Calculs en vrac... exercice écolo

1. Comme arcsin est dérivable sur $]-1\,;1\,[$, on cherche tous les x tels que $-1 < \mathrm{e}^x < 1$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0 > -1$. De plus, Par croissance stricte du logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$ et de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x < \mathrm{e}^0$ ssi $x < 0$. Ainsi, $g\colon \begin{cases}]-\infty\,;0\,[\longrightarrow]-1\,;1\,[\\ x \longmapsto \mathrm{e}^x \end{cases}$ est dérivable, $\arcsin\colon\ ]-1\,;1\,[\to \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ est dérivable. Par composée $f = \arcsin\circ g$ est dérivable sur $D =]-\infty\,;0\,[$. Pour tout $x \in D$,

$$f'(x) = g'(x)\arcsin'(g(x)) = \mathrm{e}^x\frac{1}{\sqrt{1-(\mathrm{e}^x)^2}} = \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}$$

2. Proposons deux méthodes, la seconde est plus courte mais peut-être moins scolaire :
   (a) Pour tout $x \in D$, $f'(x) > 0$, ainsi, f est strictement croissante sur D, de plus, f est continue sur D car dérivable sur D. D'après le théorème de la bijection strictement monotone, f réalise une bijection de D vers

$$f(D) = \left]\lim_{x\to-\infty} f(x)\,;\lim_{x\to 0} f(x)\right[$$

   Or, $\mathrm{e}^x \xrightarrow[x\to 0]{} \mathrm{e}^0 = 1$ (par continuité d'exponentielle en 0), comme arcsin est continue en 1,

$$\arcsin(\mathrm{e}^x) \xrightarrow[x\to 0]{} \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

   De plus, $\mathrm{e}^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ et arcsin est continue en 0, donc $\arcsin(\mathrm{e}^x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} \arcsin(0) = 0$. Ainsi, f réalise une bijection de D vers $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.
   Soit $x \in D$ et $y = f(x) = \arcsin(\mathrm{e}^x) \in \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, alors $\sin(y) = \sin(\arcsin(\mathrm{e}^x)) = \mathrm{e}^x$ (car la relation $\sin(\arcsin(x)) = x$ est valable pour tout $x \in [-1\,;1\,]$), donc $\ln(\sin(y)) = x$. Ainsi,

$$f^{-1}\colon \begin{cases} \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[\longrightarrow]-\infty\,;0\,[\\ y \longmapsto \ln(\sin(y)) \end{cases}$$

   (b)
   - $\exp\colon \mathbb{R}_-^* \to]\,0\,;1\,[$ est bijective de bijection réciproque $\ln\colon\ ]\,0\,;1\,[\to \mathbb{R}_-^*$
   - $\arcsin\colon\ ]\,0\,;1\,[\to \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ est bijective de bijection réciproque $\sin\colon\ \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[\to]\,0\,;1\,[$

   Or la composée de deux fonctions bijectives est bijectives, donc $f\colon \mathbb{R}_-^* \to \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ est bijective de bijection réciproque $f^{-1} = \ln\circ\sin$ sur $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

3. Posons $Z = 1 - \mathrm{i}$, alors $|Z| = \sqrt{2}$, donc $Z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$. Remarquons aussi que $\sqrt[n]{\sqrt{2}} = (2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{1}{2n}} = \sqrt[2n]{2}$. Ainsi, les racines n-ièmes de $1-\mathrm{i}$ sont les n nombres complexes

$$\sqrt[2n]{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}} \qquad \text{pour } k \in [\![\,0\,;n-1\,]\!]$$

4. Distinguons les cas :
   - Si $x = 1$,

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} x^{i+j} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} 1\right) = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$$

   En effet, la dernière somme était la somme des termes d'une suite arithmétique de raison 1.
   - Si $x = -1$,

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} x^{i+j} &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}(-1)^{i+j}\right) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\frac{1-(-1)^j}{1-(-1)} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{2j+1} = \frac{1}{2}\times(-1)^2\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} + \frac{n}{2} \\ &= \frac{n}{2} + \frac{1-(-1)^n}{4}\end{aligned}$$

- Si $x \neq 1$ et $x \neq -1$. En reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique de raison $x \neq 1$ puis la somme des termes d'une suite géométrique de raison $x^2 \neq 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} x^{i+j} &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} x^{i+j}\right) = \sum_{j=1}^{n} x^{j+1}\frac{1-x^j}{1-x} \\ &= \frac{1}{1-x}\sum_{j=1}^{n} x^{j+1} - \frac{x}{1-x}\sum_{j=1}^{n}(x^2)^j = \frac{1}{1-x}\times x\frac{1-x^n}{1-x} - \frac{x}{1-x}\times x^2\frac{1-(x^2)^n}{1-x^2}\end{aligned}$$

5. Remarquons que $u_4 = u_{10} + (4-10)\times 3 = 5 - 18 = -13$ et $u_n = u_{10} + (n-10)\times 3 = -25 + 3n$. D'après la formule de la somme des termes d'une suite arithmétique :

$$\sum_{k=4}^{n} u_k = \frac{u_4 + u_n}{2}(n-3) = \frac{-13 + (3n-25)}{2}(n-3) = \frac{(-38+3n)(n-3)}{2}$$

6. En reconnaissant la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}2^{k+1} &= 2\left(\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}2^k\right) = 2\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k 1^{n-k} - \binom{n}{0}2^0 - \binom{n}{1}2^1\right) \\ &= 2\left((2+1)^n - 1 - 2n\right) = 2\times 3^n - 2 - 4n\end{aligned}$$

7. Posons, pour $k \in \mathbb{N}$, $u_k = \arctan(k^2)$, alors $u_{k+1} = \arctan((k+1)^2) = \arctan(k^2+2k+1)$, ainsi, on reconnaît une somme télescopique :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k+1}) = u_1 - u_{n+1} = \arctan(1) - \arctan((n+1)^2) = \frac{\pi}{4} - \arctan((n+1)^2)$$

8. Posons $t = \sqrt{x}$, alors $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, ainsi, $\mathrm{d}x = 2\sqrt{x} = 2t\,\mathrm{d}t$ donc

$$\int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x+11\sqrt{x}+30)} = \int_1^2 \frac{2t\,\mathrm{d}t}{t(t^2+11t+30)} = 2\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{(t+5)(t+6)}$$

Ainsi, il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}\backslash\{-5,-6\}$

$$\frac{1}{(t+5)(t+6)} = \frac{A}{t+5} + \frac{B}{t+6}$$

En multipliant par $t+5$ et en faisant tendre t vers -5, on trouve $A = 1$, en multipliant par t et en faisant tendre t vers $+\infty$, on trouve que $A + B = 0$ donc $B = -1$, ainsi

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x+11\sqrt{x}+30)} &= 2\int_1^2 \frac{1}{t+5} - \frac{1}{t+6}\,\mathrm{d}t = 2\left[\ln(t+5) - \ln(t+6)\right]_1^2 \\ &= 2\left(\ln(7) - \ln(8) - (\ln(6) - \ln(7))\right) = 2\ln\left(\frac{49}{48}\right)\end{aligned}$$

9. Pour échelonner le système, on va d'abord faire apparaître un 1 devant le terme en x à la première ligne. Pour cela, on peut faire $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, on peut aussi faire disparaître le terme en x dans la troisième ligne grâce à $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 5x-2y+3z &=& 10 \\ 4x+y+5z &=& 21 \\ 4x+3y+7z &=& 31 \end{array}\right. \underset{\substack{L_1\leftarrow L_1-L_2 \\ L_3\leftarrow L_3-L_2}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} x-3y-2z &=& -11 \\ 4x+y+5z &=& 21 \\ 2y+2z &=& 10 \end{array}\right. \underset{L_2\leftarrow L_2-4L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} x-3y-2z &=& -11 \\ 13y+13z &=& 65 \\ 2y+2z &=& 10 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_2\leftarrow L_2-6L_3}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} x-3y-2z &=& -11 \\ y+z &=& 5 \\ 2y+2z &=& 10 \end{array}\right. \underset{\substack{L_1\leftarrow L_1+3L_2 \\ L_3\leftarrow L_3-2L_2}}{\iff} \left\{\begin{array}{lcl} x+z &=& 4 \\ y+z &=& 5 \\ 0 &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 4-z \\ y &=& 5-z \end{array}\right.$$

Ainsi, l'ensemble des solution est $\{(4-z, 5-z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$

10. - $306 = 234 \times 1 + 72$
    - $234 = 72 \times 3 + 18$
    - $72 = 18 \times 4 + 0$

    Ainsi, $\mathrm{PGCD}(306, 234) = 18$

11. - L'équation homogène est $y' - \dfrac{2}{x}y = 0$. Les solutions de l'équation homogène sont exactement les fonctions
    $$x \mapsto C\mathrm{e}^{2\ln(x)} = Cx^2$$
    avec $C \in \mathbb{R}$.
    - Cherchons une solution particulière grâce à la variation de la constante. Posons $y_P \colon x \mapsto C(x)x^2$ avec C une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, ainsi, pour tout $x > 0$,
    $$y_P'(x) - \frac{2}{x}y_P(x) = C'(x)x^2 + 2xC(x) - \frac{2}{x}x^2C(x) = C'(x)x^2$$
    On cherche donc C tel que $C'(x) = -\sin(x)$ pour tout $x > 0$. Posons $C \colon x \mapsto \cos(x)$. Ainsi, $y_P \colon x \mapsto \cos(x)x^2$ est une solution particulière de l'équation $y' - \dfrac{2}{x}y = -x^2\sin(x)$
    - Les solutions sont donc exactement les fonctions $x \mapsto Cx^2 + \cos(x)x^2$ où $C \in \mathbb{R}$
    - Cherchons $C \in \mathbb{R}$ tel que $f \colon x \mapsto Cx^2 + \cos(x)x^2$ vérifie $f(\frac{\pi}{2}) = 3$, on a alors $C\dfrac{\pi^2}{4} + 0 = 3$ ssi $C = \dfrac{12}{\pi^2}$ Ainsi, l'unique solution au problème de Cauchy est $x \mapsto \dfrac{12}{\pi^2}x^2 + x^2\cos(x)$.

12. - Si $\theta \equiv 0\,[2\pi]$, alors par 2π-périodicité du cosinus, $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(k\theta + \varphi) = \sum\limits_{k=0}^{n} \cos(\varphi) = (n+1)\cos(\varphi)$.
    - Si $\theta \not\equiv 0\,[2\pi]$, alors en utilisant la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \neq 1$:
    $$\begin{aligned}
    \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta + \varphi) &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(k\theta+\varphi)}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right)^k\right) \\
    &= \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}\frac{1 - \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right)^{n+1}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}}\right) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi} \times \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta\frac{n+1}{2}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}} \times \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta\frac{n+1}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta\frac{n+1}{2}}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}}\right) \\
    &= \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\varphi + \frac{n\theta}{2})}\frac{-2\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\theta(n+1)}{2}\right)}{-2\mathrm{i}\sin(\dfrac{\theta}{2})}\right) \\
    &= \frac{\sin\left(\dfrac{\theta(n+1)}{2}\right)}{\sin(\dfrac{\theta}{2})}\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\varphi+\frac{n\theta}{2})}\right) = \frac{\sin\left(\dfrac{\theta(n+1)}{2}\right)}{\sin(\dfrac{\theta}{2})}\cos\left(\varphi + \frac{n\theta}{2}\right)
    \end{aligned}$$

13. Comme $g(1) = g(-1) = \dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{4}$ a au moins deux antécédents, ainsi, la fonction g n'est pas injective.

14. - Comme $x \mapsto x^2$ et arctan sont toutes les deux dérivables sur $\mathbb{R}$, par composée, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2x \times \dfrac{1}{1+x^4}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g'(x) \geqslant 0$ et $g'(x) = 0$ ssi $x = 0$, ainsi, g' ne s'annule qu'une seule fois sur $\mathbb{R}_+$, ainsi, g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus, g est continue sur $\mathbb{R}_+$ (car dérivable), d'après le théorème de la bijection strictement monotone, g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers
    $$g(\mathbb{R}_+) = \left[g(0)\,;\lim_{x\to+\infty} g(x)\right[= \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$$
    De même, pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, $g'(x) \leqslant 0$ et $g'(x) = 0$ ssi $x = 0$, ainsi, g' ne s'annule qu'une seule fois sur $\mathbb{R}_-$, ainsi, g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$. De plus, g est continue sur $\mathbb{R}_-$ (car dérivable), d'après le théorème de la bijection strictement monotone, g réalise une bijection de $\mathbb{R}_-$ vers
    $$g(\mathbb{R}_-) = \left[g(0)\,;\lim_{x\to-\infty} g(x)\right[= \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$$
    Ainsi,
    $$g(\mathbb{R}) = g(\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-) = g(\mathbb{R}_+) \cup g(\mathbb{R}_-) = \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[\cup \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[= \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors,

$$x \in g^{-1}\left(\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]\right) \iff g(x) \in \left[0\,;\frac{\pi}{4}\right] \iff 0 \leqslant \arctan(x^2) \leqslant \frac{\pi}{4}$$

Or, $x^2 \geqslant 0$ par croissance de arctan sur $\mathbb{R}$, $\arctan(x^2) \geqslant \arctan(0) = 0$. De plus, par croissance de arctan sur $\mathbb{R}$ et de tan sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(x^2) \leqslant \frac{\pi}{4}$ ssi $x^2 \leqslant 1$ ssi $x \in [-1\,;1]$. Par conséquent,

$$g^{-1}\left(\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]\right) = [-1\,;1]$$

Allons ensembles de la partie... exercice nationale

1. Soient E et F deux ensembles. $$F \in \mathscr{P}(E) \iff F \subset E.$$
2. (a) Si $A = \{2\}$ et $B = \{3\}$, alors $A + B = \{5\}$
   (b) Si $A = \{2, 3\}$ et $B = \{-1, 3\}$, alors $A + B = \{1, 2, 5, 6\}$.
   (c) Si A quelconque et $B = \varnothing$, montrons alors que $A + B = \varnothing$. Supposons que $A + B$ soit non vide, alors il existe $x \in A + B$ ce qui veut dire qu'il existe $a \in A$ et $b \in B$ tel que $x = a + b$, alors comme $b \in B$, B est non vide ce qui est absurde[1] Ainsi, $A + B = \varnothing$
   (d) Si $A \neq \varnothing$ et $B = \mathbb{R}$, montrons que $A + B = \mathbb{R}$. D'une part, $A + B \subset \mathbb{R}$. D'autre part, soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $A \neq \varnothing$, il existe $a \in A$. Prenons alors $b = x - a \in \mathbb{R} = B$, ainsi, $a + b = a + (x - a) = x$ avec $a \in A$ et $b \in B$ donc $x \in A + B$, on a ainsi montré que $\mathbb{R} \subset A + B$, par double inclusion $A + B = \mathbb{R}$.
   (e) Si $A = \mathbb{R}_+$ et $B = \mathbb{R}_-$, montrons que $A + B = \mathbb{R}$. D'une part, $A + B \subset \mathbb{R}$. D'autre part, soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \geqslant 0$, posons $a = x \in A$ et $b = 0 \in B$, de sorte que $a + b = x$ donc $x \in A + B$. Si $x \leqslant 0$, posons $a = 0 \in A$ et $b = x \in B$, de sorte que $a + b = x$ donc $x \in A + B$. on a ainsi montré que $\mathbb{R} \subset A + B$. Par double inclusion, $A + B = \mathbb{R}$.
3. Supposons $A \subset A'$ et $B \subset B'$. Soit $x \in A + B$, alors il existe $a \in A$ et $b \in B$ tel que $x = a + b$. Or $a \in A \subset A'$ et $b \in B \subset B'$ donc $a \in A'$, $b \in B'$ et $x = a + b \in A' + B'$. On a donc montré que $A + B \subset A' + B'$.
4. - Soit $x \in (A \cup A') + B$ ainsi il existe $a \in A \cup A'$ et $b \in B$ tel que $x = a + b$. Il y a deux cas soit $a \in A$ soit $a \in A'$. Si $a \in A$, alors $x = a + b \in A + B$, ainsi $x \in (A + B) \cup (A' + B)$. Si $a \in A'$, alors $x = a + b \in A' + B$, ainsi $x \in (A + B) \cup (A' + B)$ dans tous les cas, on a montré que $x \in (A + B) \cup (A' + B)$ Ainsi, $(A \cup A') + B \subset (A + B) \cup (A' + B)$.
   - Soit $x \in (A + B) \cup (A' + B)$, alors il y a deux cas, soit $x \in A + B$ soit $x \in A' + B$. Si $x \in A + B$, alors il existe $a \in A$ et $b \in B$, alors $a \in A \cup A'$ et $b \in B$, donc $x \in (A \cup A') + B$. Si $x \in A' + B$, alors il existe $a \in A'$ et $b \in B$, alors $a \in A \cup A'$ et $b \in B$, donc $x \in (A \cup A') + B$. Dans tous les cas on a montré que $x \in (A \cup A') + B$. Ainsi, $(A + B) \cup (A' + B) \subset (A \cup A') + B$.

   Par double inclusion, $(A \cup A') + B = (A + B) \cup (A' + B)$.
5. - Soit $x \in A + B$, il existe ainsi, $a \in A$ et $b \in B$ tel que $x = a + b$. Or, $(a, b) \in A \times B$ et $f((a, b)) = a + b = x$, ainsi, x admet au moins un antécédent par la fonction f. Ainsi, la fonction f est donc nécessairement surjective.
   - Prenons $A = B = \mathbb{R}$, alors $(1, 1) \in A \times B$ et $(2, 0) \in A \times B$, $f((1, 1)) = 2 = f((2, 0))$, ainsi, f n'est pas injective. Donc, f n'est pas nécessairement injective. Mais elle peut aussi l'être, par exemple dans le cas $A = \{2, 3\}$, $B = \{-1, 3\}$.
6. Supposons que $0 \in B$. Soit $a \in A$, alors $a = a + 0$ avec $a \in A$ et $0 \in B$, ainsi, $a \in A + B$, on a donc montré que $A \subset A + B$.
7. Posons $A = \mathbb{R}_+^*$ et $B = \mathbb{R}_+^*$. Montrons que $A \subset A + B$. Soit $x \in A = \mathbb{R}_+^*$, posons alors $a = \frac{x}{2} \in \mathbb{R}_+^* = A$ et $b = \frac{x}{2} \in \mathbb{R}_+^* = B$ de sorte que $x = a + b \in A + B$. Il en découle que $A \subset A + B$. Cependant $0 \notin B$. ainsi l'implication «$A \subset A + B \implies 0 \in B$» est fausse.

[1] En fait, on aurait pu rédiger par contraposé et montrer que «$A + B \neq \varnothing \Longrightarrow B \neq \varnothing$».

8. Montrons un résultat utile pour la suite : soit x et y deux réels. Définissons l'ensemble

$$E = \{tx + (1-t)y \mid t \in [\,0\,;1\,]\}$$

Alors E est égal au segment $[\,x\,;y\,]$ si $x \leqslant y$ et au segment[2] $[\,y\,;x\,]$ si $y \leqslant x$. Supposons $x \leqslant y$. Soit $z \in E$ alors il existe $t \in [\,0\,;1\,]$ tel que $z = tx + (1-t)y$, alors

$$\begin{aligned} z - x &= (t-1)x + (1-t)y = (1-t)(y-x) \geqslant 0 \\ y - z &= -tx + ty = t(y-x) \geqslant 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $x \leqslant z$ et $z \leqslant y$, ce qui montre que $z \in [\,x\,;y\,]$. Donc $E \subset [\,x\,;y\,]$ Réciproquent, supposons que $z \in [\,x\,;y\,]$. si $x = y$, alors $z = x = y$ et donc posons $t = 0$ de sorte que $z = tx + (1-t)y \in E$. si $x < y$, alors on pose $t = \dfrac{y-z}{y-x} \in [\,0\,;1\,]$ il en découle que

$$tx + (1-t)y = \frac{y-z}{y-x}x + \frac{z-x}{y-x}y = z$$

donc $z \in E$, il en découle que $[\,x\,;y\,] \subset E$. On a ainsi montré que $[\,x\,;y\,] = E$. On montrerait de même que $[\,y\,;x\,] = E$ si jamais $y \leqslant x$.

Supposons que A et B sont des intervalles de $\mathbb{R}$. si $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$ alors $A + B = \varnothing$ (d'après la question 2d). Supposons $A \neq \varnothing$ et $B \neq \varnothing$. Montrons que $A + B$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $(x, x') \in (A+B)^2$. Supposons $x \leqslant x'$ et prenons $z \in [\,x\,;x'\,]$ alors il existe $(a,b) \in A \times B$ tel que $x = a + b$, il existe aussi $(a', b) \in A \times B$ tel que $x' = a' + b'$. D'après le résultat que l'on a montré il existe $t \in [\,0\,;1\,]$ tel que $z = tx + (1-t)x'$. Ainsi,

$$z = t(a+b) + (1-t)(a'+b') = ta + (1-t)a' + tb + (1-t)b'$$

Ainsi, $ta + (1-t)a' \in [\,a\,;a'\,]$ (ou $[\,a'\,;a\,]$) dans tous les cas comme A est un intervalle et que a et a' sont dans A, on en déduit que $ta + (1-t)a' \in A$. De même, $tb + (1-t)b' \in B$, ceci montre que $z \in A + B$. On a donc montré que $[\,x\,;x'\,] \subset A + B$. D'après la caractérisation des intervalles, ceci montre que $A + B$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Des ordres embêtants... problème tyrannique (combattez la tyrannie)

Calculs préliminaires

1. Fixons $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2} = \frac{a(1+x^2) + (bx+c)x}{x(1+x^2)} = \frac{x^2(a+b) + cx + a}{x(1+x^2)}$$

Posons alors $a = 1$, $c = 0$ et $b = -1$, de sorte que pour tout $x > 0$

$$\frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2} = \frac{x^2(1+(-1)) + 0x + 1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x(1+x^2)}$$

2. Comme pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{x(x^2+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2x}{1+x^2}$, on en déduit que $x \mapsto \ln(x) - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$ est une primitive de f sur I.

3. On pose $u\colon x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ et $v = \ln$, alors $(u,v) \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})^2$ de sorte que $u'\colon x \mapsto x$ et $v'\colon x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Par intégration par parties :

$$\int^x t\ln(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]^x - \int^x \frac{t^2}{2}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4}$$

Ainsi, $x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2\ln(x) - \dfrac{1}{4}x^2$ est une primitive de g sur I.

2. De façon à toujours mettre la borne supérieure du segment à droite et la plus petite à gauche.

4. On pose $u\colon x \mapsto x - \dfrac{x^3}{3}$ et $v = \ln$, alors $(u,v) \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})^2$ de sorte que $u'\colon x \mapsto 1 - x^2$ et $v'\colon x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Par intégration par parties :
$$\int^x (1-t^2)\ln(t)\,\mathrm{d}t = \left[\left(t - \frac{t^3}{3}\right)\ln(t)\right]^x - \int^x \left(t - \frac{t^3}{3}\right)\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\ln(x) - x + \frac{x^3}{9}$$
Ainsi, $x \mapsto \left(x - \dfrac{x^3}{3}\right)\ln(x) - x + \dfrac{x^3}{9}$ est une primitive de h sur I.

Résolution de l'équation homogène

5. $y'\colon x \mapsto 1$ et $y''\colon x \mapsto 0$, ainsi pour tout $x \in I$,
$$y''(x) - \frac{2x}{1+x^2}y'(x) + \frac{2}{1+x^2}y(x) = 0 - \frac{2x}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2} = 0$$
Ainsi, $y\colon x \mapsto 1$ est bien solution de (H).
6. Par quotient, z est deux fois dérivable et pour tout $x \in I$:
   - $y(x) = xz(x)$
   - $y'(x) = z(x) + xz'(x)$
   - $y''(x) = 2z'(x) + xz''(x)$

   Ainsi
$$\begin{aligned} y''(x) - \frac{2x}{1+x^2}y'(x) + \frac{2}{1+x^2}y(x) &= 2z'(x) + xz''(x) - \frac{2x}{1+x^2}(z(x) + xz'(x)) + \frac{2}{1+x^2}(xz(x)) \\ &= xz''(x) + z'(x)\left(2 - \frac{2x^2}{1+x^2}\right) + z \times 0 \\ &= x(z')'(x) + z'(x)\frac{2}{1+x^2} \end{aligned}$$
Ainsi, y est solution de (H) ssi z' solution de $xu' + \dfrac{2}{1+x^2}u = 0$.

   Remarque 1. On est donc passé d'une équation du second ordre qu'on ne savait pas résoudre à une équation du premier ordre que l'on sait résoudre.
7. (E') est équivalente à $u' + \dfrac{2}{x(1+x^2)}u = 0$ sur I. En utilisant le résultat de la question 2, les solutions de (E') sont exactement les fonctions
$$x \mapsto C\mathrm{e}^{-2(\ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2))} = \frac{C}{x^2} \times (1+x^2) = C(1+x^{-2})$$
avec $C \in \mathbb{R}$.
8. D'après les deux questions précédentes, y est solution de (H) ssi $z'\colon x \mapsto C(1+x^{-2})$ avec $C \in \mathbb{R}$ ssi $z\colon x \mapsto C(x - \dfrac{1}{x}) + D$ avec $(C,D) \in \mathbb{R}^2$ ssi $y\colon x \mapsto C(x^2-1) + Dx$ avec $(C,D) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi, les solutions de (H) sont exactement les fonctions $x \mapsto C(x^2-1) + Dx$ avec $(C,D) \in \mathbb{R}^2$.

Résolution de l'équation (E)

9.
   - $y_P'\colon x \mapsto x\lambda'(x) + \lambda(x) + \mu'(x)(x^2-1) + 2x\mu(x) = \lambda(x) + 2x\mu(x)$
   - $y_P''\colon x \mapsto \lambda'(x) + 2\mu(x) + 2x\mu'(x)$
10. Soit $x \in I$
$$\begin{aligned} & y_P''(x) - \frac{2x}{1+x^2}y_P'(x) + \frac{2}{1+x^2}y_P(x) \\ = \;& (\lambda'(x) + 2\mu(x) + 2x\mu'(x)) - \frac{2x}{1+x^2}(\lambda(x) + 2x\mu(x)) + \frac{2}{1+x^2}(x\lambda(x) + (x^2-1)\mu(x) \\ = \;& \lambda'(x) + 2x\mu'(x) + \mu(x)\left(2 - \frac{4x^2}{1+x^2} + \frac{2(x^2-1)}{1+x^2}\right) + \lambda(x)\left(-\frac{2x}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2}\right) \\ = \;& \lambda'(x) + 2x\mu'(x) \end{aligned}$$
Ainsi, y_P est solution de (E) ssi pour tout $x \in I$, $\lambda'(x) + 2x\mu'(x) = (x^2+1)\ln(x)$.

11. Ainsi, on cherche λ et μ tel que pour tout $x \in I$

$$\begin{cases} \lambda'(x) + 2x\mu'(x) & = & (x^2+1)\ln(x) \\ x\lambda'(x) + (x^2-1)\mu'(x) & = & 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - xL_1}{\iff} \begin{cases} \lambda'(x) + 2x\mu'(x) & = & (x^2+1)\ln(x) \\ (-x^2-1)\mu'(x) & = & -x(x^2+1)\ln(x) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda'(x) + 2x\mu'(x) & = & (x^2+1)\ln(x) \\ \mu'(x) & = & x\ln(x) \end{cases}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2xL_2}{\iff} \begin{cases} \lambda'(x) & = & (1-x^2)\ln(x) \\ \mu'(x) & = & x\ln(x) \end{cases}$$

12. Ainsi, en utilisant les questions 3 et 4, on pose $\lambda\colon x \mapsto \left(x - \dfrac{x^3}{3}\right)\ln(x) - x + \dfrac{x^3}{9}$ et $\mu\colon x \mapsto \dfrac{x^2\ln(x)}{2} - \dfrac{x^2}{4}$, on obtient que

$$y_P\colon x \mapsto x\left[\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\ln(x) - x + \frac{x^3}{9}\right] + (x^2-1)\left[\frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4}\right]$$

est une solution particulière de (E). Après regroupement des termes :

$$y_P\colon x \mapsto \left(\frac{x^4}{6} - \frac{x^2}{2}\right)\ln(x) - \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{36}x^4$$

Remarque 2. On remarque que l'on a trouvé une solution particulière grâce à une méthode de la variation des constantes[3] : les solutions de l'équation homogène sont de la forme $x \mapsto C(x^2-1) + Dx$ et on a cherché une solution particulière en remplaçant C et D par deux fonctions :

$$y_P\colon x \mapsto \mu(x)(x^2-1) + \lambda(x)x$$

13. L'ensemble des solutions de (E) est donc :

$$\left\{x \mapsto \left(\frac{x^4}{6} - \frac{x^2}{2}\right)\ln(x) - \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{36}x^4 + C(x^2-1) + Dx \mid (C,D) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

3. Car il y a deux constantes à l'ordre 2 et non une contrairement à l'ordre 1