Chapitre 7

Nombres réels et suites numériques

Dans ce chapitre après avoir étudié les nombres réels, nous allons étudier les suites numériques. Nous donnerons des définitions précises de la limite d'une suite et cela nous permettra de démontrer les théorèmes sur les suites de façon rigoureuse.

Table des matières

1 Nombres réels

1.1 Inégalités dans $\mathbb{R}$

Proposition n° 1 : compatibilité des inégalités avec les opérations

On rappelle que les inégalités dans $\mathbb{R}$ sont compatibles avec les opérations, pour tout $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$:

1. $a \leqslant b$ et $c \leqslant d \Longrightarrow a + c \leqslant b + d$
2. $c \geqslant 0$ et $a \leqslant b \Longrightarrow ac \leqslant bc$: $x \mapsto cx$ est croissante
3. $c \leqslant 0$ et $a \leqslant b \Longrightarrow bc \leqslant ac$: $x \mapsto cx$ décroît
4. $0 < a \leqslant b \Longrightarrow \dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$: $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ décroît sur $\mathbb{R}_+^*$
5. $a \leqslant b < 0 \Longrightarrow \dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$: $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ décroît sur $\mathbb{R}_-^*$
6. Si $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d$, alors $ac \leqslant bd$

1.2 Majorant/minorant/maximum/minimum/borne supérieure/borne inférieure

Définition d'un majorant

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- On dit que $M \in \mathbb{R}$ est **un majorant** de A si : $\forall a \in A \quad a \leqslant M$
- On dit que $m \in \mathbb{R}$ est **un minorant** de A si : $\forall a \in A \quad m \leqslant a$
- On dit que A est **majorée** si elle a un majorant. C'est-à-dire si : $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall a \in A \quad a \leqslant M$
- On dit que A est **bornée** si elle est à la fois minorée et majorée :

$$A \text{ bornée} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall a \in A \quad m \leqslant a \leqslant M$$

Exemple 1. L'intervalle $[\,0\,;1\,[$ est
L'intervalle $]\,0\,;1\,[$ est
L'intervalle $\mathbb{R}_+$ est
L'ensemble $A = \left\{ \dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ est

Attention il n'y a pas unicité du majorant/minorant

On dit donc «*un majorant*», «*un minorant*» et non «*le majorant*».

Définition d'un maximum/minimum

Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $(M, m) \in \mathbb{R}^2$.

- On dit que M est **le maximum** (ou le plus grand élément) de A si $M \in A$ et M est un majorant de A. On note $M = \max(A)$.
- On dit que m est **le minimum** (ou le plus petit élément) de A si $m \in A$ et m est un minorant de A. On note $m = \min(A)$.
- Un **extremum** de A est le maximum ou le minimum de A.

Remarque 1. Si le maximum/minimum de A existe alors il est unique.

Exemple 2. Si $A \subset \mathbb{R}$ avec A non vide et ayant un nombre fini d'éléments, alors A admet un maximum et un minimum.

Définition d'une borne supérieure/inférieure

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.
On appelle **borne supérieure de** A le plus petit des majorants de A (s'il existe). On le note $\sup A$.
On appelle **borne inférieure de** A le plus grand des minorants de A (s'il existe). On le note $\inf A$.

Remarque 2. Si la borne supérieure/inférieure existe alors elle est unique.

Théorème n° 1 : de la borne supérieure/inférieure *(admis)*

- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
- Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Remarque 3. Une borne supérieure n'est pas nécessairement un maximum. Une borne inférieure n'est pas nécessairement un minimum. Si A n'est pas majorée, alors, par convention $\sup A = +\infty$. Si A n'est pas minorée, par convention, $\inf A = -\infty$.

Exemple 3. Compléter le tableau ci-dessous. Démontrer rigoureusement la ligne $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

Ensemble E	$\min(A)$	$\inf(A)$	$\max(A)$	$\sup(A)$
$A = \{0\}$				
$A = \{0;1\}$				
$A =]0;1[$				
$A = [0;1[$				
$A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$				
$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leqslant 2\}$				
$A = [0;1[\cap \mathbb{Q}$				

Proposition n° 2 : lien entre bornes supérieur/inférieur et extrema

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Si A admet un plus grand élément alors elle admet une borne supérieure et $\sup(A) = \max(A)$.
2. Si A admet un plus petit élément alors elle admet une borne inférieure et $\inf(A) = \min(A)$.

Exemple 4. Étudier l'ensemble $A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ (bornes et extremums).

Démonstration de l'exemple 4 : Soit $a \in A$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = (-1)^n + \frac{1}{n}$. Il y a donc deux cas suivant la parité de n :

- Si n est pair, alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2p$, alors $a = 1 + \frac{1}{2p}$, alors $1 < a \leqslant 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.
- Si n est impair, alors il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2q+1$, alors $a = -1 + \frac{1}{2q+1}$, alors $-1 < a \leqslant -1 + \frac{1}{2}$.

On remarque ainsi que $\frac{3}{2}$ est un majorant de A. De plus, $\frac{3}{2} = (-1)^2 + \frac{1}{2} \in A$. Donc $\frac{3}{2}$ est un maximum de A et une borne supérieure de A.

De plus, -1 est un minorant de A. Comme A est non vide et minorée, on en déduit que A admet une borne inférieure. Soit m un minorant de A, alors pour tout $q \in \mathbb{N}$, $m \leqslant -1 + \frac{1}{2q+1}$, en faisant tendre q vers $+\infty$ et comme les inégalités larges sont conservées par passage à la limite (ce résultat sera démontré plus loin), on en déduit que $m \leqslant -1$. Ainsi, -1 est un minorant et est plus grand que tous les minorants de A, ainsi, $\inf(A) = -1$. Si A admettait un minimum, alors on aurait $\min(A) = \inf(A) = -1$ et donc $-1 \in A$. Ce qui est absurde, car on a montré plus haut que tous les éléments de A étaient strictement plus grands que -1. Ainsi, A n'admet pas de minimum. ∎

Proposition n° 3 : cas des parties de $\mathbb{Z}$

1. Soit A une partie de $\mathbb{Z}$ non vide, alors A admet un minimum ssi elle est minorée.
2. Soit A une partie de $\mathbb{Z}$ non vide, alors A admet un maximum ssi elle est majorée.
3. Soit A une partie de $\mathbb{N}$ non vide, alors A admet un minimum.

1.3 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition des intervalles de $\mathbb{R}$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leqslant b$. On appelle intervalles de $\mathbb{R}$ les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants :

- $[\,a\,;b\,] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ intervalle **fermé borné** ou **segment**
- $]\,a\,;b\,[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ intervalle **ouvert borné**
- $]\,a\,;b\,] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$, $[\,a\,;b\,[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$ intervalle **borné semi-ouvert ou semi-fermé**
- $[\,a\,;+\infty\,[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\}$, $]\,a\,;+\infty\,[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ intervalle **minoré et non majoré**
- $]\,-\infty\,;b\,] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}$, $]\,-\infty\,;b\,[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ intervalle **majoré et non minoré**
- $\mathbb{R}$ **non majoré, non minoré** $\varnothing$ **intervalle vide**, intervalles **ouverts** et **fermés**

Proposition n° 4 : caractérisation des intervalles

Soit I une partie de $\mathbb{R}$. Alors : $\quad I$ est un intervalle de $\mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall (x, y) \in I^2 \quad x \leqslant y \Longrightarrow [\,x\,;y\,] \subset I$

Démonstration de la proposition n° 4 :

- Si I est un intervalle, alors I est l'un des dix types d'ensembles donnés dans la définition.
  — Traitons le cas où $I =]\,a\,;+\infty\,[$ où $a \in \mathbb{R}$ Montrons qu'alors

$$\forall (x, y) \in I^2 \quad x \leqslant y \Longrightarrow [\,x\,;y\,] \subset I$$

  Soit $(x, y) \in]\,a\,;+\infty\,[$, supposons $x \leqslant y$ et montrons que $[\,x\,;y\,] \subset I$. Soit $z \in [\,x\,;y\,]$, alors $x \leqslant z \leqslant y$, mais comme $x \in I$, on a $x > a$. Donc $z \geqslant x > a$, ainsi, $z > a$ et donc $z \in I$. Ceci montre que $[\,x\,;y\,] \subset I$.
  — Traitons le cas où $I =]\,a\,;b\,]$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $a \leqslant b$. Montrons qu'alors

$$\forall (x, y) \in I^2 \quad x \leqslant y \Longrightarrow [\,x\,;y\,] \subset I$$

  Soit $(x, y) \in]\,a\,;b\,]$, supposons $x \leqslant y$ et montrons que $[\,x\,;y\,] \subset I$. Soit $z \in [\,x\,;y\,]$, alors $x \leqslant z \leqslant y$, mais comme $x \in I$, on a $x > a$. Donc $z \geqslant x > a$, ainsi, $z > a$ de plus, comme $y \in I$, $y \leqslant b$ et $z \leqslant y$ donc $z \leqslant b$ et donc $z \in]\,a\,;b\,] = I$. Ceci montre que $[\,x\,;y\,] \subset I$.
  — Les autres cas se traitent de la même façon.
- Réciproquement, supposons qu'on ait un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (x, y) \in I^2 \quad x \leqslant y \Longrightarrow [\,x\,;y\,] \subset I$$

  Remarquons que si I est vide, alors I est déjà un intervalle. Supposons donc I non vide. Il y a alors plusieurs cas : I est majoré ou non majoré, I est minoré ou non minoré. Si I est majoré (resp. minoré), comme il est non vide, il admet une borne supérieure (resp. inférieure) Cette borne supérieure (resp. inférieure) appartient à I ou n'appartient pas à I. En combinant toutes ces possibilités, on obtient neuf cas :

  cas 1 : I non majorée et non minorée. Dans ce cas, montrons que $I = \mathbb{R}$.
  Par hypothèse, $I \subset \mathbb{R}$.
  Soit $z \in \mathbb{R}$. Comme z n'est pas un majorant de $\mathbb{R}$, il existe $y \in I$ tel que $z < y$. De même, z n'est pas un minorant de $\mathbb{R}$, il existe $x \in I$, tel que $x < z$. Alors, $x \leqslant z \leqslant y$ et $z \in [\,x\,;y\,]$ avec $(x, y) \in I^2$, donc $z \in [\,x\,;y\,] \subset I$ donc $z \in I$. Donc $\mathbb{R} \subset I$.
  Par double inclusion, $I = \mathbb{R}$.

  cas 2 : I non majorée et minorée et $a = \inf(I) \in I$. Dans ce cas, montrons que $I = [\,a\,;+\infty\,[$.
  Soit $z \in I$. Comme $a = \inf(I)$ est un minorant de I, on a $a \leqslant z$, donc $z \in [\,a\,;+\infty\,[$. Ceci montre que $I \subset [\,a\,;+\infty\,[$.
  Réciproquement, soit $z \in [\,a\,;+\infty\,[$, comme z n'est pas un majorant de I, il existe $y \in I$ tel que $z < y$. De plus, $z \geqslant a$, on a alors $a \leqslant z \leqslant y$ comme $(a, y) \in I^2$, on a alors $z \in [\,a\,;y\,] \subset I$, donc $z \in I$. Ceci montre que $[\,a\,;+\infty\,[\subset I$.
  Par double inclusion, $I = [\,a\,;+\infty\,[$.

  cas 3 : I non majorée et minorée et $a = \inf(I) \notin I$. Dans ce cas, montrons que $I =]\,a\,;+\infty\,[$.
  Soit $z \in I$. Comme $a = \inf(I)$ est un minorant de I, on a $a \leqslant z$. De plus, remarquons que $z \in I$ et $a \notin I$, donc $a \neq z$, ainsi $z > a$, donc $z \in]\,a\,;+\infty\,[$. Ceci montre que $I \subset]\,a\,;+\infty\,[$.
  Réciproquement, soit $z \in]\,a\,;+\infty\,[$, comme z n'est pas un majorant de I, il existe $y \in I$ tel que $z < y$. De plus, $z > a = \inf(I)$, donc z n'est pas un minorant de I, donc il existe $x \in I$ tel que $x < z$. Alors $x \leqslant z \leqslant y$ avec $(x, y) \in I^2$, ainsi, $z \in [\,x\,;y\,] \subset I$, donc $z \in I$. Ceci montre que $]\,a\,;+\infty\,[\subset I$.
  Par double inclusion, $I =]\,a\,;+\infty\,[$.

  cas 4 : I majorée et non minorée et $b = \sup(I) \in I$. Dans ce cas, $I =]\,-\infty\,;b\,]$ (similaire au cas 2)

  cas 5 : I majorée et non minorée et $b = \sup(I) \notin I$. Dans ce cas, $I =]\,-\infty\,;b\,[$ (similaire au cas 3)

  cas 6 : I majoré et minoré avec $b = \sup(I) \in I$, $a = \inf(I) \in I$. Dans ce cas, montrons que $I = [\,a\,;b\,]$.
  Soit $z \in I$, alors $z \geqslant a$ et $z \leqslant b$, donc $a \leqslant z \leqslant b$, donc $z \in [\,a\,;b\,]$. Ainsi, $I \subset [\,a\,;b\,]$.
  Soit $z \in [\,a\,;b\,]$, alors comme a et b appartiennent à I, $z \in I$.
  Par double inclusion, $I = [\,a\,;b\,]$.

cas 7 : I majoré et minoré avec $b = \sup(I) \in I$, $a = \inf(I) \notin I$. Dans ce cas, montrons que $I =]\, a\,; b\,]$.
Soit $z \in I$, alors $z \geqslant a$ et $z \leqslant b$. Comme $z \in I$ et $a \notin I$, on a $z \neq a$, doc $z > a$. Ainsi $a < z \leqslant b$, donc $z \in]\, a\,; b\,]$. Ainsi, $I \subset]\, a\,; b\,]$.
Soit $z \in]\, a\,; b\,]$, alors $a < z \leqslant b$, comme $a = \inf(I)$, z n'est pas un minorant de I, donc il existe $x \in I$ tel que $x < z$, ainsi $x \leqslant z \leqslant b$ avec $(x, b) \in I^2$, donc $z \in [\, x\,; b\,] \subset I$, donc $z \in I$. Ainsi, $I \subset]\, a\,; b\,]$.
Par double inclusion, $I =]\, a\,; b\,]$.

cas 8 : I majoré et minoré avec $b = \sup(I) \notin I$, $a = \inf(I) \in I$. Dans ce cas, $I = [\, a\,; b\,[$ (similaire au cas 7)

cas 9 : I majoré et minoré avec $b = \sup(I) \notin I$, $a = \inf(I) \notin I$. Dans ce cas, $I =]\, a\,; b\,[$ (similaire au cas 7 et 8). ∎

Remarque 4.
- Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont donc les parties en un seul morceau.
- L'intersection d'intervalles est un intervalle et l'union de deux intervalles non disjoints est un intervalle.
- $[\, 0\,; 1\,] \cup [\, 2\,; 3\,[$ n'est pas un intervalle.
- $\mathbb{Q}$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$.

1.4 Partie entière

Définition de la partie entière

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle **partie entière** de x le plus grand entier relatif p tel que $p \leqslant x$. On la note $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$.

Exemple 5. $\lfloor e \rfloor =$ $\qquad$ $E(-\pi) =$ $\qquad$ $E(-3) =$ $\qquad$ $E(1/3) =$

Proposition n° 5 : propriétés de la partie entière

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$

1. $E(x) \leqslant x < E(x) + 1$
2. $x - 1 < E(x) \leqslant x$
3. $n \leqslant x \Longrightarrow n \leqslant E(x)$.
4. $E(x + n) = E(x) + n$
5. $n \leqslant x < n + 1 \iff n = E(x)$.
6. $x = \lfloor x \rfloor \iff x \in \mathbb{Z}$.

Démonstration de la proposition n° 5 : Notons $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant x\}$, alors A est un ensemble non vide de $\mathbb{Z}$ majoré (par x) donc admet un maximum. Ainsi, on peut poser $E(x) = \max(A)$. Ceci prouve que la partie entière est bien définie.

1. Comme x est un majorant de A, on a $E(x) = \max(A) = \sup(A) \leqslant x$. De plus, $E(x) + 1 > E(x)$, donc $E(x) + 1 \notin A$ (car les éléments de A sont majorés par $E(x)$). Ainsi, $E(x) + 1$ est un entier et $E(x) + 1 > x$. Dès lors, $E(x) \leqslant x < E(x) + 1$.
2. D'après le point précédent, on a $E(x) \leqslant x$ et $x < E(x) + 1$, donc $x - 1 < E(x)$. Ainsi, $x - 1 < E(x) \leqslant x$.
3. Si $p \in \mathbb{Z}$ et $p \leqslant x$, alors $p \in A$, ainsi $p \leqslant \max(A) = E(x)$.
4. Comme $E(x) \leqslant x$, on a $E(x)+n \leqslant x+n$, or $E(x)+n \in \mathbb{Z}$, donc $E(x)+n \leqslant E(x+n)$ (voir point précédent appliqué à $x+n$) De plus, $E(x+n) \leqslant x+n$, donc $E(x+n)-n \leqslant x$, donc $E(x+n)-n \leqslant E(x)$ (voir point précédent). Ainsi, $E(x+n) \leqslant E(x)+n$. Par double inégalité, $E(x+n) = E(x)+n$.
5. Si $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n + 1$, alors, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, si $p \leqslant n$, alors $p \leqslant x$ et donc $p \in A$, si $p \geqslant n + 1$, alors $p > x$ et $p \notin A$ donc $A =]\, -\infty\,; n\,] \cap \mathbb{Z}$ et donc $E(x) = \max(A) = n$.
6. Si $x \in \mathbb{Z}$, alors, $\lfloor x \rfloor \leqslant x$ et $x \in A$, donc $x \leqslant \max(A) = \lfloor x \rfloor$, par double inégalité, $\lfloor x \rfloor = x$. Réciproquement, si $\lfloor x \rfloor = x$, comme $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$, on a $x \in \mathbb{Z}$. ∎

2 Suites

2.1 Définition d'une suite

Définition d'une suite numérique réelle ou complexe

Une **suite numérique réelle** est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$; $u\colon \begin{cases} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \longmapsto u(n) \end{cases}$.

Une **suite numérique complexe** est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$; $u\colon \begin{cases} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C} \\ n \longmapsto u(n) \end{cases}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u(n)$ est généralement noté u_n et est appelé n-ième **terme** de la suite (ou **terme d'indice** n ou de **rang** n). La suite u est alors notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_n$. L'ensemble des suites réelles (resp. complexes) est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (resp. $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$).

Attention à ne pas confondre suite et nombre

$u = (u_n)$ est une suite, u_n est un nombre pour n donné. Tout comme, f est une fonction et $f(x)$ est un nombre.

Remarque 5. La suite (u_n) est parfois définie à partir d'un rang $n_0 \in \mathbb{N}$. Ainsi, $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie à partir de 1.

Définition des différentes façons de définir une suite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On dit que la suite $(u_n)_n$ est définie

1. **explicitement** si le terme u_n est défini en fonction de n.
2. **implicitement** si le terme u_n est défini comme l'unique réel vérifiant une certaine propriété.
3. **par récurrence** si le terme u_n est défini à partir des termes précédents de la suite u.

Exemple 6.
1. Soit la suite u définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \exp(n^2 + 1)$.
2. Soit la suite v définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est l'unique solution réelle de $x^3 + x - 1 = n$.
3. Soit la suite w définie par : $w_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 1$, $w_{n+1} = \sqrt{w_n + 2}$.

Remarque 6. L'étude d'une suite est souvent plus simple si elle est définie explicitement.

Définition des opérations sur les suites

Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

1. La somme de u et v est la suite notée $u + v$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u + v)_n = u_n + v_n$.
2. Le produit de u et v est la suite, notée $u \times v$, définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u \times v)_n = u_n \times v_n$.
3. Le produit de u par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est la suite notée, λu, définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\lambda u)_n = \lambda u_n$.
4. Si pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n \neq 0$, le quotient de u par v est la suite, notée $\dfrac{u}{v}$, définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\dfrac{u}{v}\right)_n = \dfrac{u_n}{v_n}$.

2.2 Sens de variation d'une suite

Définition de la variation d'une suite

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle. On dit que la suite u **est croissante** si : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant u_{n+1}$
On dit que la suite u est **strictement croissante** si : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < u_{n+1}$
On dit que la suite u est **décroissante** si : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leqslant u_n$
On dit que la suite u est **strictement décroissante** si : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} < u_n$

Exemple 7. Soit $u_n = f(n)$ où $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Si f est monotone sur $\mathbb{R}_+$, alors (u_n) est de même monotonie.

Exemple 8. Quel est le sens de variation de la suite (u_n) définie par $u_n = n!/n^n$?

2.3 Suites majorées, minorées et bornées

Définition d'une suite majorée/minorées/bornées

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle.

1. On dit que la suite u est **majorée** si : $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant M$
2. On dit que la suite u est **minorée** si : $\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad m \leqslant u_n$
3. La suite u est **bornée** lorsqu'elle est minorée et majorée : $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad m \leqslant u_n \leqslant M$

Proposition n° 6 : caractérisation des suites bornées

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Démonstration de la proposition n° 6 : Supposons que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ soit majorée. Alors, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$. Ceci veut dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-M \leqslant u_n \leqslant M$. Par conséquent, $(u_n)_n$ est à la fois majorée (par M) et minorée (par $-M$), elle est donc bornée.

Supposons que $(u_n)_n$ soit bornée : il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant u_n \leqslant M$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $u_n \geqslant 0$, il s'ensuit que $0 \leqslant u_n \leqslant M$. Or, la valeur absolue est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc $|u_n| \leqslant |M|$. Si $u_n \leqslant 0$, alors $m \leqslant u_n \leqslant 0$. Or, la valeur absolue est décroissante sur $\mathbb{R}_-$, donc $|u_n| \leqslant |m|$. Dans tous les cas, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant \max(|m|, |M|)$. Par conséquent, la suite $(|u_n|)_n$ est majorée. ■

Exemple 9. Montrer que la somme et le produit de suites bornées sont bornées.

Définition d'une suite stationnaire

La suite u est **stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang : $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad u_{n+1} = u_n$

2.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 1 ou 2

Remarque 7. Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on prend des suites à valeurs complexes ou réelles.

2.4.1 Suite arithmétique

Définition d'une suite arithmétique

Soit $r \in \mathbb{K}$, on dit que la suite u est **arithmétique de raison** r si : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + r$

Remarque 8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et deux entiers n et m, alors $u_n = u_m + (n-m)r$

Proposition n° 7 : somme des termes d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique et deux entiers $m \leqslant n$, alors $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} u_k = \frac{(u_m + u_n)}{2}(n-m+1)$

Démonstration de la proposition n° 7 : Notons r la raison de cette suite. Calculons le double cette somme en effectuant un changement d'indice $j = n + m - k$ dans la seconde somme :

$$\begin{aligned}
2\sum_{k=m}^{n} u_k &= \sum_{k=m}^{n} u_k + \sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{n} u_k + \sum_{j=m}^{n} u_{n+m-j} = \sum_{k=m}^{n} u_k + \sum_{k=m}^{n} u_{n+m-k} = \sum_{k=m}^{n} (u_k + u_{n+m-k}) \\
&= \sum_{k=m}^{n} ([u_m + (k-m)r] + [u_n + (m-k)r]) = \sum_{k=m}^{n} (u_m + u_n) = (u_m + u_n)(n-m+1)
\end{aligned}$$

En divisant par 2, on obtient le résultat. ■

2.4.2 Suite géométrique

Définition d'une suite géométrique

Soit $q \in \mathbb{K}$, on dit que la suite u est **géométrique de raison** q si : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n \times q$

Remarque 9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 0$ et deux entiers n et m, alors $u_n = u_m \times q^{n-m}$

Proposition n° 8 : somme de termes d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et deux entiers $n \geqslant m$ alors $\sum_{k=m}^{n} u_k = u_m \times \dfrac{1-q^{n-m+1}}{1-q}$

2.4.3 Suites arithmético-géométrique

Définition d'une suite arithmético-géométrique

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **arithmético-géométrique** si : $\exists (a,b) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = au_n + b$

Comment trouver l'expression explicite d'une suite arithmético-géométrique ? (avec $a \neq 1$)

1. Chercher le point fixe ℓ de l'équation $\ell = a\ell + b$.
2. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \ell$ est géométrique.
3. Trouver l'expression générale de v_n.
4. En déduire l'expression générale de u_n.

Exemple 10. Trouver la limite de $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 1$.

2.4.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe $(a,b) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. Pour une telle suite, l'équation $r^2 = ar + b$ est appelée **équation caractéristique**.

Théorème n° 2 : Suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{K}$

Soit $(a,b) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$. Notons $E_\mathbb{K} = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^\mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\right\}$ et Δ le discriminant de l'équation caractéristique.

1. Si l'équation caractéristique admet deux racines dans $\mathbb{K}$ r_1 et r_2 ($\Delta > 0$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta \neq 0$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) :
$$E_\mathbb{K} = \left\{(u_n)_n \in \mathbb{K}^\mathbb{N} \mid \quad \exists (A,B) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = A{r_1}^n + B{r_2}^n\right\}$$
2. Si l'équation caractéristique admet une racine double r_1 ($\Delta = 0$) :
$$E_\mathbb{K} = \left\{(u_n)_n \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \mid \quad \exists (A,B) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (An+B){r_1}^n\right\}$$
3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$, notons $r_1 = \rho e^{i\theta}$ et $r_2 = \rho e^{-i\theta}$ les deux racines complexes de l'équation caractéristique :
$$E_\mathbb{R} = \left\{(u_n)_n \in \mathbb{K}^\mathbb{N} \quad \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \rho^n \left(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)\right)\right\}$$

Si $(u_n)_n \in E_\mathbb{K}$, A et B sont uniques, on les détermine grâce à deux valeurs de la suite (en général u_0 et u_1).

Exemple 11. Expression du terme général de la suite de Fibonacci définie par $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \\ F_0 = F_1 = 1 \end{cases}$

2.5 Limite d'une suite réelle

Remarque 10. Dans cette partie, nous ne considérerons que des suites réelles.

2.5.1 Convergence et divergence

Définition de la convergence d'une suite

1. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers un réel $\ell \in \mathbb{R}$, et on note $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ (ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$) si :
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant n_0 \quad \Longrightarrow \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$
2. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** s'il existe un réel ℓ tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
3. Une suite non convergente est dite **divergente**. On dit que la suite **diverge**.

Remarque 11. Cela signifie que pour chaque $\varepsilon > 0$, tous les termes de la suite sont dans $[\,\ell - \varepsilon\,;\ell + \varepsilon\,]$ à partir d'un certain rang n_0.

Exemple 12. Soit $u_n = 1/n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Proposition n° 9 : unicité de la limite
Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors sa limite est unique.

Exemple 13. Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ alors $|u_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} |\ell|$.

Proposition n° 10 : une suite convergente est bornée
Toute suite réelle convergente est bornée.

Remarque 12. Par contraposée, on en déduit qu'une suite non bornée est divergente.
La réciproque n'est pas vraie ! Une suite bornée ne converge pas nécessairement. Comme la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n =$

Définition d'une limite infinie

1. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (ou diverge vers $+\infty$), et on note $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ si
$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant n_0 \quad \Longrightarrow \quad u_n \geqslant A$$
2. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ (ou diverge vers $-\infty$), et on note $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ si
$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant n_0 \quad \Longrightarrow u_n \quad \leqslant A$$

Remarque 13. Une suite divergente n'a pas nécessairement de limite infinie : considérer $u_n = (-1)^n n$.

Exemple 14. Soit $u_n = n$ pour $n \in \mathbb{N}$, démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

2.5.2 Opérations sur les limites

Proposition n° 11 : opérations sur les limites finies
Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles et ℓ et ℓ' deux réels.
1. Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ et $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell'$, alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell + \ell'$
2. Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ et $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell'$, alors $u_n v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell\ell'$.
3. Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda\ell$
4. Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée, alors $u_n v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Proposition n° 12 : règles opératoires sur les limites infinies

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui diverge vers $+\infty$.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite minorée alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite minorée par un réel strictement positif $u_n v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Remarque 14. On déduit des règles précédentes les tableaux ci-dessous :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n) =$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

Table 1 – Limite de $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) =$	$\ell\times\ell'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	Forme indéterminée

Table 2 – Limite de $(u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Remarque 15. La règle des signes donne le signe du produit quand la limite est infinie.

Remarque 16. Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ et $\ell > 0$ (resp $\ell < 0$), alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n > 0$ (resp. $u_n < 0$).

Démonstration de la remarque 16 :

- Si $\ell > 0$. On pose $\varepsilon = \dfrac{\ell}{2} > 0$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$ implique $-\varepsilon \leqslant u_n - \ell \leqslant \varepsilon$. En particulier, pour $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant \ell - \dfrac{\ell}{2} = \dfrac{\ell}{2} > 0$.
- Si $\ell < 0$. On pose $\varepsilon = -\dfrac{\ell}{2} > 0$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$ implique $-\varepsilon \leqslant u_n - \ell \leqslant \varepsilon$. En particulier, pour $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant \ell - \dfrac{\ell}{2} = \dfrac{\ell}{2} < 0$.

Proposition n° 13 : limite de l'inverse

Soit $(u_n)_n$ une suite ayant une limite ℓ.

1. Si $\ell \in \mathbb{R}^*$, alors $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{\ell}$.
2. Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ (ou $-\infty$) alors $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
3. Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $u_n > 0$ à partir d'un certain rang (resp. $u_n < 0$) alors $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ (resp. $-\infty$).

Remarque 17. Pour la limite du quotient $\dfrac{u_n}{v_n}$ on écrit $\dfrac{u_n}{v_n} = u_n \times \dfrac{1}{v_n}$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent toutes les deux vers 0 (ou toutes les deux vers $+\infty$), alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une forme indéterminée.

Théorème n° 3 : les inégalités larges sont conservées par passage à la limite

Soient $(m, M) \in \mathbb{R}^2$, soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ'.

1. Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \leqslant \ell'$.
2. Si $u_n \leqslant M$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \leqslant M$.
3. Si $u_n \geqslant m$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \geqslant m$.

Péril imminent : les inégalités larges passent à la limite pas les strictes

Cela ne marche pas avec des inégalités strictes. Par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n+1} > 0$ sans que $0 > 0$.

2.5.3 Théorèmes d'existence de limite

Théorème n° 4 de comparaison
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que : $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad u_n \leqslant v_n$

1. Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ alors $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.
2. Si $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$.

Remarque 18. Si l'on pense qu'une suite diverge vers $+\infty$, on essaie de la minorer par une suite qui diverge vers $+\infty$. Si l'on pense qu'une suite diverge vers $-\infty$, on essaie à la majorer par une suite qui diverge vers $-\infty$.

Exemple 15. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n\sqrt{n} + n$?

Théorème n° 5 d'encadrement
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que : $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$
Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$ alors $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.

Exemple 16. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{n}{n^2+k}$. Par encadrement, étuder la convergence de $(u_n)_n$.

Définition de l'approximation décimale

Le décimal $a_n = \dfrac{E(10^n x)}{10^n}$ est appelé **approximation décimale par défaut de x à 10^{-n} près**.
Le décimal $b_n = \dfrac{E(10^n x)+1}{10^n}$ est appelé **approximation décimale par excès de x à 10^{-n} près**.

Exemple 17. Si $x = \pi$, alors : $a_0 = \dfrac{\lfloor 10^0\pi \rfloor}{10^0} = \dfrac{3}{1} = 3$, $a_1 = \dfrac{\lfloor 10^1\pi \rfloor}{10^1} = \dfrac{31}{10} = 3.1$, $a_2 = \dfrac{\lfloor 10^2\pi \rfloor}{10^2} = \dfrac{314}{100} = 3.14$, $b_0 = a_0 + 1 = 4$, $b_1 = a_1 + 0.1 = 3.2$, $b_2 = a_2 + 0.01 = 3.15$

Théorème n° 6 : approximations décimales d'un réel
Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant x < b_n$, $(a_n, b_n) \in \mathbb{D}^2$ et $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

Remarque 19. Ainsi, la une suite de nombres rationnels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $x \in \mathbb{R}$. On dit alors que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Théorème n° 7 de convergence monotone
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle monotone.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée alors elle converge.
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et non majorée alors elle diverge vers $+\infty$.
3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée alors elle converge.
4. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et non minorée alors elle diverge vers $-\infty$.

Remarque 20. Ceci permet de prouver l'existence d'une limite finie ℓ mais pas de la trouver !

Exemple 18. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle décroissante et positive, alors d'après le théorème de convergence monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge mais pas nécessairement vers 0.

Définition des suites adjacentes

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que ces suites sont **adjacentes** si :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croît.
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît.
- $v_n - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Théorème n° 8 des suites adjacentes

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes, alors elles convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.

Exemple classique de suites adjacentes

Montrer que les suites $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\frac{1}{n!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

2.5.4 Suites extraites

Définition d'une suite extraite

Soit $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. On dit que $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite extraite/sous-suite** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque 21. Les suites extraites les plus utilisées sont les suites d'indices pairs $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et d'indices impairs $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Théorème n° 9 : si une suite admet une limite, alors toute sous-suite admet la même limite

Si $(u_n)_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Alors, $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ pour toute $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.

Remarque 22. Pour montrer qu'une suite diverge, on peut se servir de la contraposée du théorème.

Exemple 19. Montrer que $((-1)^n)_n$ diverge.

Proposition n° 14 : des suites extraites d'indices pairs et impairs

Si les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers ℓ alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.

2.6 Étude des suites récurrentes : $u_{n+1} = f(u_n)$

Dans cette partie, $f\colon I \to I$. On étudie la suite (u_n) définie par $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Définition d'un intervalle stable

On dit que l'intervalle I est **stable** par f si $f(I) \subset I$.

Remarque 23. Pour montrer qu'un intervalle est stable, on peut étudier la fonction f et le déduire de son tableau de variations ou bien directement à l'aide d'inégalités. Si I est stable par f, alors cela revient à écrire $f\colon I \to I$.

Proposition n° 15 de l'intervalle stable

Soit $f\colon I \to I$. Si $u_0 \in I$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.

Proposition n° 16 : variation de (u_n) dans le cas f croissante

Soit $f\colon I \to I$ croissante sur I et $u_0 \in I$. Si $u_1 \geqslant u_0$, alors (u_n) est croissante. Si $u_1 \leqslant u_0$, alors (u_n) est décroissante.

Remarque 24. Si f est décroissante sur I alors $g = f \circ f$ est croissante sur I et les suites extraites des termes pairs et des termes impairs sont monotones.

Théorème n° 10 du point fixe

Soit $f\colon I \to I$ et $u_0 \in I$. Si la suite (u_n), définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, converge vers $\ell \in I$ et que f est continue en ℓ alors $\ell = f(\ell)$ (on dit que ℓ est un point fixe de f).

Exemple 20. Soit $(u_n)_n$ telle que $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = {u_n}^2$. Étudier la convergence de $(u_n)_n$.

2.7 Extension aux suites complexes

On peut étendre aux suites complexes les notions des suites réelles qui n'utilisent pas la notion d'ordre sur $\mathbb{R}$ (les notions de suites croissantes, décroissantes, majorées, minorées etc. n'existent pas pour les suites complexes !). En revanche, la valeur absolue peut-être remplacée pas le module.

Définition d'une suite bornée

On dit qu'une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** s'il existe un réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$.

Définition d'une limite d'une suite complexe

On dit qu'une suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers un complexe** $\ell \in \mathbb{C}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant n_0 \quad \Longrightarrow \quad |z_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Remarque 25. $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ ssi $|z_n - \ell| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Proposition n° 17 : convergence des suites complexes en fonction des parties réelles et imaginaires

Une suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. De plus, si c'est le cas :

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(z_n) + \mathrm{i} \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(z_n)$$

Remarque 26. En résumé :

Ce qui reste valable	Ce qui n'est plus valable
Unicité de la limite	Majorant/Minorant
Une suite convergente est bornée	Monotonie
Opérations sur les limites finies	Limites infinies
Suites extraites	Passage à la limite des inégalités
Suites arithmétiques et géométriques	Théorème des gendarmes
Suites arithmético-géométriques	Théorème de la limite monotone
Suites récurrentes linéaires d'ordre 2	Suites adjacentes

Exemple des suites géométriques

Soit $z \in \mathbb{C}$, considérons la suite géométrique $(z^n)_n$ de raison z :

1. Si $|z| < 1$, alors $z^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
2. Si $|z| > 1$, alors $(z^n)_n$ est non bornée donc diverge.
3. Si $z = 1$, alors $z^n = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.
4. Si $z \in \mathbb{U}\backslash\{1\}$, alors $(z^n)_n$ est bornée et diverge.

Démonstration de l'exemple des suites géométriques :

1. Si $|z| < 1$ et $z \neq 0$, $|z^n - 0| = |z|^n = \exp(n\ln(|z|)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, donc $z^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Si $z = 0$, alors $z^n = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
2. Si $|z| > 1$, alors $|z^n| = |z|^n = \exp(n\ln(|z|)) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, donc $(z^n)_n$ n'est pas bornée donc n'est pas convergente.
3. Si $z = 1$, alors $z^n = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.
4. Si $|z| = 1$, alors $|z^n| = |z|^n = 1$, donc $(z^n)_n$ est bornée. Supposons que $z^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in \mathbb{C}$, alors par différence, $z^{n+1} - z^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Or, $|z^{n+1} - z^n| = |z^n(z-1)| = |z-1| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Donc $z = 1$. Par contraposée, si $|z| = 1$ avec $z \neq 1$, $(z^n)_n$ diverge. ■

2.8 Relations de comparaison

Dans cette partie, quand on fera le quotient de deux suites, c'est qu'on supposera implicitement, que celle au dénominateur ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

2.8.1 Relation de négligeabilité

Définition de la relation de négligeabilité

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **négligeable** devant une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. On note alors $u_n = o(v_n)$.

Remarque 27. Sans division : $u_n = o(v_n) \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \implies |u_n| \leqslant \varepsilon |v_n|$

Exemple 21. Montrer que $\ln n = o(n)$.

Remarque 28. $u_n = o(1)$ ssi

Exemple 22. Traduire $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ avec une relation de négligeabilité.

Proposition n° 18 : croissances comparées

1. Pour $\alpha < \beta$, $n^\alpha = o(n^\beta)$ et $(\ln n)^\alpha = o((\ln n)^\beta)$.
2. Pour $0 < a < b$, $a^n = o(b^n)$.
3. Pour $\alpha, \beta > 0$ et $\gamma > 1$, $\ln^\alpha(n) = o(n^\beta)$, $n^\beta = o(\gamma^n)$, $n^\beta = o(e^{\alpha n})$ $\gamma^n = o(n!)$ $n! = o(n^n)$.

Remarque 29. Avec les propriétés précédentes on peut écrire (en notant ici $u_n \ll v_n$ à la place de $u_n = o(v_n)$) :

$$e^{-n} \ll \frac{1}{n^2} \ll \frac{1}{n} \ll \frac{1}{\ln n} \ll 1 \ll \ln n \ll n \ll n^2 \ll e^n \ll n! \ll n^n$$

2.8.2 Relation de domination

Définition de la relation de domination

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **dominée** devant une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $(\frac{u_n}{v_n})_n$ est bornée. On note alors $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.

Remarque 30. Sans division : $$u_n = \mathcal{O}(v_n) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad |u_n| \leqslant M|v_n|$$

Exemple 23. $u_n = o(v_n) \Longrightarrow u_n = \mathcal{O}(v_n)$

Exemple 24. Écrire $u_n = \mathcal{O}(1)$ ssi

Attention à la notation

$u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(u_n)$ n'impliquent en rien $u_n = v_n$!
La relation $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ se comprend comme (u_n) fait partie de l'ensemble des suites dominées par (v_n).

Exemple 25. Soit pour $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{\sqrt{|\sin(n^2+3n+2)|}}{n}$. A-t-on $u_n = \mathcal{O}(\frac{1}{n})$? $u_n = o(\frac{1}{n})$?

2.8.3 Relation d'équivalence

Définition de la relation d'équivalence

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **équivalente** à une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. On note alors $u_n \sim v_n$.

Remarque 31. Sans division : $$u_n \sim v_n \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \quad \Longrightarrow \quad |u_n - v_n| \leqslant \varepsilon |v_n|.$$

Exemple 26. Si $\ell \neq 0$, alors : $$u_n \sim \ell \quad \Longleftrightarrow \quad u_n$$

Péril imminent pas d'équivalent à 0

On n'écrit jamais $u_n \sim 0$ car cela n'a pas de sens, tout comme $u_n \sim +\infty$

Proposition n° 19 : propriétés des équivalents

1. Si $u_n \sim v_n$ alors $v_n \sim u_n$ (*symétrie*)
2. Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$ (*transitivité*)
3. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.
4. $u_n \sim v_n \iff u_n = v_n + o(v_n)$
5. Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n = \mathcal{O}(v_n)$
6. Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim z_n$ alors $u_n w_n \sim v_n z_n$, $\dfrac{u_n}{w_n} \sim \dfrac{v_n}{z_n}$ et $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$

Péril imminent pas de sommes d'équivalents

Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim z_n$, vous ne pouvez pas en déduire que $u_n + w_n \sim v_n + z_n$. Prenons $u_n = n$, $v_n = n + \dfrac{1}{n}$, $w_n = -n + \dfrac{1}{n}$ et $z_n = -n - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$.