Correction de l'exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons N le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n. Alors $10^{N-1} \leqslant n < 10^N$. En effet, 10^N est le plus petit nombre à s'écrive avec $N+1$ chiffres (un 1 et N zéros) et 10^{N-1} est le plus petit nombre à s'écrive avec N chiffres (un 1 et $N-1$ zéros). Or l'application $\log_{10}$ est strictement croissante, ainsi, $N-1 \leqslant \log_{10}(n) < N$. Par caractérisation de la partie entière, $E(\log_{10}) = N-1$. Ainsi le nombre de chiffres nécessaires pour écrire n dans l'écriture décimale est $N = E(\log_{10}(n)) + 1$.

Correction de l'exercice 2.

1. Prenons $x = y = 1$, on obtient alors $f(1 \times 1) = f(1) \times f(1)$. Ainsi, $f(1) = f(1)^2$. Il y a donc deux cas :
   - Si $f(1) = 0$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x \times 1) = f(x)f(1) = f(x)0 = 0$, ainsi f est la fonction nulle ce qui est exclu.
   - Si $f(1) \neq 0$, alors en multipliant par $f(1)^{-1}$, on obtient $f(1) = 1$.

   Ainsi, on a montré que $f(1) = 1$. Posons, l'hypothèse de récurrence, $\mathscr{P}(n)$: «$f(n) = n$».
   - En remplaçant x et y par 0, on obtient $f(0) = f(0) + f(0)$, après simplification, il vient, $f(0) = 0$. Donc, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, alors $f(n) = n$, et $f(n+1) = f(n) + f(1) = n+1$. Donc, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   - Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n$.

   Si $n \in \mathbb{Z}_-$, alors prenons $x = n$ et $y = -n \in \mathbb{N}$. On obtient $f(n+(-n)) = f(n)+f(-n)$. Soit $f(0) = f(n)-n$. Comme $f(0) = 0$, on obtient que $f(n) = n$. On a donc montré que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = n$.

   Soit $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Alors,

   $$p = f(p) = f\left(q \times \frac{p}{q}\right) = qf\left(\frac{p}{q}\right)$$

   (la dernière égalité se montre par récurrence sur q). En divisant par $q \neq 0$, on obtient $f(p/q) = p/q$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = x$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, alors $f(x) = f(\sqrt{x} \times \sqrt{x}) = f(\sqrt{x}) \times f(\sqrt{x}) = (f(\sqrt{x}))^2 \geqslant 0$.
   Soit $(x, x') \in \mathbb{R}^2$. Supposons $x \leqslant x'$, alors $x' - x \geqslant 0$. Par ce qui précède, $f(x'-x) \geqslant 0$. Donc, $f(x') + f(-x) \geqslant 0$. Comme $f(x) + f(-x) = f(x + (-x)) = f(0) = 0$, on en déduit que $f(-x) = -f(x)$. Dès lors, $f(x') - f(x) \geqslant 0$. Finalement, $f(x') \geqslant f(x)$. Par conséquent, f est une fonction croissante.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors d'après le cours, il existe $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites de rationnels telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant x \leqslant b_n$ avec $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ et $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Comme f est croissante, il vient que $f(a_n) \leqslant f(x) \leqslant f(b_n)$. Mais par ce qui précède, comme a_n et b_n sont des rationnels, on obtient $a_n \leqslant f(x) \leqslant b_n$. En outre, par passage à la limite qui conserve les inégalités larges, on obtient $x \leqslant f(x) \leqslant x$. Donc $f(x) = x$. Dès lors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$.
   On a donc montré que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, vérifie pour tout $(x, x') \in \mathbb{R}^2$, $f(xx') = f(x)f(x')$ et $f(x + x') = f(x) + f(x')$, alors $f : x \mapsto x$. Réciproquement, $f : x \mapsto x$ vérifie bien ces deux formules.

Correction de l'exercice 3.

- Soit $(x, x') \in \mathbb{R}^2$, supposons $x \leqslant x'$. notons

  $$A_x = \{p \in \mathbb{Z} \mid p \leqslant x\} \qquad \text{et} \qquad A_{x'} = \{p \in \mathbb{Z} \mid p \leqslant x'\}$$

  de sorte que $E(x) = \max(A_x)$ et $E(x') = \max(A_{x'})$. Soit $p \in A_x$, alors $p \leqslant x \leqslant x'$, en particulier $p \in A_{x'}$, ainsi $p \leqslant \max(A_{x'}) = E(x')$. On en déduit que $E(x')$ est un majorant de A_x. Or $E(x) = \max(A_x)$ est la borne supérieure de A_x, donc le plus petit des majorants de A_x, ainsi, $E(x) \leqslant E(x')$.
  Ceci prouve que $E(x) \leqslant E(x')$. Ainsi, $x \mapsto E(x)$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.
- Notons $g : x \mapsto x - E(x)$. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $g(x+1) = x + 1 - E(x+1)$. Cependant, d'après le cours, $E(x+1) = E(x) + 1$, donc $g(x+1) = x + 1 - E(x) - 1 = x - E(x) = g(x)$. Dès lors, g est une fonction 1-périodique.
- Pour la tracer, il suffit d'étudier g sur $[\,0\,;1\,]$. Pour $x \in [\,0\,;1\,[$, $g(x) = x - E(x) = x$ et $g(1) = 0$.

Correction de l'exercice 4.

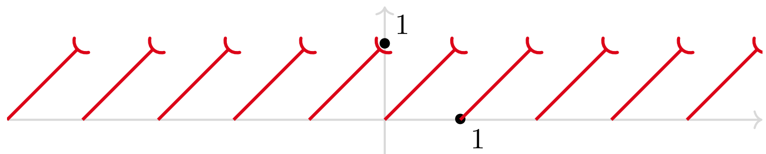

FIGURE 1 – La fonction g de l'exercice **??**.

Correction de l'exercice 5.

Correction de l'exercice 6.

1. Soit $x \in A$, alors $x \in B$, en particulier, comme $\sup(B)$ est un majorant de B, $x \leqslant \sup(B)$. Ceci montre que $\sup(B)$ est un majorant de A. Or $\sup(A)$ est le plus petit des majorants de A donc $\sup(A) \leqslant \sup(B)$.
2. Soit $x \in A \cup B$, distinguons les cas :
   (a) Si $x \in A$, alors $x \leqslant \sup(A) \leqslant \max\{\sup(A), \sup(B)\}$.
   (b) Si $x \in B$, alors $x \leqslant \sup(B) \leqslant \max\{\sup(A), \sup(B)\}$

   Ainsi, pour tout $x \in A \cup B$, $x \leqslant \max\{\sup(A), \sup(B)\}$. Ceci démontre que $\max\{\sup(A), \sup(B)\}$ est un majorant de $A \cup B$, ainsi $A \cup B$ est un ensemble non vide et majoré, il admet donc une borne supérieure. De plus, $\sup(A \cup B) \leqslant \max\{\sup(A), \sup(B)\}$ ($\sup(A \cup B)$ est plus petit que n'importe quel majorant de $A \cup B$).

   En outre, comme $A \subset A \cup B$, en appliquant la question 1, on obtient $\sup(A) \leqslant \sup(A \cup B)$. De même, $B \subset A \cup B$, il en découle $\sup B \leqslant \sup(A \cup B)$. Ainsi, $\max\{\sup(A), \sup(B)\} \leqslant \sup(A \cup B)$. Par double inégalité, nous avons montré que $\max\{\sup(A), \sup(B)\} = \sup(A \cup B)$

Correction de l'exercice 7.

Correction de l'exercice 8.

1.
2.
3. Soit $x \in C$, alors il existe $(n, m) \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{nm}{(n+m)^2} = x$. Comme $(n-m)^2 \geqslant 0$, on a $n^2 - 2nm + m^2 \geqslant 0$ donc $n^2 + 2nm + m^2 \geqslant 4nm$, ainsi, $\dfrac{nm}{(n+m)^2} \leqslant \dfrac{1}{4}$. Par conséquent, $\dfrac{1}{4}$ est donc un majorant de C. De plus, pour $n = m = 1$, $x = \dfrac{1}{4} \in C$, ainsi, $\dfrac{1}{4}$ est le maximum de C. Comme C admet un maximum, C admet une borne supérieure et $\sup(C) = \max(C) = \dfrac{1}{4}$.

   Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{C}$, $x \geqslant 0$. Ainsi, 0 est un minorant de C. Soit μ un minorant de C, alors pour tout $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\mu \leqslant \dfrac{nm}{(n+m)^2}$. En prenant $m = 1$, on obtient que $\mu \leqslant \dfrac{n}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Comme le passage à la limite conserve les inégalités, $\mu \leqslant 0$. Ainsi, 0 est la borne inférieure de C : $\inf(C) = 0$. Supposons que C admette un minimum, alors on aurait que $\min(C) = \inf(C) = 0$, ainsi $0 \in C$ ce qui est impossible car les éléments de C sont strictement positifs. Par conséquent, C n'admet pas de minimum.
4. Pour tout $x \in \mathbb{N}$, $E(\sqrt{x}) \leqslant \sqrt{x}$, ainsi $\sqrt{x} - E(\sqrt{x}) \geqslant 0$. Donc, 0 est un minorant de D. De plus, pour $x = 4$, $\sqrt{4} - E(\sqrt{4}) = 0$, donc $0 \in D$. Ainsi, 0 est le minimum de D et donc la borne inférieure de D : $\min(D) = \inf(D) = 0$.

   De plus, pour $x \in \mathbb{N}$, $\sqrt{x} < E(\sqrt{x}) + 1$, donc $\sqrt{x} - E(\sqrt{x}) < 1$. Ainsi, 1 est un majorant de D et $1 \notin D$. Soit M un majorant de D. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n^2+2n} - E(\sqrt{n^2+2n}) \leqslant M$. Comme $n^2 \leqslant n^2+2n < n^2+2n+1$, on en déduit, par croissance stricte de la racine carrée que $n \leqslant \sqrt{n^2+2n} < n+1$, donc $E(\sqrt{n^2+2n}) = n$. Ainsi, $\sqrt{n^2+2n} - n \leqslant M$. De plus, $\sqrt{n^2+2n} - n = n\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{n}} - 1\right)$. Or, la fonction racine carrée est dérivable en 1 :

$$\frac{\sqrt{1+h}-1}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{1}{2}$$

On en déduit que

$$\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}-1}{\frac{2}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

Donc, $\sqrt{n^2+2n}-n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Comme les inégalités larges sont conservées par passage à la limite, on en déduit que $1 \leqslant M$. Ainsi, 1 est le plus petit des majorants de D, on en déduit que 1 est la borne supérieure de D. Si D admettait un maximum, on aurait $\max(D) = \sup(D) = 1$ donc $1 \in D$ ce qui est impossible. Ainsi, D n'admet pas de maximum.

Correction de l'exercice 9. L'ensemble $E = \{x \in [\,0\,;1\,] \mid f(x) \geqslant x\}$ est défini par compréhension.

1. $E \subset [\,0\,;1\,]$, ainsi 1 est un majorant de E. De plus, comme $f([\,0\,;1\,]) \subset [\,0\,;1\,]$, $f(0) \in [\,0\,;1\,]$. En particulier, $f(0) \geqslant 0$. Ceci montre que $0 \in E$. Comme E est un ensemble non vide et majoré, on en déduit qu'il admet une borne supérieure.
2. Procédons par double inégalité :
   - Montrons que $f(s) \leqslant s$:
     — Si $s = 1$, alors $f(s) = f(1) \leqslant 1 = s$.
     — Si $s < 1$, alors considérons $x \in \,]\,s\,;1\,]$, comme $x > s$, $x \notin E$, ainsi, $f(x) < x$. Comme f est croissante, on obtient $f(s) \leqslant f(x) < x$, en faisant tendre x vers s^+, on obtient [1] $f(s) \leqslant s$.

     Dans les deux cas, on a montré que $f(s) \leqslant s$.
   - Montrons que $s \leqslant f(s)$.
     — Si $s = 0$, alors $f(s) = f(0) \geqslant 0 = s$
     — Si $s > 0$, alors soit $x \in [\,0\,;s\,[$, comme $x < s$, x n'est pas un majorant de E. Ainsi, il existe $e \in E$ tel que $x < e \leqslant s$. Comme f est croissante, $x < e \leqslant f(e) \leqslant f(s)$. En faisant tendre x vers s^-, on obtient $s \leqslant f(s)$.

     Dans les deux cas, on a montré que $s \leqslant f(s)$.

   Par double inégalité, on a montré que $f(s) = s$.

Correction de l'exercice 10.

Correction de l'exercice 11.

Correction de l'exercice 12. 1. Puisque, $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de raison r, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + r$, de même $u_n = u_{n-1} + r$, soit $u_{n-1} = u_n - r$. En effectuant la somme, on obtient $u_{n+1} + u_{n-1} = 2u_n$. En divisant par 2, on obtient le résultat voulu.

2. Puisque, $(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison q, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = q^n u_0$, ainsi $u_{n+1}u_{n-1} = q^{n+1}u_0 q^{n-1}u_0 = q^{2n}{u_0}^2$, en outre ${u_n}^2 = q^{2n}{u_0}^2$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ${u_n}^2 = u_{n+1}u_{n-1}$.
3. - Soit $(u_n)_n$ une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{u_{n+1}+u_{n-1}}{2}$, alors $2u_n = u_{n+1} + u_{n-1}$, en particulier, $u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1}$. Ceci prouve que la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante. Notons r cette constante. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$. Dès lors, la suite $(u_n)_n$ est arithmétique.
   - Soit $(u_n)_n$ une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ${u_n}^2 = u_{n+1}u_{n-1}$. Distinguons les cas suivant la valeur de u_0 :
     — Si $u_0 \neq 0$ et $u_1 \neq 0$, posons $\mathscr{P}(n)$: «$u_n \neq 0$», alors $\mathscr{P}(1)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Alors, comme $u_{n+1}u_{n-1} = {u_n}^2 \neq 0$, on en déduit en particulier que $u_{n+1} \neq 0$, donc que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie. De plus, $\mathscr{P}(0)$ est vraie. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ vraie. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{u_n}{u_{n-1}}$. Ceci prouve que la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Si on note q la constante, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$. Dès lors, $(u_n)_n$ est une suite géométrique.

1. On se rappelle que seules les inégalités larges passent à la limite.

- Si $u_0 = 0$ ou $u_1 = 0$. Remarquons que comme $u_n = 0$ implique $u_{n+1} = 0$, par récurrence, on prouve que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 0 = 0 \times u_{n-1}$, ainsi la suite $(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison 0.

Correction de l'exercice 13. Notons ℓ la limite de $(u_n)_n$. Prenons $\varepsilon = 1/3 > 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$ implique $u_n \in [\,\ell - \varepsilon\,;\ell + \varepsilon\,]$. Seulement, $[\,\ell - \varepsilon\,;\ell + \varepsilon\,]$ est un intervalle de longueur $2\varepsilon = 2/3 < 1$. Il ne peut pas contenir deux entiers distincts (cf. exercice 14 du TD1). Dès lors, pour $n \geqslant n_0$, u_n et u_{n_0} sont deux entiers dans ce même intervalle, ainsi, $u_n = u_{n_0}$. La suite $(u_n)_n$ stationne donc à partir de n_0. En particulier, $\ell = u_{n_0} \in \mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 14.

Correction de l'exercice 15.

Correction de l'exercice 16.

Correction de l'exercice 17.

Correction de l'exercice 18.

Correction de l'exercice 19.

Correction de l'exercice 20.

Correction de l'exercice 21.

1. Posons $\mathscr{P}(n)$: «$0 < x_n < 1$». Remarquons que $x_1 = \dfrac{2}{3} \in \,]\,0\,;1\,[$, donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Alors, $0 < x_n < 1$, donc $0 < 1 + x_n < 1 + 2x_n$, par quotient, $0 < \dfrac{1 + x_n}{1 + 2x_n} < 1$, comme $0 < x_n < 1$, par produit, il vient $0 < x_{n+1} < 1$. Par conséquent, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < x_n < 1$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$:
$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n(1 + x_n)}{1 + 2x_n} - x_n = \frac{x_n + {x_n}^2 - x_n(1 + 2x_n)}{1 + 2x_n} = \frac{-{x_n}^2}{1 + 2x_n} < 0$$
Dès lors, la suite $(x_n)_n$ est décroissante.
3. La suite $(x_n)_n$ étant décroissante et minorée, on en déduit, d'après le théorème de convergence monotone, que $(x_n)_n$ converge vers[2] $\ell \in [\,0\,;1\,]$. Remarquons de plus que $(x_n)_n$ est une suite récurrente, en effet, $x_{n+1} = f(x_n)$ avec $f : x \mapsto \dfrac{x(1+x)}{1+2x}$, comme f est continue sur $[\,0\,;1\,]$, nécessairement, $f(\ell) = \ell$, ainsi, $\ell(1 + 2\ell) = \ell(1 + \ell)$ soit $\ell = 0$. Ainsi, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Correction de l'exercice 22.

1. $\begin{cases} \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \end{cases}$. Par somme, on obtient, $2\cos(a)\cos($ $\cos(a+b) + \cos(a-b)$. Si $a = b$, on obtient $2\cos^2(a) = \cos(2a) + 1$, soit $\cos(2a) = \cos^2(a) - 1$.
2. Supposons que $\cos(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$. Soit $n \in \mathbb{N}$, en prenant $a = n$ et $b = 1$, on obtient
$$2\cos(n)\cos(1) = \cos(n+1) + \cos(n-1)$$
Or, comme $\cos(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$, par extraction, $\cos(n+1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ et $\cos(n-1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$. Par somme $\cos(n+1) + \cos(n-1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\ell$ De plus, $2\cos(n)\cos(1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\ell\cos(1)$. Par unicité de la limite, on obtient $2\ell = 2\ell\cos(1)$. Or, $1 \in \,]\,0\,;\pi/2\,[$, ainsi $\cos(1) > 0$, on en déduit que $\ell = 0$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2\cos^2(n) = \cos(2n) + 1$, par extraction $\cos(2n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ puis $\cos(2n) + 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. En outre, $2\cos^2(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2 \times 0^2 = 0$. Par unicité de la limite, on obtient $0 = 1$. Ceci est une contradiction, ainsi $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite divergente.

2. Car $0 \leqslant x_n \leqslant 1$ et que les inégalités larges passent à la limite.

Correction de l'exercice 23.

Correction de l'exercice 24.

Correction de l'exercice 25.

Correction de l'exercice 26.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, posons $f : x \mapsto x^3 + nx - 1$. Remarquons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car polynomiale). Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + n \geqslant 0$. Si $n = 0$, alors $f'(x) = 3x^2 = 0$ ssi $x = 0$, ainsi f' s'annule une seule fois. Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$. Dans les deux cas, f est strictement croissante. De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$ (car dérivable), ainsi f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R}) = \left] \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) ; \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \right[=]-\infty ; +\infty[= \mathbb{R}$. Ainsi, 0 admet un unique antécédent dans $\mathbb{R}$. Il existe donc une unique solution.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme f est continue et strictement croissante sur $\left[0 ; \dfrac{1}{n}\right]$, f réalise une bijection de $\left[0 ; \dfrac{1}{n}\right]$ vers
$$f\left(\left[0 ; \frac{1}{n}\right]\right) = \left[f(0) ; f\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \left[-1 ; \frac{1}{n^3}\right]$$
Comme $0 \in \left[-1 ; n^{-3}\right]$, on peut en déduire que 0 admet un unique antécédent dans $\left[0 ; \dfrac{1}{n}\right]$ par f. Et cet antécédent est x_n, donc $0 \leqslant x_n \leqslant \dfrac{1}{n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant x_n \leqslant 1/n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. D'après le théorème d'encadrement, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{x_n}{\frac{1}{n}} = nx_n = 1 - (x_n)^3$. Or $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, donc par produit, ${x_n}^3 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Ainsi, $\dfrac{x_n}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Ceci prouve que $x_n \sim \dfrac{1}{n}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, comme $x_n \sim \dfrac{1}{n}$, par puissance, on a ${x_n}^3 \sim \dfrac{1}{n^3}$ donc
$$\frac{1}{n} - x_n = \frac{1 - nx_n}{n} = \frac{(x_n)^3}{n} \sim \frac{\frac{1}{n^3}}{n} = \frac{1}{n^4}$$
5. D'après les propriétés sur les équivalents, on en déduit que $\dfrac{1}{n} - x_n = \dfrac{1}{n^4} + o\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$, ainsi, $x_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^4} + o\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$.

Correction de l'exercice 27.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $H_{n+1} - H_n = \dfrac{1}{n+1} \geqslant 0$, ainsi, $(H_n)_n$ est croissante.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $H_{2n} - H_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k} \geqslant \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2n} \times n = \dfrac{1}{2}$.
3. Comme la suite $(H_n)_n$ est croissante d'après le théorème de convergence monotone, soit elle converge soit $H_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Supposons que $(H_n)_n$ converge. Alors, $H_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$. Comme $(H_{2n})_n$ est une suite extraite de $(H_n)_n$, on a que $H_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$, par différence, $H_{2n} - H_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell - \ell$. Mais comme les inégalités larges passent à la limite, on obtient $\dfrac{1}{2} \leqslant 0$. Ce qui est absurde, donc $H_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.
4. Posons $f : x \mapsto x - \ln(1 + x)$ définie sur $]-1 ; +\infty[$. Alors, f est dérivable sur $]-1 ; +\infty[$ et
$$\forall x > -1 \qquad f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$
Ainsi, f' est positive sur $[0 ; +\infty[$ et négative sur $]-1 ; 0]$, en faisant un tableau de variation, on obtient que le minimum de f est atteint en 0. Ainsi pour tout $x > -1$, $f(x) \geqslant f(0) = 0$. D'où, pour tout $x > -1$, $\ln(1 + x) \leqslant x$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= H_{n+1} - \ln(n+2) - (H_n - \ln(n+1)) \\
&= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{n+1} - \ln(1+x) \qquad \text{avec } x = \frac{1}{n+1} > -1 \\
u_{n+1} - u_n &\geqslant \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 0
\end{aligned}$$

Où on a utilisé la question précédente, on a donc montré que $(u_n)_n$ est croissante, de même

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= H_{n+1} - \ln(n+1) - (H_n - \ln(n)) \\
&= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 + \frac{-1}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{n+1} + \ln(1+x) \qquad \text{avec } x = -\frac{1}{n+1} > -1 \\
u_{n+1} - u_n &\leqslant \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 0
\end{aligned}$$

On a donc montré que (v_n) est décroissante. De plus,

$$v_n - u_n = (H_n - \ln(n)) - (H_n - \ln(n+1)) = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Ainsi $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont des suites adjacentes.

6. Donc d'après le cours, elles convergent vers la même limite [3] γ. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant \gamma \leqslant v_n$, en particulier $u_1 \leqslant \gamma \leqslant v_1$. Or $u_1 = 1 - \ln(2) \geqslant 0$ et $v_1 = 1$, dès lors $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$. De plus, comme $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \gamma$, donc $u_n - \gamma \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, donc $u_n - \gamma = o(1)$, donc $H_n - \ln(n) - \gamma = o(1)$, d'où $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
7. Comme $\ln(n)$ est beaucoup plus grand que γ et $o(1)$, on peut penser qu'un équivalent de H_n est $\ln(n)$, pour le vérifier, on fait le quotient de H_n par $\ln(n)$ (pour $n \geqslant 2$), ainsi

$$\frac{H_n}{\ln(n)} = 1 + \frac{\gamma}{\ln(n)} + \frac{o(1)}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Donc on a bien $H_n \sim \ln(n)$.

Correction de l'exercice 28. Soit $A \in \mathbb{R}_+$. Montrons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant A$. Considérons $k \in [\![0 ; E(A)]\!]$, alors soit il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = k$ et dans ce cas ce n est unique soit il n'en existe pas, ainsi k admet au plus un antécédent. Ainsi, si on pose

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in [\![0 ; E(A)]\!]\}$$

L'ensemble E est alors un ensemble fini (éventuellement) vide avec au plus $E(A) + 1$ éléments. Notons M le plus grand de ces éléments (si E est vide, prendre $M = 42$).

Soit un entier $n \geqslant M + 1$, $n \notin E$, et comme $u_n \in \mathbb{N}$, $u_n > E(A)$ et donc $u_n \geqslant E(A) + 1 > A$. Ainsi, $n_0 = M + 1$ convient. En conclusion, on a montré que pour tout $A \in \mathbb{R}_+$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant n0$, $u_n \geqslant A$. Ceci montre que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

3. Aujourd'hui, on ignore encore si γ est un nombre rationnel ou pas, si vous trouvez la réponse, vous serez riche et célèbre, enfin... surtout célèbre.

Correction de l'exercice 29. 1. Comme u est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n| \leqslant M$. Ainsi, par inégalité triangulaire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|v_n| = \left|\frac{\sum_{k=1}^{n} u_k}{n}\right| = \frac{\left|\sum_{k=1}^{n} u_k\right|}{n} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} |u_k|}{n} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} M}{n} = \frac{nM}{n} = M$$

Ainsi, la suite v est bornée. La réciproque est fausse. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = n-1$ et $u_{2n+1} = -n$. Alors,

$$v_{2n} = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} u_k = \frac{1}{2n}\left(\sum_{\substack{k=1\\ k \text{ pair}}}^{2n} u_k + \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ impair}}}^{2n} u_k\right) = \frac{1}{2n}\left(\sum_{p=1}^{n} u_{2p} + \sum_{p=0}^{n-1} u_{2p+1}\right) = \frac{1}{2n}\sum_{p=0}^{n-1}(u_{2p+2}+u_{2p+1}) = 0$$

Tandis que

$$v_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}\left(\sum_{k=1}^{2n+1} u_k\right) = \frac{1}{2n+1}\left(\left(\sum_{k=1}^{2n} u_k\right) + u_{2n+1}\right) = \frac{1}{2n+1}(0-n) = \frac{-n}{2n+1}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|v_n| \leqslant 1$, dès lors $(v_n)_n$ est bornée, contrairement à $(u_n)_n$.

2. Corrigé sur Youtube : https://youtu.be/o1pXTIZLJ_8

Supposons que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$. Montrons que $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$. Soit $\varepsilon > 0$, alors :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^* \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad n \geqslant n_0 \quad \Longrightarrow \quad |u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant n_0$, alors :

$$|v_n - \ell| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k - \ell\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} u_k - n\ell\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{n}\ell\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}(u_k-\ell)\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|u_k - \ell|$$

Seulement attention, tous les $|u_k - \ell|$ ne sont pas tous plus petit que $\frac{\varepsilon}{2}$, seulement pour $k \geqslant n_0$. C'est pour cela que l'on va séparer la somme :

$$\begin{aligned} |v_n - \ell| &\leqslant \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n_0-1}|u_k-\ell| + \sum_{k=n_0}^{n}|u_k-\ell|\right] \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1}|u_k-\ell| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1}|u_k-\ell| + \frac{\varepsilon(n-n_0)}{2n} \\ &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1}|u_k-\ell| + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Or, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1}|u_k-\ell| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, donc il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n \geqslant n_1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1}|u_k-\ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Dès lors, pour tout entier $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, on a $0 \leqslant |v_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Ceci prouve que $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$. La réciproque est fausse, posons $u_n = (-1)^n$, alors $(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison -1. Ainsi, $v_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)}\right)$, alors $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ tandis que $(u_n)_n$ ne converge pas.

3. Supposons u est croissante, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_{n+1}-v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} u_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{n(n+1)}\left(nu_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} nu_k - (n+1)u_{k+1}\right) = \frac{1}{n(n+1)}\left(nu_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} u_k\right)$$

Or pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $u_k \leqslant u_{n+1}$, donc, $\sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant nu_{n+1}$, ceci prouve que $v_{n+1}-v_n \geqslant 0$. Par conséquent, $(v_n)_n$ est une suite croissante.

Correction de l'exercice 30. 1. Comme $(u_n)_n$ est une suite bornée, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors l'ensemble $\{u_k \mid k \geqslant n\}$ est majorée par M et non vide (car u_n appartient à cet ensemble). Ainsi, $\{u_k \mid k \geqslant n\}$ est un ensemble non vide et majorée, ainsi la borne supérieure de cet ensemble est bien un nombre réel, v_n est bien défini.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. v_n est un majorant de $\{u_k \mid k \geqslant n\}$. En particulier, pour tout $k \geqslant n+1$, $k \geqslant n$ et $u_k \leqslant v_n$. Dès lors, v_n est un majorant de $\{u_k \mid k \geqslant n+1\}$. Or v_{n+1} est le plus petit des majorants de $\{u_k \mid k \geqslant n+1\}$, ainsi $v_{n+1} \leqslant v_n$. La suite $(v_n)_n$ est décroissante.

   De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-M \leqslant u_n \leqslant v_n$ (car v_n est un majorant de $\{u_k \mid k \geqslant n+1\}$). Ainsi, la suite $(v_n)_n$ est minorée par $-M$.

3. Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant N$ tel que $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. Procédons par étapes :
   - Prenons $\varepsilon = 1$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. On pose $\varphi(0) = n$, alors $|u_{\varphi(0)} - \ell| \leqslant 1$.
   - Prenons $\varepsilon = 1/2$ et $N = \varphi(0)+1$. Alors, il existe $n \geqslant N$ tel que $|u_n - \ell| \leqslant 1/2$. Posons $\varphi(1) = n$. Dès lors, $\varphi(1) > \varphi(0)$ et $|u_{\varphi(1)} - \ell| \leqslant 1/2$.
   - Prenons $\varepsilon = 1/4$ et $N = \varphi(1)+1$. Alors, il existe $n \geqslant N$ tel que $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. Posons $\varphi(2) = n$. Dès lors, $\varphi(2) > \varphi(1) > \varphi(0)$ et $|u_{\varphi(2)} - \ell| \leqslant 1/4$.

   Pour généraliser, raisonnons par récurrence avec l'hypothèse de récurrence suivante $\mathscr{P}(n)$:

$$\exists(\varphi(0),\varphi(1),\dots,\varphi(n)) \in \mathbb{N}^n \qquad \varphi(0) < \varphi(1) < \dots < \varphi(n) \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0\,;n]\!] \quad |u_{\varphi(k)} - \ell| \leqslant 1/2^k$$

   Par ce qui précède, $\mathscr{P}(0)$, $\mathscr{P}(1)$ et $\mathscr{P}(2)$ sont vraies. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie. Posons $N = \varphi(n)+1$ et $\varepsilon = 1/2^{n+1}$. Alors, il existe $p \geqslant N$ tel que $|u_p - \ell| \leqslant \varepsilon$. Posons $\varphi(n+1) = p$. On a ainsi, $\varphi(0) < \varphi(1) < \dots < \varphi(n) < \varphi(n+1)$ et pour tout $k \in [\![0\,;n+1]\!]$, $|u_{\varphi(k)} - \ell| \leqslant 1/2^k$. Par conséquent, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Ainsi, par récurrence, on construit $\varphi(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{\varphi(n)} - \ell| \leqslant 1/2^n$. Dès lors, $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$. Ainsi, il existe une suite extraite de $(u_n)_n$ qui converge vers ℓ.

4. D'après la question 2, $(v_n)_n$ est décroissante et minorée donc d'après le théorème de la limite monotone, $(v_n)_n$ converge vers un certain ℓ. Montrons que l'hypothèse de la question 3 s'applique à la suite $(u_n)_n$. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Comme $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_1$, $|v_n - \ell| \leqslant \varepsilon/2$. Posons $n_2 = \max(n_1, N)$. Alors $|v_{n_2} - \ell| \leqslant \varepsilon/2$. De plus, $v_{n_2} = \sup\{u_k \mid k \geqslant n_2\}$ Comme $v_{n_2} - \varepsilon/2 < v_{n_2}$, $v_{n_2} - \varepsilon/2$ n'est pas un majorant de $\{u_k \mid k \geqslant n_2\}$. Par conséquent, il existe $k \geqslant n_2$ tel que $u_k > v_{n_2} - \varepsilon/2$. De plus, $u_k \leqslant v_{n_2} \leqslant v_n + \varepsilon/2$. Il en découle que $|u_k - v_{n_2}| \leqslant \varepsilon/2$. Par inégalité triangulaire

$$|u_k - \ell| \leqslant |u_k - v_{n_2}| + |v_{n_2} - \ell| \leqslant \varepsilon$$

   Ainsi, on a trouvé un $k \geqslant N$ tel que $|u_k - \ell| \leqslant \varepsilon$. L'hypothèse de la question 2 est bien vérifiée, on peut donc en conclure qu'il existe une suite extraite de $(u_n)_n$ qui converge vers ℓ.

5. Soit $(z_n)_n$ une suite complexe bornée. Il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_n| \leqslant M$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\mathrm{Re}(z_n)| \leqslant M$. Ainsi, la suite $(\mathrm{Re}(z_n))_n$ est une suite réelle bornée, ainsi, d'après ce qui précède, il existe $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\mathrm{Re}(z_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} a \in \mathbb{R}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\mathrm{Im}(z_{\varphi(n)}| \leqslant M$. Ainsi, la suite $(\mathrm{Im}(z_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle bornée, ainsi, d'après ce qui précède, il existe $\psi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\mathrm{Im}(z_{\varphi(\psi(n))}) \xrightarrow[n\to\infty]{} b$, par extraction d'une suite convergente, on a encore $\mathrm{Re}(z_{\varphi(\psi(n))}) \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. Par convergence d'une suite complexe, on a $z_{\varphi(\psi(n))} \xrightarrow[n\to\infty]{} a + ib$. Notons $\Phi = \varphi \circ \psi$, par composée de deux fonctions strictement croissante, $\Phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante et $z_{\Phi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} a + ib$.