Chapitre 4

Primitives et équations différentielles

Dans ce chapitre, nous allons revoir la définition et le calculs des primitives d'une fonction continue. Puis nous verrons la résolution d'équation différentielle.

Table des matières

Dans ce chapitre, on considère $\mathbb{K}$ qui vaut $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I un intervalle.

1 Dérivées et intégrales

Dans ce chapitre, on admet que pour $f\colon [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$, une fonction continue sur $[\,a\,;b\,]$ on peut lui associer un nombre qui représente l'aire algébrique sous la courbe, noté $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ vérifiant les propriétés suivantes :

Proposition n° 1 : propriétés de l'intégrale des fonctions continues sur un segment

Pour tout $(f,g) \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,],\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes :

1. Linéarité : $$\int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$$
2. Positivité : si $f \geqslant 0$ alors $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$
3. Croissance : si $f \leqslant g$ alors $$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$$
4. Chasles : pour $c \in I$ on a $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(u)\,\mathrm{d}u$$

Remarque 1. Si $f\colon I \to \mathbb{C}$ est continue (cela veut dire que $x \mapsto \mathrm{Re}(f(x))$ et $x \mapsto \mathrm{Im}(f(x))$ sont continues sur I), alors on définit l'intégrale de f par :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{Re}(f(x)) + \mathrm{i}\mathrm{Im}(f(x))\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{Re}(f(x))\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_a^b \mathrm{Im}(f(x))\mathrm{d}x \quad \text{ainsi} \quad \left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{Re}\left(\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) & = & \displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}(f(x))\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{Im}\left(\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) & = & \displaystyle\int_a^b \mathrm{Im}(f(x))\,\mathrm{d}x \end{array}\right.$$

Alors, la linéarité et la relation de Chasles sont encore vraies avec des fonctions à valeurs complexes.

Remarque 2. Si $f\colon I \to \mathbb{C}$, si $\mathrm{Re}(f)\colon x \mapsto \mathrm{Re}(f(x))$ et $\mathrm{Im}(f)\colon x \mapsto \mathrm{Im}(f(x))$ sont dérivables sur I, alors on dit que f est dérivable sur I et on pose pour tout $x \in I$, $f'(x) = \mathrm{Re}(f)'(x) + \mathrm{i}\mathrm{Im}(f)'(x)$.

Exemple 1. L'application $f\colon x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$.
De manière générale, si $u\colon I \to \mathbb{C}$ est dérivable, alors $x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ est dérivable de dérivée $x \mapsto u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.

Démonstration de l'exemple 1 :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$, or cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -\sin(x) + \mathrm{i}\cos(x) = \mathrm{i}(\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$.
- Posons $g\colon x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$, alors, pour tout $x \in I$, $g(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(u(x)) + \mathrm{i}\mathrm{Im}(u(x))} = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(u(x))}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(u(x))} = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(u(x))}\left(\cos(\mathrm{Im}(u(x))) + \mathrm{i}\sin(\mathrm{Im}(u(x)))\right)$.
Or, $x \mapsto \mathrm{Re}(u(x))$ est dérivable par hypothèse tout comme exponentielle, par composée, $x \mapsto \exp(\mathrm{Re}(u(x))$ est dérivable. De même, $x \mapsto \cos(\mathrm{Im}(u(x)))$ et $x \mapsto \sin(\mathrm{Im}(u(x)))$ sont dérivables, donc $x \mapsto \cos(\mathrm{Im}(u(x))) + \mathrm{i}\sin(\mathrm{Im}(u(x))$ est dérivable, par produit, g est dérivable sur I et

$$\begin{array}{rcl} g'(x) & = & \mathrm{Re}(u)'(x)\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(u(x))}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(u(x))} + \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(u(x))}\left(-\mathrm{i}\mathrm{Im}(u)'(x)\sin(\mathrm{Im}(u(x))) + \mathrm{Im}(u)'(x)\cos(\mathrm{Im}(u(x)))\right) \\ & = & \mathrm{Re}(u)'(x)\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(u(x))}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(u(x))} + \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(u(x))}\mathrm{Im}(u)'(x)\left(\cos(\mathrm{Im}(u(x))) + \mathrm{i}\sin(\mathrm{Im}(u(x)))\right) \\ & = & \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(u(x))}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(u(x))}\left(\mathrm{Re}(u)'(x) + \mathrm{i}\mathrm{Im}(u)'(x)\right) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} \end{array}$$

2 Calcul de primitives

2.1 Théorème fondamental de l'analyse et conséquences

Définition d'une primitive

Soit $f\colon I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On appelle primitive de f toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Exemple 2. Si $f(x) = x^3$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors une primitive de f est $x \mapsto$

Théorème n° 1 : fondamental de l'analyse *(admis)*

Soient $x_0 \in I$ et $f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{C})$. Posons, pour $x \in I$, $G(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. G est une primitive de f qui s'annule en x_0.
2. Les primitives de f sont exactement les fonctions de la forme $G + c$ où $c \in \mathbb{R}$.
3. La fonction G est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en x_0.

Attention il n'y a pas unicité des primitives

On dit donc «une primitive de f» et non «la primitive de f». Les primitives diffèrent toutes d'une constante.

Remarque 3. Pour une fonction f continue, on note $\displaystyle\int^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ pour dire une primitive «générique» de f.

Exemple 3. Pour $\lambda \neq 0$, $\displaystyle\int^{x} \mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{\lambda x} + c$ où c est une constante. Si $\lambda = 0$, $\displaystyle\int^{x} \mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathrm{d}t = x + c$.

Théorème n° 2 : calcul d'intégrale

Soit $f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{C})$ et F une primitive de f, alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$

Démonstration du théorème n° 2 : posons $G(x) = \displaystyle\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$. Il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $G = F + c$, alors, $\left\{\begin{array}{lcl} G(a) & = & F(a) + c \\ G(b) & = & F(b) + c \end{array}\right.$.

Par différence, $F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. ■

Exemple 4. Calculer $\displaystyle\int_3^4 x^3\,\mathrm{d}x$, et $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{t + \mathrm{i}}\,\mathrm{d}t$.

2.2 Primitives usuelles

	Condition(s)	Intervalle(s)
$\int^x \lambda \,\mathrm{d}t = \lambda x + k$	$\lambda \in \mathbb{C}$	$\mathbb{R}$
$\int^x t^n \,\mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$	$n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$
$\int^x t^n \,\mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$	$n \in \mathbb{Z}_-$, $n \neq -1$	$\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$
$\int^x t^\alpha \,\mathrm{d}t = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k$	$\alpha \notin \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\int^x \frac{1}{t} \,\mathrm{d}t = \ln\lvert x\rvert + k$		$\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$
$\int^x \mathrm{e}^{\lambda t} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{\lambda x} + k$	$\lambda \in \mathbb{C}^*$	$\mathbb{R}$
$\int^x a^t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{\ln a} a^x + k$	$a > 0$ et $a \neq 1$	$\mathbb{R}$
$\int^x \cos(\omega t + \varphi) \,\mathrm{d}t = \frac{1}{\omega}\sin(\omega x + \varphi) + k$	$\omega \in \mathbb{R}^*$, $\varphi \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\int^x \sin(\omega t + \varphi) \,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\omega}\cos(\omega x + \varphi) + k$	$\omega \in \mathbb{R}^*$, $\varphi \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\int^x \tan t \,\mathrm{d}t = -\ln(\lvert\cos x\rvert) + k$		$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$
$\int^x 1 + \tan^2(t) \,\mathrm{d}t = \int^x \frac{1}{\cos^2(t)} \,\mathrm{d}t = \tan x + k$		$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$
$\int^x \frac{1}{1+t^2} \,\mathrm{d}t = \arctan(x) + k$		$\mathbb{R}$
$\int^x \frac{1}{a^2+t^2} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + k$	à $\in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$
$\int^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \,\mathrm{d}t = \arcsin(x) + k$		$]-1\,;1[$
$\int^x \mathrm{ch}(\omega t) \,\mathrm{d}t = \frac{1}{\omega}\mathrm{sh}\omega x + k$	$\omega \in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$
$\int^x \mathrm{sh}(\omega t) \,\mathrm{d}t = \frac{1}{\omega}\mathrm{ch}\omega x + k$	$\omega \in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$

TABLE 1 – Primitives usuelles

	Condition
$\int^x u' \times u^n = \frac{1}{n+1} u^{n+1}(x)$	$n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$, $u\colon I \to \mathbb{R}^*$ si $n \in \mathbb{Z}_-$
$\int^x u'(t) \times u(t)^\alpha \,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1}(x)$	$\alpha \notin \mathbb{Z}$, $u\colon I \to \mathbb{R}_+^*$
$\int^x \frac{u'}{u^2} = -\frac{1}{u(x)}$	$u\colon I \to \mathbb{R}^*$
$\int^x \frac{u'(t)}{\sqrt{u(t)}} \,\mathrm{d}t = 2\sqrt{u(x)}$	$u\colon I \to \mathbb{R}_+^*$
$\int^x u'\mathrm{e}^{u} = \mathrm{e}^{u(x)}$	aucune
$\int^x \frac{u'}{u} = \ln(\lvert u(x)\rvert)$	$u\colon I \to \mathbb{R}^*$
$\int^x u'(t)\sin(u(t)) \,\mathrm{d}t = -\cos(u(x))$	aucune
$\int^x u' \cos u = \sin(u(x))$	aucune

TABLE 2 – Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors on peut obtenir des primitives usuelles grâce à la dérivation de fonctions composées.

Exemple 5. Calculer $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x$ puis $\displaystyle\int^x \mathrm{e}^{2t}\cos(3t)\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int^x \cos^3(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$.

Péril imminent : gare aux fausses formules de primitives

Si on a des primitives de u et de v, en général, on ne peut en déduire des primitives de uv, u/v, $u\circ v$, ou de u^α.

2.3 Calculs des intégrales de $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$

Comment calculer des intégrales du type $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}$ avec $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ et $a\neq 0$?

On calcule le nombre de racines réelles de l'équation du second degré, il y a plusieurs cas :

1. S'il y a deux racines réelles distinctes x_1 et x_2, alors il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tel que
$$\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{x_1,x_2\}\qquad \frac{1}{ax^2+bx+c}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}$$
2. S'il y a une racine double x_0, alors $\displaystyle\frac{1}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a(x-x_0)^2}$.
3. S'il n'y a pas de racines réelles, utiliser la forme canonique car $x\mapsto \displaystyle\frac{1}{\beta}\arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)$ est une primitive de $x\mapsto \displaystyle\frac{1}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$.

Exemple 6. Déterminer des primitives de $x\mapsto \dfrac{1}{x^2-5x+6}$, $x\mapsto\dfrac{1}{x^2+4x+4}$, $x\mapsto\dfrac{1}{x^2+2x+10}$ et de $x\mapsto\dfrac{4x+3}{x^2-5x+6}$, préciser les intervalles.

Exemple 7. Calculer $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

2.4 Calculs d'intégrales par intégrations par parties

Théorème n° 3 : intégration par parties

Soit $(u,v)\in\mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})^2$, alors :
$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Exemple 8. Calculer $\displaystyle\int_1^2 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^2 x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Exemple 9. Calculer une primitive de ln et de arctan.

Remarque 4. Les IPP sont souvent utiles, lorsque la dérivée d'une fonction est plus «simple» que la fonction elle-même.

2.5 Changement de variable

Théorème n° 4 : de changement de variable

Soient $\varphi\in\mathscr{C}^1([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ et $f\in\mathscr{C}^0(\varphi([\,a\,;b\,]),\mathbb{R})$, alors
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration du théorème n° 4 :

- Comme f est continue sur $\varphi([\,a\,;b\,])$, f admet au moins une primitive, notée F. Alors, $\displaystyle\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$
- Remarquons que, par composée, $F\circ\varphi$ est dérivable et $(F\circ\varphi)' = \varphi' \times (F'\circ\varphi) = \varphi' \times (f\circ\varphi)$. Ainsi, $F\circ\varphi$ est une primitive de $(f\circ\varphi)\times\varphi'$, ainsi, $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = (F\circ\varphi)(b) - (F\circ\varphi)(a)$.

Ainsi, les deux intégrales sont égales. ■

Comment effectuer un changement de variable ?

Dans une intégrale à calculer dont la variable est t. Poser une nouvelle variable x en fonction de t. Il faut ne pas oublier chacune de ces trois étapes :

- Dans l'intégrande, remplacer les t par leur valeur qui dépend de x. Attention, soit la variable est t et dans ce cas-là, il n'y a pas de x, soit la variable est x et dans ce cas-là il n'y a pas de t
- Changer les bornes : si t vaut une des bornes, calculer la nouvelle borne correspondante en x (le faire pour les deux bornes).
- Enfin, si $x = \varphi(t)$, par dérivation, $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, vous permet de remplacer $\mathrm{d}t$ par sa valeur en $\mathrm{d}x$.

Exemple 10.

1. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}\,\mathrm{d}t$
2. Calculer $\displaystyle\int_1^4 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
3. Calculer une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}+1}$
4. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\sin^2(t)}{\cos(t)}\,\mathrm{d}t$
5. Calculer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)^2+9}$.

Démonstration de l'exemple 10 :

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{2\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{\,t}+\mathrm{e}^{\,-t}}$, on pose $x = \mathrm{e}^{\,t}$, alors $\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\,t}\,\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}t$, donc $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$, ainsi
$$\int_1^2 \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{\mathrm{e}^{\,1}}^{\mathrm{e}^{\,2}} \frac{2}{x+x^{-1}}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_{\mathrm{e}^{\,1}}^{\mathrm{e}^{\,2}} \frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[2\arctan(x)\right]_{\mathrm{e}^{\,1}}^{\mathrm{e}^{\,2}} = 2\arctan(\mathrm{e}^{\,2}) - 2\arctan(\mathrm{e}^{\,1})$$
2. On pose $t = \sqrt{x}$, alors $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2t}\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$, ainsi :
$$\int_1^4 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \mathrm{e}^{\,t}2t\,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^{\,t}2t\right]_1^2 - \int_1^2 \mathrm{e}^{\,t}2\,\mathrm{d}t = 4\mathrm{e}^{\,2} - 2\mathrm{e}^{\,1} - \left[2\mathrm{e}^{\,t}\right]_1^2 = 2\mathrm{e}^{\,2}$$
3. On cherche à calculer $\displaystyle\int^t \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+1}$. On pose $u = \sqrt{x}$, $\mathrm{d}u = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2u}\,\mathrm{d}x$, alors $\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$, alors
$$\int^t \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+1} = \int^{\sqrt{t}} \frac{2u\,\mathrm{d}u}{u+1} = \frac{2u+2-2}{u+1}\,\mathrm{d}u = \int^{\sqrt{t}} \frac{2u+2}{u+1} - \frac{2}{u+1}\,\mathrm{d}u = \left[2u - 2\ln(|u+1|)\right]^{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} - 2\ln(\sqrt{t}+1)$$
Ainsi, $t \mapsto 2\sqrt{t} - 2\ln(\sqrt{t}+1)$ est une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}+1}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. On pose $u = \sin(t)$, alors $\mathrm{d}u = \cos(t)\,\mathrm{d}t$, soit $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}u}{\cos(t)}$, donc $\dfrac{\mathrm{d}t}{\cos(t)} = \dfrac{\mathrm{d}u}{\cos^2(t)} = \dfrac{\mathrm{d}u}{1-\sin^2(t)} = \dfrac{\mathrm{d}u}{1-u^2}$, ainsi
$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2(t)}{\cos(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} u^2\frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{u^2-1+1}{1-u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} -1 + \frac{1}{1-u^2}\,\mathrm{d}u$$
Or, il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $u\in\mathbb{R}\backslash\{1,-1\}$,
$$\frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{(1-u)(1+u)} = \frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u}$$
En multipliant par $1-u$ et en faisant $u\to 1$, on trouve $A = \dfrac{1}{2}$, en multipliant par $1+u$ et en faisant $u\to -1$, on trouve $B = \dfrac{1}{2}$, ainsi, $\dfrac{1}{1-u^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-u} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+u}$, donc
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2(t)}{\cos(t)}\,\mathrm{d}t &= \left[-u - \frac{1}{2}\ln(|1-u|) + \frac{1}{2}\ln(1+u)\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\ln(1-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{1}{2}\ln(1+\frac{\sqrt{3}}{2})\\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(2+\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}\right) = \ln(2+\sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

5. On cherche à calculer $\int^x \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2+9} = \int^x \frac{1}{9} \times \frac{\mathrm{d}t}{1+\left(\frac{t+1}{3}\right)^2}$. On pose $u = \frac{t+1}{3}$, alors $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{3}$, donc $\mathrm{d}t = 3\,\mathrm{d}u$, ainsi

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2+9} = \int^{\frac{x+1}{3}} \frac{3\,\mathrm{d}u}{9(1+u^2)} = \left[\frac{1}{3}\arctan(u)\right]^{\frac{x+1}{3}} = \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x+1}{3}\right)$$

Ainsi, $x \mapsto \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x+1}{3}\right)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2+9}$

3 Équation différentielle linéaire du premier ordre

3.1 Définition

On se fixe I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

Définition d'une équation différentielle linéaire du premier ordre

Soit $(a,b) \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{K})^2$. On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre** l'équation d'inconnue la fonction y : $y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \quad (E)$

Si f est une fonction dérivable sur I telle que, pour tout $x \in I$, $f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$, on dit que f est une solution de l'équation différentielle (E). On note souvent S_E l'ensemble des solutions de (E).

Exemple 11. L'équation $y' + 2xy = \mathrm{e}^x$ est une équation différentielle linéaire du première ordre.

Remarque 5. $xy' + 2y = \mathrm{e}^x$ n'est pas *vraiment* une équation différentielle linéaire du premier ordre à cause du terme xy' (on dit que c'est une équation différentielle non normalisée). Pour se ramener à une équation différentielle linéaire, on divise par x sur un intervalle où x ne s'annule pas. Il faudra donc travailler sur $\mathbb{R}_+^*$, puis faire le même travail sur $\mathbb{R}_-^*$. En effet, $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle.

Définition de l'équation homogène

Soit une EDL du premier ordre $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$. L'**équation homogène** associée est $y'(x) + a(x)y(x) = 0$.

3.2 Résolution des équations différentielles linéaire du premier ordre

Proposition n° 2 : résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre homogène

Soit $y'(x) + a(x)y(x) = 0$ avec $a \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{K})$ et A une primitive de a sur I. Les solutions de de cette EDL homogène sont exactement les fonctions de la forme $x \mapsto C\mathrm{e}^{-A(x)}$ où $C \in \mathbb{K}$ $\quad S_H = \{x \mapsto C\mathrm{e}^{-A(x)} \text{ avec } C \in \mathbb{K}\}$.

Démonstration de la proposition n° 2 : Posons $f\colon x \mapsto C\mathrm{e}^{-A(x)}$ où $C \in \mathbb{R}$ et montrons que f est solution. Comme A et exp sont dérivables, par composition, f est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) + a(x)f(x) = -CA'(x)\mathrm{e}^{-A(x)} + a(x)C\mathrm{e}^{-A(x)} = -Ca(x)\mathrm{e}^{-A(x)} + a(x)C\mathrm{e}^{-A(x)} = 0$$

Ainsi, f est solution de l'équation.

Réciproquement, soit f une solution de l'équation. Posons $g\colon x \mapsto f(x)\mathrm{e}^{A(x)}$, g est dérivable par produit et pour tout $x \in I$:

$$g'(x) = f'(x)\mathrm{e}^{A(x)} + f(x)A'(x)\mathrm{e}^{A(x)} = (-a(x)f(x))\mathrm{e}^{A(x)} + f(x)a(x)\mathrm{e}^{A(x)} = 0$$

Ainsi, la dérivée de g est nulle sur l'intervalle I. Ceci montre que g est constante, notons C la constante : pour tout $x \in I$, $f(x)\mathrm{e}^{A(x)} = C$. Par conséquent, $f\colon x \mapsto C\mathrm{e}^{-A(x)}$. ■

Exemple 12. Résoudre sur $\mathbb{R}$, $y' - y = 0$, $y' + xy = 0$ puis $y' - \frac{y}{1+x^2} = 0$.

Remarque 6. Si a est une constante, les solutions de $y' + ay = 0$ sont de la forme $x \mapsto C\mathrm{e}^{-ax}$ avec $C \in \mathbb{K}$.

Proposition n° 3 : structure des solutions à partir d'une solution particulière

Considérons l'EDL : $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$ (E). Supposons que l'on ait une solution particulière notée y_P. Alors les solutions de (E) sont exactement les fonctions de la forme $y_P + y_H$ où $y_H \in S_H$: $S_E = \{y_P + y_H \mid y_H \in S_H\}$.

Proposition n° 4 : variation de la constante

Considérons l'EDL : $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$. Il existe une solution particulière $y_P : x \mapsto C(x)e^{-A(x)}$ où C est une fonction dérivable sur I.

Démonstration de la proposition n° 4 : Soit C une fonction dérivable sur I. Posons $y_P : x \mapsto C(x)e^{-A(x)}$, par produit de fonctions dérivables, y_P est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$y_P{}'(x) + a(x)y_P = C'(x)e^{-A(x)} + C(x)(-A'(x))e^{-A(x)} + a(x)C(x)e^{-A(x)} = C'(x)e^{-A(x)}$$

Ainsi, y_P est une solution particulière ssi pour tout x, $C'(x) = b(x)e^{A(x)}$. Ainsi, fixons C une primitive de $x \mapsto b(x)e^{A(x)}$ (existe car $b \times e^{A}$ est une fonction continue sur I). $y_P : x \mapsto C(x)e^{-A(x)}$ est une solution particulière. ■

Exemple 13. Résoudre $y' + \dfrac{1}{x}y = x^3$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition n° 5 : principe de superposition

Soient deux EDL : $y' + a(x)y(x) = b_1(x)$ (E_1) et $y' + a(x)y(x) = b_2(x)$ (E_2). Si y_1 (resp. y_2) est une solution de (E_1) (resp. de (E_2)) et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors $\lambda y_1 + \mu y_2$ est une solution particulière de $y' + a(x)y(x) = \lambda b_1(x) + \mu b_2(x)$.

Théorème n° 5 : problème de Cauchy

Soient $(a, b) \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})^2$ et $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$, il existe une unique solution sur I du problème de Cauchy : $\begin{cases} y' + a(x)y & = & b(x) \\ y(x_0) & = & y_0 \end{cases}$.

Exemple 14. Résoudre $y' + \dfrac{1}{x}y = x^3$ sur $\mathbb{R}_+^*$. avec la condition $y(1) = 5$.

4 Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

Définition d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

Soit $a, b \in \mathbb{K}$ et $g \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})$. On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants** l'équation :

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = g(x) \quad (E)$$

Une **solution de cette équation différentielle** est une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ deux fois dérivable telle que, pour tout $x \in I$, $f''(x) + af'(x) + bf(x) = g(x)$. **L'équation homogène associée** à cette EDL est $y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$ (H).

Exemple 15. L'équation différentielle $y''(x) + 2y'(x) + 4y(x) = e^{x}$ est linéaire du second ordre à coefficients constants.

Définition de l'équation caractéristique associée

Soit $y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$ (H) une EDL homogène du second ordre à coefficients constants. L'équation du second degré $r^2 + ar + b = 0$ est appelée **équation caractéristique** associée à (H).

Lemme 1. Soit $y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$ (H) une EDL homogène avec $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ est solution de (H) ssi λ est racine de l'équation caractéristique.

Résolution dans $\mathbb{K}$ d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants

Soit $y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$ (H) avec $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $\Delta = a^2 - 4b$ le discriminant de l'équation caractéristique.

1. Si l'équation caractéristique admet deux racines dans $\mathbb{K}$ distinctes r_1 et r_2 et
$$S_H = \left\{x \mapsto C_1\mathrm{e}^{r_1 x} + C_2\mathrm{e}^{r_2 x} \mid (C_1, C_2) \in \mathbb{K}^2\right\}$$
2. Si l'équation caractéristique admet une racine double r_1 et
$$S_H = \left\{x \mapsto (C_1 x + C_2)\mathrm{e}^{r_1 x} \mid (C_1, C_2) \in \mathbb{K}^2\right\}$$
3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$, alors il y a deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $r_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta$ et
$$S_H = \left\{x \mapsto (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))\,\mathrm{e}^{\alpha x} \mid (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Démonstration de la résolution dans $\mathbb{K}$: Notons r_1 et r_2 les deux solutions de l'équation caractéristique (éventuellement égales ou éventuellement complexes). Remarquons alors que $r_1 + r_2 = -a$ ainsi, $2r_1 + a = 2r_1 - r_1 - r_2 = r_1 - r_2$. Soit $y\colon I \to \mathbb{K}$ une fonction deux fois dérivable. Posons $u\colon x \mapsto \mathrm{e}^{-r_1 x}y(x)$, alors :

- $y\colon x \mapsto \mathrm{e}^{r_1 x}u(x)$,
- $y'\colon x \mapsto \mathrm{e}^{r_1 x}(r_1 u(x) + u'(x))$
- $y''\colon x \mapsto \mathrm{e}^{r_1 x}({r_1}^2 u(x) + 2r_1 u'(x) + u''(x))$.

Alors :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} \qquad y''(x) + ay'(x) + by(x) &= \mathrm{e}^{r_1 x}\left[\left({r_1}^2 u(x) + 2r_1 u'(x) + u''(x)\right) + a\left(\mathrm{e}^{r_1 x}(r_1 u(x) + u'(x))\right) + bu(x)\right]\\ &= \mathrm{e}^{r_1 x}\left(u(x)({r_1}^2 + ar_1 + b) + u'(x)(2r_1 + a) + u''(x)\right) = u'(x)(r_1 - r_2) + u''(x)\end{aligned}$$

Ceci montre que y est solution de (H) ssi $u'(r_1 - r_2) + u'' = 0$. Distinguons les cas :

1. Cas où il y a deux racines distinctes dans $\mathbb{K}$ alors y est solution de (H) ssi $u'\colon x \mapsto C\mathrm{e}^{(r_2 - r_1)x}$ avec $C \in \mathbb{K}$ ssi $u\colon x \mapsto C_2\mathrm{e}^{(r_2 - r_1)x} + C_1$ avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{K}^2$ ssi $y\colon x \mapsto C_2\mathrm{e}^{r_2 x} + C_1\mathrm{e}^{r_1 x}$
2. Cas où il y a une racine double dans $\mathbb{K}$ Alors $r_1 - r_2 = 0$, ainsi y est solution de (H) ssi $u''\colon x \mapsto 0$ ssi $u\colon x \mapsto C_1 x + C_2$ avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{K}^2$ ssi $y\colon x \mapsto (C_1 x + C_2)\mathrm{e}^{r_1 x}$
3. Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ avec $\Delta < 0$. Si y est une solution réelle, alors y est une solution complexe, en particulier, en utilisant le cas 1 il existe $(C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y\colon x \mapsto C_1\mathrm{e}^{r_1 x} + C_2\mathrm{e}^{r_2 x}$. Avec $r_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $r_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta$, donc en remplaçant $\mathrm{e}^{r_1 x}$ par $\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos(\beta x) + \mathrm{i}\sin(\beta x)$ et $\mathrm{e}^{r_2 x}$ par $\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos(\beta x) - \mathrm{i}\sin(\beta x)$, on obtient que $y\colon x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$ avec $(A, B) \in \mathbb{C}^2$. Seulement $y(0) = A \in \mathbb{R}$ et $y(\pi/(\beta 2)) = \mathrm{e}^{\alpha\pi/2\beta}B \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$, ainsi $y\colon x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
   Réciproquement si $y\colon x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$, alors y est bien une fonction à valeurs réelles et en remplaçant cos et sin par les formules d'Euler, on obtient que $y\colon x \mapsto C_1\mathrm{e}^{r_1 x} + C_2\mathrm{e}^{r_2 x}$ avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$ donc que y est solution de l'équation en appliquant le point 1 au cas complexe.

Exemple 16. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 4y' + 4y = 0$
2. $y'' - 3y + 9y = 0$
3. $y'' + 5y' + 4y = 0$

Exemple : cas particulier des équations de la forme $y'' + {\omega_0}^2 y = 0$ où $\omega_0 > 0$

Une connaissance parfaite des solutions de cette équation est nécessaire car apparaît souvent en physique/SI.

Proposition n° 6 : structure de l'ensemble des solutions

Soit $y'' + ay' + by = f(x)$ (E) une EQDF linéaire d'ordre 2 à coefficients constants définie sur I.
Si y_P est une solution particulière de (E) alors les solutions de (E) sont exactement les fonctions de la forme :

$$x \mapsto y_H(x) + y_P(x)$$

avec y_H solution de l'équation homogène associée (H). Ainsi $S_E = \{y = y_H + y_P \mid y_H \in S_H\}$.

Remarque 7. Pour un second membre quelconque on ne sait pas résoudre ce type d'équation différentielle sauf dans certains cas particuliers que nous allons voir.

Proposition n° 7 : principe de superposition
Considérons $y'' + ay' + by = f$ (E_1) et $y'' + ay' + by = g$ (E_2). Si y_1 (resp. y_2) est solution de (E_1) (resp. (E_2)). Pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda y_1 + \mu y_2$ est solution de $y'' + ya' + by = \lambda f + \mu g$.

Proposition n° 8 : second membre du type $x \mapsto A\mathrm{e}^{\omega x}$
Soit $y'' + ay' + by = A\mathrm{e}^{\omega x}$ avec $a, b \in \mathbb{C}$ et $A, \omega \in \mathbb{C}$.

1. Si ω n'est pas une racine de l'équation caractéristique, alors il existe une solution de la forme $y_P(x) = B\mathrm{e}^{\omega x}$.
2. Si ω est racine simple de l'équation caractéristique, alors il existe une solution de la forme $y_P(x) = Bx\mathrm{e}^{\omega x}$.
3. Si ω est racine double de l'équation caractéristique, alors il existe une solution de la forme $y_P(x) = Bx^2\mathrm{e}^{\omega x}$.

Exemple 17. Résoudre l'équation $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{2}e^x$.

Proposition n° 9 : second membre du type $x \mapsto A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$
Soit $y'' + ay' + by = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$ avec $a, b, A, B, \omega \in \mathbb{R}$.

1. Si $\mathrm{i}\omega$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique, alors il existe une solution de la forme $y_P(x) = C\cos(\omega x) + D\sin(\omega x)$.
2. Si $\mathrm{i}\omega$ est une racine simple de l'équation caractéristique, alors il existe une solution de la forme $y_P(x) = x(C\cos(\omega x) + D\sin(\omega x))$.
3. Si $\mathrm{i}\omega$ est une racine double de l'équation caractéristique, alors il existe une solution de la forme $y_P(x) = x^2(C\cos(\omega x) + D\sin(\omega x))$.

Exemple 18. Résoudre l'équation $y'' - 2y' + y = \cos(2t)$.

Proposition n° 10 : second membre du type $x \mapsto P(x)$
Soit $y'' + ay' + by = P(x)$ avec a, b dans $\mathbb{K}$ et P un polynôme de degré n.

1. Si 0 n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors il existe une solution de la forme $y_p(x) = Q(x)$ où $d^\circ Q = n$.
2. Si 0 est racine simple de l'équation caractéristique, alors il existe une solution de la forme $y_p(x) = xQ(x)$ où $d^\circ Q = n$.
3. Si 0 est racine double de l'équation caractéristique, alors il existe une solution de la forme $y_p(x) = x^2Q(x)$ où $d^\circ Q = n$.

Exemple 19. Résoudre $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 6x + 4$

Théorème n° 6 : problème de Cauchy *(admis)*
Soit $a, b, y_0, y_1 \in \mathbb{K}$, $x_0 \in I$ et $f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})$. Il existe une unique fonction solution sur I au problème de Cauchy
$y'' + ay' + by = f(x) \quad \text{et} \quad y(x_0) = y_0 \quad \text{et} \quad y'(x_0) = y_1$