x) = (A - \mathrm{i}B)e^{\mathrm{i}\,\omega}$. En prenant la partie réelle et en utilisant le fait que a et b soit réel, on obtient
$$\mathrm{Re}(g''(x)) + a\mathrm{Re}(g'(x)) + b\mathrm{Re}(g(x)) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$$
Or, $\mathrm{Re}(g'(x)) = \mathrm{Re}(g)'(x)$ et $\mathrm{Re}(g''(x)) = \mathrm{Re}(g)''(x)$. Notons $h = \mathrm{Re}(g)$, on a ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$h''(x) + ah'(x) + bh(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$$
Avec, $h(x) = \mathrm{Re}(g(x)) = \mathrm{Re}(x^m Ee^{\mathrm{i}\,\omega x})$ en écrivant E et $e^{\mathrm{i}\,\omega x}$ sous forme algébrique et en faisant le produit, on obtient que $h(x) = x^m(C\cos(\omega x) + D\sin(\omega x))$ avec $(C, D) \in \mathbb{R}^2$.

- Supposons que $f\colon x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ et que 0 ne soit pas racine de l'équation caractéristique, en particulier, b, qui vaut le produit des racines, n'est pas nul. On pose $g\colon x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} b_k x^k$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots + b_k x^k + \ldots + b_n x^n$$
$$g'(x) = 0 + b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 + \ldots + b_k k x^{k-1} + \ldots + n b_n x^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1}(k+1)x^k$$
$$g''(x) = 2b_2 + 6b_3 x + \ldots + b_k k(k-1)x^{k-2} + \ldots + n(n-1)b_n x^{n-2} = \sum_{k=0}^{n-2} b_{k+2}(k+2)(k+1)x^k$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g''(x) + ag'(x) + bg(x) = b_n x^n + (ab_n n + bb_{n-1})x^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \left(b_{k+2}(k+2)(k+1) + ab_{k+1}(k+1) + bb_k\right) x^k$$

Comme on veut que cette somme vaille $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, il suffit de prendre $b_n = a_n$ puis de choisir b_{n-1} tel que $ab_n n + bb_{n-1} = a_{n-1}$ ce qui est toujours possible, il suffit de résoudre cette équation dont (b_{n-1} est l'inconnue, et cette équation a bien une solution car $b \neq 0$). Ensuite on cherche b_{n-2} telle que $b_n n(n-1) + ab_{n-1}(n-1) + bb_k = a_{n-2}$ (ce qui est possible car $b \neq 0$), en remontant les inconnues, si b_{k+2} et b_{k+1} sont connues, on trouve la valeur de b_k en résolvant $b_{k+2}(k+2)(k+1) + ab_{k+1}(k+1) + bb_k = a_k$. On trouve ainsi tous les b_k et donc une fonction $g\colon x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} b_k x^k$ soit solution.

- Supposons que 0 soit racine simple de l'équation caractéristique. Notons r l'autre racine, alors $b = 0 \times r = 0$ et $-a = r + 0$ donc $a \neq 0$. On pose $g\colon x \mapsto x \sum\limits_{k=0}^{n} b_k x^k$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^{k+1}$$
$$g'(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (k+1) x^k$$
$$g''(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k (k+1) k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1}(k+2)x^k$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g''(x) + ag'(x) = ab_n(n+1)x^n + \sum_{k=0}^{n-1} \left(ab_k(k+1) + b_{k+1}(k+2)\right) x^k$$

Comme on veut que cette somme vaille $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, il suffit de prendre b_n tel que $ab_n(n+1) = a_n$ ce qui est possible car $a \neq 0$. Ensuite, si b_{k+1} est connu, il suffit de résoudre $ab_k(k+1) + b_{k+1}(k+2) = a_k$ pour trouver la valeur de b_k On trouve ainsi tous les b_k et donc une fonction $g\colon x \mapsto x \sum\limits_{k=0}^{n} b_k x^k$ soit solution.

- Si $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $a_k \in \mathbb{K}$ et que 0 est racine double de l'équation caractéristique, alors $0 + 0 = -a$ et $0 \times 0 = b$, ainsi l'équation différentielle est $y'' = f$. Posons

$$g\colon x \mapsto x^2 \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(k+2)(k+1)} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k x^{k+2}}{(k+2)(k+1)}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, $g''(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k = f(x)$, ainsi, g est une solution particulière de l'équation différientille. ∎

Exemples 14. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{2}e^x$
2. $y'' - 2y' + y = \cos(2t)$
3. $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 4$
4. $y'' + 9y = 8\mathrm{e}^{3x} - \cos(3x)$

Théorème n° 7 : existence et unicité de la solution au problème de Cauchy *(admis)*

Soit $(a, b, y_0, y_1, x_0, f) \in \mathbb{K}^4 \times I \times \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})$. Le problème de Cauchy : $y'' + ay' + by = f(x)$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ admet unique solution sur I.