Wallis in wonderland

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\cos^2(t) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}{2}\right)^2 = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2t} + 2 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2t}}{4} = \frac{2\cos(2t) + 2}{4} = \frac{1 + \cos(2t)}{2} \\
\cos^3(t) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}{2}\right)^3 = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,3t} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,3t}}{8} \\
&= \frac{2\cos(3t) + 6\cos(t)}{8} = \frac{\cos(3t) + 3\cos(t)}{4} \\
\cos^4(t) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}{2}\right)^4 = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,4t} + 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,3t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t} + 6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2t} + 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,3t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,4t}}{16} \\
&= \frac{2\cos(4t) + 6 + 8\cos(2t)}{16} = \frac{\cos(4t) + 3 + 4\cos(2t)}{8} \\
\cos^5(t) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}{2}\right)^5 = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,5t} + 5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,4t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t} + 10\mathrm{e}^{3t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2t} + 10\mathrm{e}^{2t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,3t} + 5\mathrm{e}^{t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,4t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,5t}}{32} \\
&= \frac{\cos(5t) + 5\cos(3t) + 10\cos(t)}{16} \\
\cos^6(t) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}{2}\right)^6 = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,6t} + 6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,5t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t} + 15\mathrm{e}^{4t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2t} + 20 + 15\mathrm{e}^{2t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,4t} + 5\mathrm{e}^{t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,5t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,6t}}{64} \\
&= \frac{\cos(6t) + 6\cos(4t) + 15\cos(2t) + 10}{32}
\end{aligned}$$

2. - $W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$
   - $W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^1(t)\,\mathrm{d}t = [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$
   - $W_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$
   - $W_3 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(3t) + 3\cos(t)}{4}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(3t)}{12} + \frac{3\sin(t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{12} + \frac{3}{4} = \frac{2}{3}$
   - $W_4 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(4t) + 3 + 4\cos(2t)}{8}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(4t)}{32} + \frac{3t}{8} + \frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{16}$

3. Posons $x = \dfrac{\pi}{2} - t$, alors $\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t$. Ainsi,

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n\left(x - \frac{\pi}{2}\right)(-\,\mathrm{d}x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^n\,\mathrm{d}x$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \cos(t) \leqslant 1$, en multipliant par $\cos^n(t) \geqslant 0$, $\cos^{n+1}(t) \leqslant \cos^n(t)$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $W_{n+1} \leqslant W_n$. Ainsi, la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
5. Comme ce qui précède, pour tout $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(t) \geqslant 0$, ainsi, $\cos^n(t) \geqslant 0$, par positivité de l'intégrale, $W_n \geqslant 0$. Ainsi, la suite $(W_n)_n$ est une suite décroissante et minorée (par 0) donc d'après le théorème de la convergence monotone, $(W_n)_n$ converge.
6. Posons $u\colon t \mapsto \cos^{n+1}(t)$ et $v\colon t \mapsto \sin(t)$. Remarquons que $(u, v) \in \mathscr{C}^1([\,0\,;\pi/2\,], \mathbb{R})^2$. De plus, $u'\colon t \mapsto (n+1)\cos^n(t)\sin(t)$ et $v'\colon t \mapsto \cos(t)$. Ainsi par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos^{n+1}(t)}_{u(t)} \times \underbrace{\cos(t)}_{v'(t)} \,\mathrm{d}t = \left[\underbrace{\cos^{n+1}(t)}_{u(t)}\, \underbrace{\sin(t)}_{v(t)}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\pi/2} \underbrace{-(n+1)\cos^n(t)\sin(t)}_{u'(t)} \times \underbrace{\sin(t)}_{v'(t)} \,\mathrm{d}t \\
&= 0 + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\sin^2(t)\,\mathrm{d}t = (n+1)\int_0^{\pi/2}\cos^n(t)(1-\cos^2(t))\,\mathrm{d}t \\
&= (n+1)\int_0^{\pi/2}\cos^n(t) - \cos^{n+2}(t)\,\mathrm{d}t = (n+1)\int_0^{\pi/2}\cos^n(t)\,\mathrm{d}t - (n+1)\int_0^{\pi/2}\cos^{n+2}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= (n+1)(W_n - W_{n+2})
\end{aligned}$$

Donc $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$, ainsi $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n$.

7. Posons l'hypothèse de récurrence : $\mathscr{P}(p)$: «$W_{2p} > 0$ et $W_{2p+1} > 0$». Comme $W_0 > 0$ et $W_1 > 0$, $\mathscr{P}(0)$ est vraie. Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons $\mathscr{P}(p)$ vraie. Alors $W_{2(p+1)} = W_{2p+2} = \dfrac{2p+1}{2p+2}W_{2p} > 0$ (par produit de nombres strictement positifs), et $W_{2(p+1)+1} = W_{2p+3} = \dfrac{2p+2}{2p+3}W_{2p+1} > 0$ (également par produit de nombre strictement positifs). On en déduit que $\mathscr{P}(p+1)$ est vraie. Ainsi, par récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $W_{2p} > 0$ et $W_{2p+1} > 0$. Comme un entier naturel est soit pair soit impair, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n \neq 0$.
8. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors d'après la question 6,

$$(n+2)W_{n+2}W_{n+1} = [(n+2)W_{n+2}]\,W_{n+1} = [(n+1)W_n]\,W_{n+1}$$

Ceci montre que la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Pour $n = 0$, on obtient que la constante vaut $1W_1W_0 = \pi/2$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)W_{n+1}W_n = \pi/2$.
9. Soit $n \in \mathbb{N}$, comme $(W_n)_n$ est décroissante, $W_{n+1} \leqslant W_n$, en divisant par W_n qui est strictement positif, on obtient $\dfrac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1$. De plus, encore une fois par décroissance de $(W_n)_n$:

$$\frac{(n+1)}{(n+2)} = \frac{W_{n+2}}{W_n} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n}$$

On en déduit les inégalités demandés.
10. Comme $\dfrac{n+1}{n+2} \sim \dfrac{n}{n} = 1$, on en déduit que $\dfrac{n+1}{n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, par théorème d'encadrement, $\dfrac{W_{n+1}}{W_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Ainsi, $W_{n+1} \sim W_n$.
11. On sait que $(n+1)W_{n+1}W_n \sim \pi/2$, en divisant par $n+1$, on obtient : $W_nW_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2(n+1)} \sim \dfrac{\pi}{2n}$. De surcroît, $W_{n+1} \sim W_n$, on obtient $W_n{}^2 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$. Or, les équivalences sont conservées par passage à l'exposant :

$$W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Comme $\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et que deux suites équivalentes ont même limite, on en déduit que $W_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
12. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, alors en utilisant la question 6, avec $n = 2p-2$, on obtient

$$W_{2p} = W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n = \frac{2p-1}{2p}W_{2p-2}$$

En utilisant la question 6 avec $n = 2p-4$, on obtient $W_{2p-2} = W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n = \dfrac{2p-3}{2p-2}W_{2p-4}$. Ainsi,

$$W_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times W_{2p-4}$$

En continuant ainsi, de proche en proche, on obtient :

$$W_{2p}=\frac{2p-1}{2p}\times\frac{2p-3}{2p-2}\times\frac{2p-5}{2p-4}\times\ldots\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times W_0$$

De même :

$$W_{2p+1}=\frac{2p}{2p+1}\times W_{2p-1}=\frac{2p}{2p+1}\times\frac{2p-2}{2p-1}W_{2p-3}=\frac{2p}{2p+1}\times\frac{2p-2}{2p-1}\times\ldots\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times W_1$$

13. Ainsi, d'après les calculs faits à la question précédente,

$$W_{2p}=\frac{\prod_{k=0}^{p-1}(2k+1)}{\prod_{k=1}^{p}(2k)}W_0=\frac{\prod_{k=0}^{p-1}(2k+1)\prod_{k=1}^{p}(2k)}{\left(\prod_{k=1}^{p}(2k)\right)^2}W_0=\frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}W_0=\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\times\frac{\pi}{2}$$

De même,

$$W_{2p+1}=\frac{\prod_{k=1}^{p}(2k)}{\prod_{k=1}^{p}(2k+1)}W_1=\frac{\left(\prod_{k=1}^{p}(2k)\right)^2}{\prod_{k=1}^{p}(2k+1)\prod_{k=1}^{p}(2k)}W_1=\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

14. Pour $p\in\mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}(p)$:«$W_{2p}=\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\times\frac{\pi}{2}$». Pour $p=0$, $\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}=W_0=W_{2\times 0}$ et Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie. Soit $p\in\mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(p)$ vérifiée, alors, en utilisant la question 6, on obtient

$$\begin{aligned}W_{2(p+1)}&=W_{2p+2}=\frac{2p+1}{2p+2}W_{2p}=\frac{2p+1}{2p+2}\times\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}=\frac{(2p+2)(2p+1)(2p)!}{2(p+1)2(p+1)2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}\\&=\frac{(2p+2)!}{2^{2(p+1)}((p+1)!)^2}\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{P}(p)$ est vraie pour tout $p\in\mathbb{N}$. De plus, d'après la question 6, $(2p+1)W_{2p+1}W_{2p}=\frac{\pi}{2}$. En divisant par W_{2p} et grâce à l'expression de W_{2p}, on obtient $W_{2p+1}=\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.

15. Ainsi, $p!\sim C\sqrt{p}\left(\frac{p}{e}\right)^p$, et $(2p)!\sim C\sqrt{2p}\left(\frac{2p}{e}\right)^{2p}$, on trouve par quotient d'équivalents que

$$W_{2p}=\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}\sim\frac{C\sqrt{2p}\left(\frac{2p}{e}\right)^{2p}}{2^{2p}\left(C\sqrt{p}\left(\frac{p}{e}\right)^p\right)^2}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{C\sqrt{2p}}\sim\sqrt{\frac{\pi}{4p}}$$

Ainsi, par division, $\frac{\pi\sqrt{4p}}{C\sqrt{2p}\sqrt{\pi}}=\frac{\sqrt{2\pi}}{C}\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}1$ Comme $\frac{\sqrt{2\pi}}{C}$ est une constante qui tend vers 1, on a que $\frac{\sqrt{2\pi}}{C}=1$, soit $C=\sqrt{2\pi}$. Par conséquent, la formule de Stirling est

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Remarque 1. On constate donc que dans un équivalent de $n!$ se trouvent deux constantes π et e qui semblaient pourtant très éloignés du produit de n entiers consécutifs.

16. Par produit et quotients d'équivalents :

$$\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}\sim\frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\right)^2}=\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

Une suite en escargot à savoir traiter vite

1. Soit $y \in f(\mathbb{R}_+)$, il existe $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $y = f(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Remarquons alors que $y \geqslant 0$ ainsi $y \in \mathbb{R}_+$. Dès lors, $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+$ est un intervalle stable par f.
2. Supposons que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$, alors comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$, par passage à la limite, $\ell \geqslant 0$ donc $\ell \in \mathbb{R}_+$. Remarquons que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc en ℓ d'après le théorème du point fixe, $f(\ell) = \ell$. ainsi, $\dfrac{1}{1+\ell} = \ell$ donc $1 = \ell(1+\ell)$. soit $\ell^2 + \ell - 1 = 0$. Le discriminant de cette équation est $5 > 0$, ainsi $\ell = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Comme $-1 - \sqrt{5} < 0$, on en déduit que $\ell = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Dès lors, si $(u_n)_n$ converge, nécessairement $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.
3. Voir figure 1

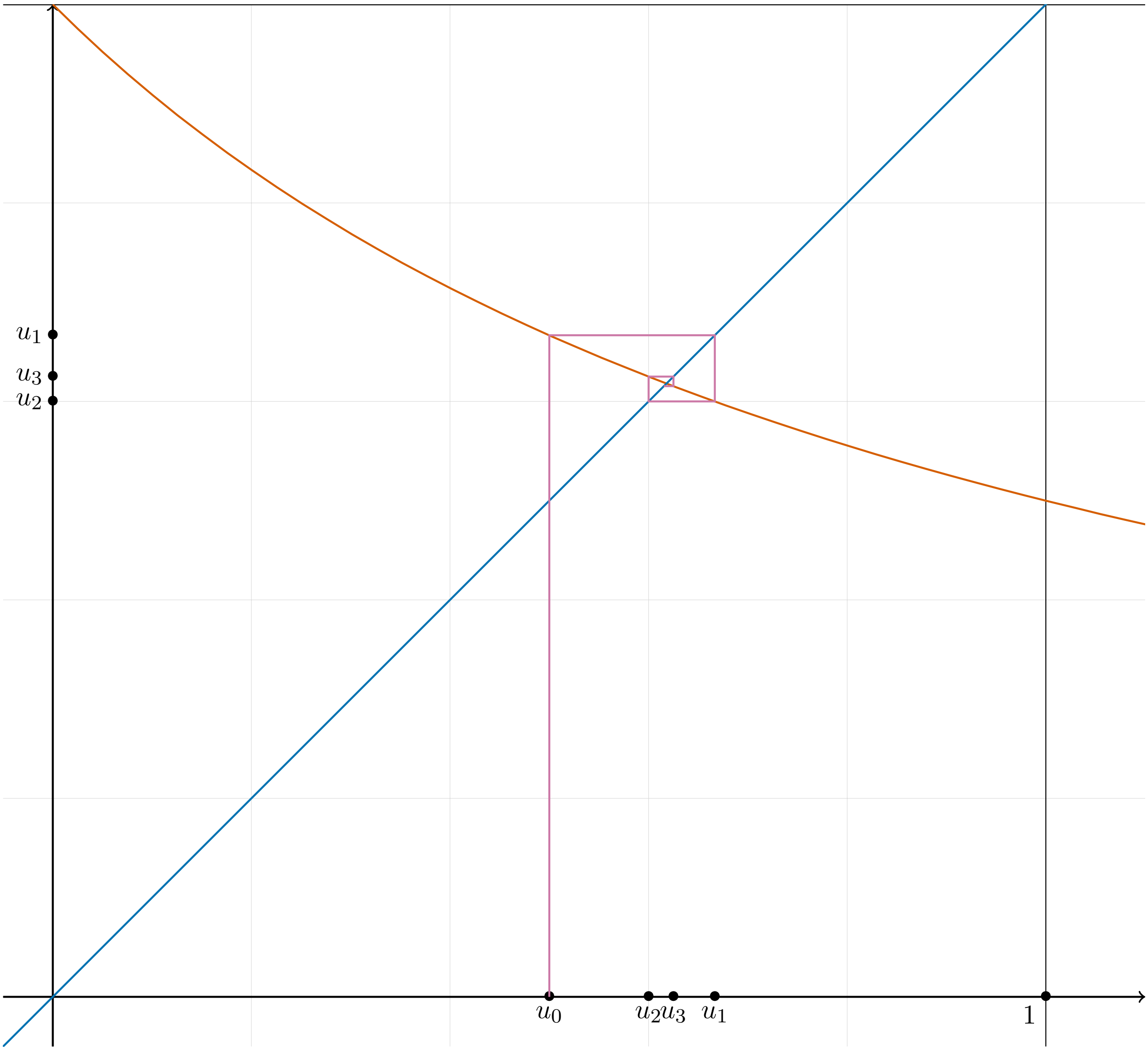

FIGURE 1 – Tracé des premiers points de la suite, vous voyez l'escargot ?

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, posons l'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}(n)$: «$u_{2n} \in [\,0\,;\ell\,]$ et $u_{2n+1} \in [\,\ell\,;1\,]$».
   - Pour $n = 0$, on a $0 \leqslant u_0 \leqslant \ell$ par hypothèse, en appliquant la fonction f qui est décroissante, $f(\ell) \leqslant f(u_0) \leqslant f(0)$, donc $\ell \leqslant u_1 \leqslant 1$. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$. Alors $\ell \leqslant u_{2n+1} \leqslant 1$ comme f est décroissante, $f(1) \leqslant f(u_{2n+1}) \leqslant f(\ell)$ donc $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{2n+2} \leqslant \ell$. Ainsi, $0 \leqslant u_{2n+2} \leqslant \ell$. Encore une fois, f est décroissante, $f(\ell) \leqslant f(u_{2n+2}) \leqslant f(0)$ soit $\ell \leqslant u_{2n+3} \leqslant 1$. Dès lors, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   - Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \in [\,0\,;\ell\,]$ et $u_{2n+1} \in [\,\ell\,;1\,]$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f(f(x)) - x = \frac{1}{1+f(x)} - x = \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}} - x = \frac{1+x}{1+x+1} - x = \frac{1+x-x(2+x)}{2+x} = \frac{-x^2-x+1}{2+x}$$

Ainsi, pour $x \geqslant \ell$, $f(f(x)) - x \leqslant 0$ et pour $x \in [\,0\,;\ell\,]$, $f(f(x)) - x \geqslant 0$.

6. Posons $g = f \circ f$, alors g est croissante sur $\mathbb{R}_+$ (par composée de fonctions décroissantes sur $\mathbb{R}_+$). Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = u_{2(n+2)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = g(v_n)$$

Comme g est croissante et que $(v_n)_n$ est une suite définie par récurrence grâce à la fonction g, on en déduit que $(v_n)_n$ est monotone. De plus, comme $v_0 = u_0 \in [\,0\,;\ell\,]$ en utilisant la question précédente, $v_1 - v_0 = g(v_0) - v_0 \geqslant 0$, on en déduit que $(v_n)_n$ est une suite croissante.
De même, remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_{n+1} = u_{2(n+1)+1} = u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f(f(u_{2n+1})) = g(v_n)$$

Comme g est croissante et que $(w_n)_n$ est une suite définie par récurrence grâce à la fonction g, on en déduit que $(w_n)_n$ est monotone. De plus, comme $w_0 = u_1 \in [\,\ell\,;1\,]$ en utilisant la question précédente, $w_1 - w_0 = g(w_0) - w_0 \leqslant 0$, on en déduit que $(w_n)_n$ est une suite décroissante.

7. La suite $(v_n)_n$ est croissante et majorée par ℓ. D'après le théorème de la limite monotone, $(v_n)_n$ converge vers une limite ℓ'. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant v_n \leqslant \ell$, on obtient $0 \leqslant \ell' \leqslant \ell$. Comme, g est continue en ℓ', le théorème du point fixe assure que $g(\ell') = \ell'$. Or, $g(\ell') = \ell'$ ssi $g(\ell') - \ell' = 0$ ssi $\ell' = \ell$ (en utilisant la question 5). Ainsi, $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.
La suite $(w_n)_n$ est décroissante et minorée par ℓ. D'après le théorème de la limite monotone, $(w_n)_n$ converge vers une limite ℓ''. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ell \leqslant w_n$, on obtient $\ell \leqslant \ell''$. Comme, g est continue, $g(\ell'') = \ell''$. Or, $g(\ell'') = \ell''$ ssi $g(\ell'') - \ell'' = 0$ ssi $\ell'' = \ell$ (en utilisant la question 5). Ainsi, $w_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.
Ainsi, $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite ℓ, d'après le théorème du cours,

$$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$