



Table des matières

1	Polynôme et premières propriétés	2
1.1	Définition d'un polynôme, degré et opérations	2
1.2	Fonctions polynomiales et racines	4
1.3	Polynôme dérivé	4
2	Arithmétique des polynômes	6
2.1	Divisibilité	6
2.2	Division euclidienne	6
2.3	Racines et divisibilité	7
2.4	Polynômes irréductibles et factorisation d'un polynôme	8
3	Décomposition en éléments simples	11
4	Construction des polynômes (non exigible)	12

1 Polynôme et premières propriétés

1.1 Définition d'un polynôme, degré et opérations



Définition d'un polynôme

Un **polynôme à coefficients dans** \mathbb{K} est un objet de la forme $\sum_{k=0}^n a_k X^k = a_0 X^0 + a_1 X^1 + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n$ ($n \in \mathbb{N}$ et $a_k \in \mathbb{K}$). X est l'**indéterminée**, par convention $X^0 = 1$. On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes.

Remarque 1. L'indéterminée X n'est pas *vraiment* définie ici. C'est un objet formel (ce n'est pas un nombre ni une variable ni une fonction) utilisé pour définir les polynômes. De même, le nombre complexe i , qui n'est pas *vraiment* défini, vous permet de définir les complexes.

Remarque 2. Le n dépend du polynôme choisi. Par exemple, pour $2+3X$: $n = 1$, pour $1-X^4$: $n = 4$. Malheureusement, ce n n'est pas unique, en effet, on peut aussi prendre $n' = 3$ dans le premier polynôme car $2+3X = 2+3X+0X^2+0X^3$: on peut toujours prendre $n' > n$ et si besoin poser $a_k = 0$ pour $k > n$.

Remarque 3. Deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux :

$$\forall P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X] \quad \forall Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k \in \mathbb{K}[X] \quad (P = Q \iff \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad a_k = b_k)$$



Définition du degré d'un polynôme, du coefficient dominant, d'un polynôme unitaire

- Si tous les coefficients d'un polynôme sont nuls, on dit que c'est le polynôme nul, noté 0 .
- Soient $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme non nul et $d = \max\{k \in \llbracket 0; n \rrbracket \mid a_k \neq 0\}$ de sorte que $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$.
L'entier d est appelé **degré** de P et est noté $d^\circ P = d$. On pose, par convention, $d^\circ 0 = -\infty$.
- On appelle **coefficient dominant** de P le coefficient a_d . On dit que P est **unitaire** si $a_d = 1$.
- On dit que P est un **polynôme constant** si $d^\circ P \leq 0$, dans ce cas $P = a_0$.
- Les polynômes X^n sont appelés **monômes**.
- On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égale à n .

Exemple 1. $d^\circ 3 =$ $d^\circ X + 2 =$ $d^\circ X^n =$ $d^\circ (aX^2 + bX + c) =$



Attention à ne pas confondre degré n et somme dont le dernier terme est X^n

L'écriture $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ n'implique pas $d^\circ P = n$ seulement que $d^\circ P \leq n$. De plus, $a_n \neq 0$ ssi $d^\circ P = n$.



Définition de somme/multiplication par un scalaire/multiplication/composée

Soient $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, $\tilde{P} = \sum_{k=0}^p \tilde{a}_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^q b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit les polynômes suivants :

- $P + \tilde{P} = \sum_{k=0}^p a_k X^k + \sum_{k=0}^p \tilde{a}_k X^k = \sum_{k=0}^p (a_k + \tilde{a}_k) X^k$ et $\lambda P = \lambda \sum_{k=0}^p a_k X^k = \sum_{k=0}^p (\lambda a_k) X^k$
- $PQ = \sum_{k=0}^{p+q} c_k X^k$ avec pour tout $k \in \llbracket 0; p+q \rrbracket$, $c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$ autrement dit

$$\sum_{k=0}^p a_k X^k \times \sum_{k=0}^q b_k X^k = \sum_{k=0}^{p+q} \left(\sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \right) X^k$$

On pose, par convention, $P^0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P^n = P \times P \times \dots \times P$.

- $P \circ Q = P(Q) = \sum_{k=0}^p a_k Q^k$

- Remarque 4.** • Pour définir la somme de deux polynômes, il faut le même nombre de termes dans les deux sommes (quitte à rajouter des zéros manquants).
- Ce n'est pas le cas, en revanche pour le produit de deux polynômes. De plus, $c_0 = a_0b_0$ tandis que $c_{p+q} = a_p b_q$.
 - $P(X) = P$



Proposition n° 1 : propriétés des opérations sur les polynômes

Si $(P, Q, R) \in \mathbb{K}[X]^3$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ alors :

- | | | | |
|--|--|--|---------------------------|
| 1. $P + Q = Q + P$ | l'addition est commutative | 7. $(PQ)R = P(QR)$ | le produit est associatif |
| 2. $(P + Q) + R = P + (Q + R)$ | associativité | 8. $P(Q + R) = PQ + PR$ | distributivité |
| 3. $0 + P = P$ | existence du neutre | 9. $(P + Q)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^k Q^{n-k}$ | |
| 4. $P + (-1) \times P = 0$ | existence de l'opposé | $P^n - Q^n = (P - Q) \sum_{k=0}^{n-1} P^k Q^{n-1-k}$ | |
| 5. $(\lambda P) \times Q = \lambda(PQ)$ | $1 \times P = P$ | | |
| $\lambda(P + Q) = \lambda P + \lambda Q$ | $(\lambda + \mu)P = \lambda P + \mu P$ | | |
| 6. $PQ = QP$ | le produit est commutatif | | |

Exemple 2. Grâce à $(1 + X)^{2n}$, démontrer que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Exemple 3. Si $P = 2X^2 + 3X$, $Q = X^3 - 2X$ et $R = -2X^2 + 2$, que penser du degré de $P + Q$, $P + R$ et PQ ?



Proposition n° 2 : propriétés sur le degré et intégrité

Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, alors :

- | | |
|---|--|
| 1. $d^\circ(P + Q) \leq \max(d^\circ P, d^\circ Q)$ | 3. $d^\circ \lambda P = d^\circ P$ si $\lambda \in \mathbb{K}^*$ |
| Si $d^\circ P \neq d^\circ Q$, alors $d^\circ(P + Q) = \max(d^\circ P, d^\circ Q)$ | 4. $d^\circ(P \circ Q) = d^\circ P \times d^\circ Q$ si Q non constant |
| 2. $d^\circ PQ = d^\circ P + d^\circ Q$ | 5. Si $PQ = 0$ alors $P = 0$ ou $Q = 0$ |



Attention au degré de la somme

➤ En général, le degré de la somme n'est pas égale à la somme des degrés ni au maximum des degrés.

Démonstration de la proposition n° 2 : Posons $p = d^\circ P$ et $q = d^\circ Q$, de sorte que $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^q b_k X^k$ avec $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$.

1. Il y a trois cas :

- Si $p > q$, alors $P + Q = \sum_{k=0}^q (a_k + b_k) X^k + \sum_{k=q+1}^p a_k X^k$ avec $a_p \neq 0$, de sorte que $d^\circ(P + Q) = p = \max(p, q) = \max(d^\circ P, d^\circ Q)$.
- Si $p < q$, alors idem que précédemment, en changeant les rôles de P et Q .
- Si $p = q$, alors $P + Q = \sum_{k=0}^p (a_k + b_k) X^k$. Donc si $a_k + b_k \neq 0$, alors $d^\circ(P + Q) = p = \max(d^\circ P, d^\circ Q)$. Si $a_k + b_k = 0$, alors $P + Q = \sum_{k=0}^{p-1} (a_k + b_k) X^k$ et donc $d^\circ(P + Q) \leq p - 1 < p = \max(d^\circ P, d^\circ Q)$.

2. Par définition, du produit de deux polynômes, $PQ = \sum_{k=0}^{p+q} c_k X^k$ avec $c_{p+q} = a_p b_q \neq 0$, ainsi $d^\circ PQ = p + q = d^\circ P + d^\circ Q$.
3. Utiliser la propriété précédente avec $Q = \lambda$, alors $d^\circ Q = 0$.
4. Par le point 2 : $d^\circ Q^2 = d^\circ Q + d^\circ Q = 2q$. Puis, par une récurrence facile, $d^\circ Q^k = kq$. Ainsi,

$$P(Q) = \sum_{k=0}^p a_k Q^k = a_p Q^p + \sum_{k=0}^{p-1} a_k Q^k$$

Or, $d^\circ a_p Q^p = pq$ ($a_p \neq 0$) et $d^\circ \left(\sum_{k=0}^{p-1} a_k Q^k \right) \leq (p-1)q < pq$ ($q \geq 1$). Comme les degrés sont différents, par la propriété du degré de la somme : $d^\circ P(Q) = pq = d^\circ P + d^\circ Q$.

5. Par contraposée, si $P \neq 0$ et $Q \neq 0$. Ainsi, $d^\circ P \geq 0$, $d^\circ Q \geq 0$. Par conséquent, $d^\circ PQ = d^\circ P + d^\circ Q \geq 0$, dès lors, $PQ \neq 0$. ■

1.2 Fonctions polynomiales et racines



Définition d'une fonction polynômiale

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On dit que $\tilde{P} : \begin{cases} \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} \\ x \mapsto P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \end{cases}$ est la **fonction polynômiale** associée à P .

Remarque 5. Formellement, le polynôme P et la fonction polynômiale \tilde{P} sont des objets différents. Cependant, les concours autorisent parfois de confondre les deux notions.

Remarque 6. Pour tout $x \in \mathbb{K}$, $\widetilde{P+Q}(x) = \tilde{P}(x) + \tilde{Q}(x)$ et $\widetilde{PQ}(x) = \tilde{P}(x)\tilde{Q}(x)$, $\widetilde{P \circ Q}(x) = \tilde{P}(\tilde{Q}(x))$.



Définition d'une racine d'un polynôme

Soit P un polynôme et $x \in \mathbb{K}$, on dit que x est une racine de P si $P(x) = 0$.

Exemple 4. Est-ce que 1 est racine de $P = X^3 + X^2 - X - 1$?

Remarque 7. Si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Pour $x_0 \in \mathbb{K}$, on peut calculer $P(x_0)$ par la méthode de Horner (moins de calculs que la méthode naïve) :

$$P(x_0) = a_0 + x_0(a_1 + x_0(a_2 + x_0(a_3 + \dots)))$$

1.3 Polynôme dérivé



Définition de la dérivée d'un polynôme

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On définit le polynôme dérivé de P , par $P' = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) a_{j+1} X^j$
 Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit $P^{(k)}$ comme le polynôme obtenu en dérivant k fois $P : P^{(0)} = P, P^{(1)} = P', P^{(2)} = P''$



Proposition n° 3 : propriétés de la dérivée

Soient $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$.

1. Si P est non constant alors $d^\circ P' = d^\circ P - 1$ de façon générale, $d^\circ P' \leq d^\circ P - 1$ et $d^\circ P^{(k)} \leq d^\circ P - k$

2. $(\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q'$

3. $(PQ)' = PQ' + P'Q$ de façon générale $(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$

4. $(X^n)^{(k)} = 0$ si $k > n$ et $(X^n)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k}$ si $k \leq n$.

Démonstration de la proposition n° 3 :

1.

2. Prenons $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k$ (encore une fois, on complète avec des zéros pour que les sommes finissent avec le même indice n). Alors, $(\lambda P + Q) = \sum_{k=0}^n (\lambda a_k + b_k) X^k$. Ainsi :

$$(\lambda P + Q)' = \sum_{k=1}^n k(\lambda a_k + b_k) X^{k-1} = \lambda \sum_{k=1}^n a_k X^{k-1} + \sum_{k=1}^n b_k X^{k-1} = \lambda P' + Q'$$

3. Par produit de deux polynômes et par dérivation :

$$\begin{aligned}
 PQ &= \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \right) X^k \\
 (PQ)' &= \sum_{k=1}^{2n} \left(k \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \right) X^{k-1} \\
 (PQ)' &= \sum_{j=0}^{2n} \left((j+1) \sum_{i=0}^{j+1} a_i b_{j+1-i} \right) X^j
 \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
 PQ' + P'Q &= \sum_{k=0}^n a_k X^k \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) b_{k+1} X^k + \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k \sum_{k=0}^n b_k X^k \\
 &= \sum_{k=0}^{2n-1} \left(\sum_{i=0}^k a_i (k-i+1) b_{k-i+1} \right) X^k + \sum_{k=0}^{2n-1} \left(\sum_{i=0}^k (i+1) a_{i+1} b_{k-i} \right) X^k \\
 &= \sum_{k=0}^{2n-1} \left(\sum_{i=0}^k a_i (k-i+1) b_{k-i+1} + \sum_{i=1}^{k+1} i a_i b_{k+1-i} \right) X^k \\
 &= \sum_{k=0}^{2n-1} \left(\sum_{i=0}^{k+1} a_i (k-i+1) b_{k-i+1} + i a_i b_{k+1-i} \right) X^k \\
 &= \sum_{k=0}^{2n-1} \left((k+1) \sum_{i=0}^{k+1} a_i b_{k+1-i} \right) X^k
 \end{aligned}$$

Posons l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$: « $(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$ ».

- Pour $n = 0$, $(PQ)^0 = PQ$ et $\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} P^{(k)} Q^{(0-k)} = PQ$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. D'après $\mathcal{P}(n)$, $(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$. En dérivant une somme puis un produit

$$\begin{aligned}
 ((PQ)^{(n)})' &= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)} \right)' = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(P^{(k)} Q^{(n-k)} \right)' \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left[\left(P^{(k)} \right)' Q^{(n-k)} + P^{(k)} \left(Q^{(n-k)} \right)' \right] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left[P^{(k+1)} Q^{(n-k)} + P^{(k)} Q^{(n+1-k)} \right] \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^{(k+1)} Q^{(n-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n+1-k)} \\
 &= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} P^{(i)} Q^{(n+1-i)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n+1-k)} \\
 &= \sum_{i=1}^n \binom{n}{i-1} P^{(i)} Q^{(n+1-i)} + \binom{n}{n} P^{(n+1)} Q^{(0)} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n+1-k)} + \binom{n}{0} P^{(0)} Q^{(n+1)} \\
 &= P^{(n+1)} Q^{(0)} + P^{(0)} Q^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] P^{(k)} Q^{(n+1-k)} \\
 &= \binom{n+1}{n+1} P^{(n+1)} Q^{(0)} + \binom{n+1}{0} P^{(0)} Q^{(n)} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} P^{(k)} Q^{(n+1-k)} \\
 (PQ)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} P^{(k)} Q^{(n+1-k)}
 \end{aligned}$$

Ceci prouve que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P = X^n$. Posons $\mathcal{P}(k)$: « $P^{(k)} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases} \gg$

- Pour $k = 0$, $\frac{n!}{(n-0)!} X^{n-0} = X^n = P^{(0)}$ avec $0 \leq n$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons, $\mathcal{P}(k)$ vérifiée et montrons $\mathcal{P}(k+1)$, distinguons trois cas :

— Si $k < n$, alors $P^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k}$, ainsi en dérivant :

$$(P^{(k)})' = \frac{n!}{(n-k)!} (n-k) X^{n-k-1} = \frac{n!}{(n-k-1)!(n-k)} (n-k) X^{n-(k+1)} = \frac{n!}{(n-(k+1))!} X^{n-(k+1)}$$

Comme $k < n$, $k+1 \leq n$.

- Si $k = n$, alors $P^{(k)} = n!$ ainsi $P^{(k+1)} = 0$ avec $k+1 > n$.
- Si $k > n$, $P^{(k)} = 0$ en dérivant $P^{(k+1)} = 0$ avec $k+1 > n$.

Dans tous les cas, $P^{(k+1)} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-(k+1))!} X^{n-(k+1)} & \text{si } k \leq n+1 \\ 0 & \text{si } k > n+1 \end{cases}$. Ceci prouve que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

- Par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie. ■



Théorème n° 1 : formule de Taylor pour les polynômes

Soit $P = \sum_{k=0}^n c_k X^k \in \mathbb{K}_n[X]$ et $a \in \mathbb{K}$, alors

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$$

En particulier, pour $a = 0$, pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $c_k = P^{(k)}(0)/k!$.

2 Arithmétique des polynômes

2.1 Divisibilité



Définition de la divisibilité

Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$, on dit que B divise A (ou que A est multiple de B) s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$. On note $B|A$ lire « B divise A ».

Exemple 5. Est-ce que $X^2 + X - 2$ est un multiple de $X + 2$? Est-ce que $X - 1|X^n - 1$? Est-ce que $X + 1|X^3 + 1$?

2.2 Division euclidienne



Théorème n° 2 de la division euclidienne

Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$. Il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A = BQ + R$ avec $d^\circ R < d^\circ B$. L'écriture $A = BQ + R$ s'appelle **la division euclidienne de A par B** , Q est le quotient et R le reste.

Démonstration du théorème n° 2 :

- Méthode 1 pour démontrer l'existence. Notons $d = d^\circ B$. Posons l'hypothèse de récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$: $\mathcal{P}(n)$:

$$\llcorner d^\circ A < n \quad \implies \quad (\exists (Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad A = BQ + R \text{ avec } d^\circ R < d^\circ B) \llcorner$$

Remarquons que si $d^\circ A < d = d^\circ B$, alors $A = B \times 0 + R$ avec $R = A$. Ainsi, $\mathcal{P}(d)$ est vraie. Soit un entier $n \geq d$, supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$. Supposons $d^\circ A < n+1$, si $d^\circ A < n$, alors on applique directement $\mathcal{P}(n)$ à A . Si $d^\circ A = n$. Dotons α le coefficient dominant de A et β le coefficient dominant de B . Posons $\tilde{A} = A - \frac{\alpha}{\beta} X^{n-d} B$. Alors, $d^\circ \tilde{A} < d^\circ A \leq n$.

On applique donc $\mathcal{P}(n)$ à \tilde{A} : il existe $(\tilde{Q}, \tilde{R}) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $\tilde{A} = B\tilde{Q} + \tilde{R}$ avec $d^\circ \tilde{R} < d^\circ B$. Ainsi, $A = \left(\frac{\alpha}{\beta} + \tilde{Q}\right)B + \tilde{R}$.

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, la propriété est vraie pour tout entier $n \geq d'$.

- Méthode 2 pour démontrer l'existence. Considérons $D = \{d^\circ(A - BQ) \mid Q \in \mathbb{K}[X]\} \subset \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$. Comme $D \neq \emptyset$ (prendre $Q = 0$, permet d'affirmer que $d^\circ A \in D$). Ainsi, $\min(D)$ existe : il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $d^\circ(A - BQ) = \min(D)$ ¹. Posons $R = A - BQ$, de sorte que $A = BQ + R$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $d = d^\circ R \geq d' = d^\circ B$. Notons r_d le coefficient dominant de R et $b_{d'}$ celui de B . Posons

$$\tilde{R} = R + \left(-\frac{r_d}{b_{d'}} X^{d-d'} B\right)$$

1. Potentiellement, $\min(D) = -\infty$ ce qui est un peu litigieux, on pourrait l'exclure, en notant d'abord que l'existence est acquise si B divise A .

Alors $d^\circ(-\frac{r_d}{b_{d'}}X^{d-d'}B) = d^\circ X^{d-d'} + d^\circ B = d - d' + d' = d$ et le coefficient dominant de $(-\frac{r_d}{b_{d'}}X^{d-d'})B$ est $-r_d$. Ainsi, on a deux polynômes de même degré avec des coefficients dominants opposés donc $d^\circ \tilde{R} < d^\circ R = \min(D)$. Pourtant $\tilde{R} = A - B(Q + \frac{r_d}{b_{d'}}X^{d-d'})$, donc $d^\circ \tilde{R} \in D$ ce qui contredit la minimalité de D . Ceci démontre que $d^\circ R < d^\circ B$, avec $A = BQ + R$.

- Démonstration de l'unicité : supposons que $A = BQ + R = B\tilde{Q} + \tilde{R}$ avec $d^\circ R < d^\circ B$ et $d^\circ \tilde{R} < d^\circ B$. Alors $B(Q - \tilde{Q}) = \tilde{R} - R$, alors

$$d^\circ B + d^\circ(Q - \tilde{Q}) = d^\circ(\tilde{R} - R) \leq \max(d^\circ \tilde{R}, d^\circ R) < d^\circ \tilde{B}$$

Il est donc nécessaire que $d^\circ(Q - \tilde{Q}) < 0$, donc que $Q = \tilde{Q}$. Ainsi, $R = A - BQ = A - B\tilde{Q} = \tilde{R}$. ■



Attention à ne pas confondre la divisibilité et la division euclidienne



La question « B divise A ?» à laquelle on répond par oui ou par non.

La division euclidienne de A par B consiste à **trouver** Q et R tel que $A = BQ + R$ avec $d^\circ R < d^\circ B$.



Proposition n° 4 : équivalence entre divisibilité et reste de la division euclidienne

Soit B un polynôme non nul. $B|A$ ssi le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

Démonstration de la proposition n° 4 : Si le reste de la division euclidienne de A par B est nul, alors $A = BQ + 0$ donc $A = BQ$ et B divise A . Si B divise A , alors $A = BQ$ pour un certain $Q \in \mathbb{K}[X]$. Dès lors, $A = BQ + R$ avec $R = 0$ et $d^\circ R = -\infty < d^\circ B$. Par unicité de la division euclidienne, $R = 0$ est le reste de la division euclidienne. ■



Comment calculer une division euclidienne ?

Deux méthodes :

1. Poser la division comme à l'école primaire (fonctionne si $d^\circ A$ est petit)
2. Utiliser les racines de B permet de trouver le reste.

Exemple 6. Effectuer la division euclidienne de $X^5 + 2X^4 + X^3 + 2$ par $X^2 + 1$. Trouver le reste de la division euclidienne de $X^n + X^{n-1} + 1$ par $X^2 - 3X + 2$ puis par $X^2 - 4X + 4$

2.3 Racines et divisibilité



Proposition n° 5 : caractérisation des racines avec la divisibilité

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Le nombre a est racine de P si et seulement si $X - a|P$.

Démonstration de la proposition n° 5 : Supposons que $X - a|P$, alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - a)Q$. Dès lors, $P(a) = (a - a)Q(a) = 0$ donc a est racine de P . Supposons que a soit racine de P . Effectuons la division euclidienne de P par $X - a$: il existe deux polynômes Q et R tel que $P = (X - a)Q + R$ avec $d^\circ R < d^\circ(X - a) = 1$. Ainsi, R est un polynôme constant $R = r_0 \in \mathbb{K}$. Donc $P = (X - a)Q + r_0$. En substituant a à X , il vient $P(a) = (a - a)Q(a) + r_0$, donc $0 = 0 + r_0$, bref $r_0 = 0$ et donc $P = (X - a)Q$. Ceci prouve que $X - a|P$. ■



Définition de la multiplicité d'une racine

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul et $a \in \mathbb{K}$. La **multiplicité** (ou l'**ordre**) de a dans P est le plus grand entier m tel que $(X - a)^m$ divise P .

- Si $m = 0$, a n'est pas racine de P .
- Si $m = 1$, a est racine simple de P .
- Si $m = 2$, a est racine double de P .

**Proposition n° 6 : caractérisation d'une racine de multiplicité m**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul et $a \in \mathbb{K}$. Sont équivalents :

1. a est racine d'ordre m
2. Il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - a)^m Q$ avec $Q(a) \neq 0$
3. Pour tout $i \in \llbracket 0; m - 1 \rrbracket$, $P^{(i)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$

Exemple 7. Si $P = X^3 - 7X^2 + 15X - 9$, quelles sont les multiplicités de 1, 2 et 3 dans P ?

Démonstration de la proposition n° 6 :

1 \implies 2 Comme a est racine d'ordre m , il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - a)^m Q$. Supposons que $Q(a) = 0$, alors $X - a \mid Q$ et donc $Q = (X - a)R$, ainsi, $P = (X - a)^{m+1}R$ ce qui contredit le fait que m soit la multiplicité de a dans P . Donc $Q(a) \neq 0$.

2 \implies 1 Supposons que $P = (X - a)^m Q$ avec $Q(a) \neq 0$. Notons μ la multiplicité de a . Comme $(X - a)^m \mid P$, $m \leq \mu$, alors $P = (X - a)^\mu R$ pour un certain $R \in \mathbb{K}[X]$. En factorisant la différence des deux expressions de P , on obtient :

$$P - P = (X - a)^m [(X - a)^{\mu-m} R - Q] = 0$$

Comme $(X - a)^m$ n'est pas le polynôme nul, par intégrité de $\mathbb{K}[X]$, $(X - a)^{\mu-m} R - Q = 0$. En substituant a à X , on obtient $Q(a) = (a - a)^{\mu-m} R(a) \neq 0$ ce qui est possible que si $\mu = m$. Ainsi, m est bien la multiplicité de a .

2 \implies 3 Supposons que $P = (X - a)^m Q$ avec $Q(a) \neq 0$. Alors, on calcule $P^{(i)}$ pour $i \in \llbracket 0; m \rrbracket$, grâce à la formule de Leibniz et on observe que $P^{(i)}(a) = 0$ pour $i < m$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$.

3 \implies 2 Supposons que pour tout $i \in \llbracket 0; m - 1 \rrbracket$, $P^{(i)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$. Alors en appliquant la formule de Taylor :

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k = \sum_{k=m}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k = (X - a)^m \underbrace{\left[\sum_{k=m}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^{k-m} \right]}_Q$$

Avec $Q(a) = \frac{P^{(m)}(a)}{m!} \neq 0$. ■

**Proposition n° 7 : racine et racine conjugué d'un polynôme réel**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $z \in \mathbb{C}$ une racine de P , alors \bar{z} est aussi racine de P avec même multiplicité que z .

Démonstration de la proposition n° 7 : Soit $Q = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(z) = 0$, alors

$$Q(\bar{z}) = \sum_{k=0}^n a_k \bar{z}^k = \sum_{k=0}^n \overline{a_k z^k} = \sum_{k=0}^n \overline{a_k} \overline{z^k} = \sum_{k=0}^n \overline{a_k z^k} = \overline{\sum_{k=0}^n a_k z^k} = \overline{Q(z)} = \overline{0} = 0$$

De même, si $Q(\bar{z}) = 0$ alors en appliquant ce résultat à $z' = \bar{z}$, $Q(z) = 0$. Ce qui montre que z est racine de Q ssi \bar{z} est racine de Q . Ainsi, pour $k \in \mathbb{N}$, $P^{(k)}(z) = 0$ si et seulement si $P^{(k)}(\bar{z}) = 0$. Ainsi, d'après la proposition 9, z et \bar{z} sont racines de P avec même multiplicité. ■

2.4 Polynômes irréductibles et factorisation d'un polynôme

**Définition d'un polynôme scindé, scindé à racines simples**

On dit que $P \in \mathbb{K}[X]$ est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ s'il s'écrit comme le produit de polynômes de degré 1. De plus, si toutes les racines sont simples, on dit qu'il est scindé à racines simples.

Exemple 8. $X^2 + 1$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$ mais pas dans $\mathbb{R}[X]$.

Remarque 8. Soit P un polynôme et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, alors $\lambda P \mid P$ et $\lambda \mid P$. On dit que λP et λ sont des diviseurs triviaux.

**Définition d'un polynôme irréductible**

Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant est dit **irréductible** si ses seuls diviseurs sont λP et λ pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Exemple 9. $X^2 - 3X + 2$ n'est pas irréductible.

Exemple 10. Les polynômes de degré 1 de $\mathbb{K}[X]$ sont irréductibles.

Démonstration de l'exemple 10 : Soit P un polynôme de degré 1. Montrons qu'il est irréductible. Si D un diviseur de P , montrons que D est constant ou colinéaire à P . Il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = DQ$. Ainsi, $1 = d^\circ P = d^\circ D + d^\circ Q$. Remarquons que D et Q ne peuvent pas être nuls (car sinon le produit ne vaut pas P). Ainsi, $d^\circ D$ et $d^\circ Q$ sont des entiers naturels. Donc $d^\circ D = 0$ ou $d^\circ D = 1$. Si $d^\circ D = 0$ alors D est constant. Si $d^\circ D = 1$, alors $d^\circ Q = 0$ et donc $Q = \lambda \in \mathbb{K}^*$, dès lors, $D = \frac{1}{\lambda}P$. Bref, dans tous les cas, D est un diviseur trivial de P . Par conséquent, P est irréductible.



Théorème n° 3 : théorème de d'Alembert-Gauss (théorème fondamental de l'algèbre)

(admis)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant, alors P admet au moins une racine complexe.



Théorème n° 4 : factorisation d'un polynôme à coefficients réels ou complexes

1. Si $P \in \mathbb{C}[X]$ est non constant, alors il est scindé : il s'écrit sous la forme
$$P = \lambda \prod_{i=1}^r (X - z_i)^{m_i}$$
 Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près : λ est le coefficient dominant, les $z_i \in \mathbb{C}$ sont les racines (deux à deux distinctes) de multiplicité $m_i \in \mathbb{N}^*$.

2. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est non constant, alors P s'écrit sous la forme
$$P = \lambda \prod_{i=1}^r (X - x_i)^{m_i} \times \prod_{i=1}^s Q_i^{n_i}$$
 Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près : λ est le coefficient dominant, les $x_i \in \mathbb{R}$ sont les racines (deux à deux distinctes) de multiplicité $m_i \in \mathbb{N}^*$, Q_i des polynômes unitaires de degré 2 à discriminant strictement négatifs et $n_i \in \mathbb{N}^*$.

Remarque 9. Un polynôme de degré n a donc n racines complexes comptées avec multiplicité.

Exemple 11. Factoriser $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Démonstration du théorème n° 4 :

1. Posons l'hypothèse de récurrence : $\mathcal{P}(k)$: «Si $d^\circ P = k$, alors il existe des complexes z_i deux à deux distincts, des entiers naturels non nuls m_i et $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tels que $P = \lambda \prod_{i=1}^r (X - z_i)^{m_i}$ ».

- Si $k = 1$. Prenons donc $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré 1. Alors $P = aX + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $a \neq 0$, alors $P = a \left(X - \frac{-b}{a} \right)$. P est donc bien de la forme voulue. Ainsi, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons par récurrence forte que pour tout $j \in \llbracket 1; k \rrbracket$, $\mathcal{P}(j)$ vraie. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $d^\circ P = k + 1 \geq 1$. Alors d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, P admet une racine $z_1 \in \mathbb{C}$. Notons $m_1 \in \mathbb{N}^*$ sa multiplicité : il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = (X - z_1)^{m_1} Q$ avec $Q(z_1) \neq 0$. Si Q est constant alors (Q est nécessairement non nul) et $P = \lambda (X - z_1)^{m_1}$ avec $\lambda = Q \in \mathbb{C}^*$ convient. Si $d^\circ Q \geq 1$: or, $n + 1 = d^\circ P = m_1 + d^\circ Q$. Ceci prouve que $d^\circ Q = k + 1 - m_1 \leq n$ (car $m_1 \geq 1$). Si on note $j = d^\circ Q$, alors $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, d'après l'hypothèse de récurrence forte, $\mathcal{P}(j)$ est vraie. Donc $Q = \lambda \prod_{i=2}^r (X - z_i)^{m_i}$ pour des z_i 2 à 2 distincts, $m_i \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Notons, que comme $Q(z_1) \neq 0$, $Q(z_2) = 0$, $Q(z_3) = 0, \dots, Q(z_r) = 0$, on en déduit que $z_1 \neq z_2, z_1 \neq z_3, \dots, z_1 \neq z_r$. Ainsi, $P = \lambda \prod_{i=1}^r (X - z_i)^{m_i}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$, les z_i 2 à 2 distincts et $m_i \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, $\mathcal{P}(k + 1)$ est vraie.
- Par récurrence forte, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

Montrons que si $P = \lambda \prod_{i=1}^r (X - z_i)^{m_i}$ avec les z_i deux à deux distincts, les m_i des entiers naturels non nuls et $\lambda \in \mathbb{C}^*$, alors nécessairement les racines de P sont exactement les z_i avec chacune une multiplicité m_i et que λ est le coefficient dominant. Fixons $j \in \llbracket 1; r \rrbracket$, alors, en isolant le terme pour $i = j$:

$$P = (X - z_j)^{m_j} \lambda \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r (X - z_i)^{m_i} = (X - z_j)^{m_j} Q \quad \text{avec} \quad Q(z_j) = \lambda \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r (z_j - z_i)^{m_i} \neq 0$$

Donc z_j est bien une racine de P de multiplicité m_j . Réciproquement si z est une racine de P alors $0 = P(z) = \lambda \prod_{i=1}^r (z - z_i)^{m_i}$, un produit de termes étant nul, on en déduit que l'un d'eux est nul, donc il existe $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$ tel que $(z - z_i)^{m_i} = 0$, donc que $z = z_i$, ainsi les racines de P sont exactement les z_i . De plus, en développant le produit $P = \lambda \prod_{i=1}^r (X - z_i)^{m_i}$, le terme

de plus haut degré est $\lambda X^{\sum_{i=1}^r m_i}$ avec $\lambda \neq 0$, ainsi λ est bien le coefficient dominant de P .

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant. Alors $P \in \mathbb{C}[X]$ et donc d'après le résultat précédent, $P = \lambda \prod_{i=1}^p (X - z_i)^{m_i}$. Avec les z_i des complexes 2 à 2 différents et $m_i \in \mathbb{N}^*$. Parmi ces z_i , un certain nombre sont réels, quitte à les renommer on va supposer que x_1, x_2, \dots, x_s sont réels. Et que les autres : $z_{s+1}, z_{s+2}, \dots, z_p$ sont des complexes non réels. Rappelons que si P admet une racine complexe z , alors \bar{z} est aussi racine avec même multiplicité. Donc quitte à renommer, on peut supposer les racines complexes non réels sont rangés ainsi $(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \dots, z_s, \bar{z}_s)$. Avec n_i la multiplicité commune de z_i et \bar{z}_i . Dès lors, on a

$$P = \lambda \prod_{i=1}^s (X - x_i)^{m_i} \times \prod_{i=1}^s (X - z_i)^{n_i} (X - \bar{z}_i)^{n_i} = \lambda \prod_{i=1}^s (X - x_i)^{m_i} \times \prod_{i=1}^s [(X - z_i)(X - \bar{z}_i)]^{n_i}$$

Remarquons que $(X - z_i)(X - \bar{z}_i) = X^2 - 2\operatorname{Re}(z_i)X + |z_i|^2$ est bien un polynôme réel de degré 2 à discriminant strictement négatif (en effet ses racines sont complexes non réelles).

Pour exactement les mêmes raisons que pour le cas complexe, λ est le coefficient dominant de P , les x_i sont les racines réelles de P de multiplicité m_i . ■



Proposition n° 8 : irréductibilité des polynômes de $\mathbb{K}[X]$

1. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont exactement ceux de degré 1.
2. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont exactement ceux de degré 1 et ceux de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

Démonstration de la proposition n° 8 :

1. On a déjà montré à l'exemple 10 que les polynômes de degré 1 sont irréductibles.
Réciproquement, soit P un polynôme irréductible. Comme P est non constant, P admet au moins une racine z , donc $X - z | P$, or les seuls diviseurs de P sont triviaux et $X - z$ n'est pas constant, donc $(X - z) = \lambda P$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$, en passant au degré, on obtient que $d^\circ P = 1$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 1, alors il est irréductible (exemple 10) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif. Si $D \in \mathbb{R}[X]$ tel que $D | P$, alors $P = DR$ et $d^\circ D \in \{0, 1, 2\}$. Si $d^\circ D = 1$, alors $D = aX + b$ admet une racine $x \in \mathbb{R}$, donc $P(x) = D(x)R(x) = 0$, ce qui est impossible, car P a un discriminant strictement négatif, donc $d^\circ D = 0$ ou $d^\circ D = 2$ (et donc R est constant). Ceci prouve que P est irréductible.

Réciproquement, si $P \in \mathbb{R}[X]$ est irréductible. Alors, d'après ce qu'on a prouvé, $P = \lambda \prod_{i=1}^r R_i^{m_i}$ où R_i est soit un polynôme de degré 1, soit un polynôme de degré 2 à discriminant strictement négatif. Or, $R_1 | P$, R_1 n'est pas constant et P est irréductible, donc R_1 et P sont colinéaires : il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $P = \lambda R_1$. Ainsi, $d^\circ P = d^\circ R_1 \in \{1, 2\}$. Si, $d^\circ R_1 = 2$, alors son discriminant est strictement négatif, donc celui de P aussi.

Ainsi, les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1 et ceux de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif. ■



Proposition n° 9 : racines comptées avec multiplicité

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul, x_1, x_2, \dots, x_r des racines (2 à 2 distinctes) de P de multiplicités m_1, m_2, \dots, m_r .

1. $\prod_{i=1}^r (X - x_i)^{m_i} | P$ En particulier, $\sum_{i=1}^r m_i \leq d^\circ P$.
2. Si $P \in \mathbb{K}_n[X] \setminus \{0\}$, P a au plus n racines. Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ admet au moins $n + 1$ racines, alors $P = 0$.
3. Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}_n[X]^2$ si P et Q prennent les mêmes valeurs en $n + 1$ réels, alors $P = Q$.

Exemple 12. Combien $P = (X^2 + 1)(X^2 - 6X + 9)$ admet-il de racines réelles ? complexes ?

Démonstration de la proposition n° 9 :

1. Si x_1, x_2, \dots, x_r des racines de P de multiplicités m_1, m_2, \dots, m_r (pas forcément toutes les racines de P , alors d'après la factorisation, P s'écrit comme un produit de termes dans lequel apparaît $\prod_{i=1}^r (X - x_i)^{m_i}$, ainsi, $P = \prod_{i=1}^r (X - x_i)^{m_i} Q$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$. En passant au degré, $d^\circ P = \sum_{i=1}^r m_i + d^\circ Q$. Nécessairement Q est non nul donc $d^\circ Q \geq 0$. Dès lors, $\sum_{i=1}^r m_i \leq d^\circ P$.
2. Notons $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ des racines de P deux à deux distinctes et m_i leur multiplicité. Supposons $P \neq 0$ d'après ce qui précède, $n + 1 \leq \sum_{i=1}^{n+1} m_i \leq d^\circ P \leq n$ ce qui est impossible. Donc $P = 0$.
3. Si $P(x_i) = Q(x_i)$ pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$ avec (x_0, x_1, \dots, x_n) des réels deux à deux distincts, alors $P - Q$ a au moins $n + 1$ racines et $P - Q \in \mathbb{K}_n[X]$ d'après le point précédent $P - Q = 0$ donc $P = Q$. ■

Exemple 13. Si $P = \lambda(X - x_1)(X - x_2)$, $Q = \mu(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$, quels sont les coefficients de P ? de Q ?



Proposition n° 10 : relations coefficients-racines

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme de degré n scindé : $P = \lambda \prod_{k=1}^n (X - x_k)$.

Alors $\lambda = a_n$, $\sum_{k=1}^n x_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$, $\prod_{k=1}^n x_k = \frac{(-1)^n a_0}{a_n}$

Exemple 14. Factoriser $X^2 - 2 \cos(\theta)X + 1$.

Exemple 15. Quelle est la somme et le produit des racines n -ième de l'unité ?

3 Décomposition en éléments simples

Soit A et B deux polynômes avec B non nul, on dit que la fonction $x \mapsto A(x)/B(x)$ est **une fonction rationnelle** définie sur $\mathbb{C} \setminus E$ où E est l'ensemble des racines de B . Si x est racine de B , on dit que x est un **pôle** de $x \mapsto A(x)/B(x)$ et n'est bien sûr par dans l'ensemble de définition de $x \mapsto A(x)/B(x)$.



Théorème n° 5 : décomposition en éléments simples d'une fraction à pôles simples (admis)

Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$, on suppose que $B \neq 0$ qu'il est scindé à racines simples, de racines b_1, b_2, \dots, b_n . Alors, il existe un unique $Q \in \mathbb{K}[X]$, un unique $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que : $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{b_1, \dots, b_n\}$ $\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{x - b_i}$
De plus, Q est le quotient de la division euclidienne de A par B .



Comment trouver la décomposition en éléments simples ?

1. Trouver les racines de B (et vérifier qu'il est bien à racines simples)
2. Effectuer la division euclidienne de A par B : $A = BQ + R$, alors $\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$.
3. Écrire $\frac{R(x)}{B(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{x - b_k}$ avec les b_i les racines de B .
4. Multiplier par $x - b_i$ et faire tendre x vers b_i , on trouve ainsi $\alpha_i = \dots$
5. Conclure que $\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{x - b_k}$.

Exemple 16. Décomposer en éléments simples $x \mapsto \frac{x^3 + 1}{x^2 - 3x + 2}$. En déduire une primitive de $x \mapsto \frac{x^3 + 1}{x^2 - 3x + 2}$.



Attention il faut que le polynôme soit scindé à racines simples pour appliquer le théorème

⚡ S'il y a une racine double cela ne fonctionne pas. Par exemple, si $B = (X - 1)(X - 1)$, vous ne pouvez pas trouver a_1 et a_2 tels que $\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{a_1}{x - 1} + \frac{a_2}{x - 1}$. De même si B n'est pas scindé. Dans ce cas, il faudra que la forme de la décomposition en éléments simples vous soit donnée car elle n'est pas au programme.



Attention à ne pas oublier la division euclidienne

⚡ Si $d^\circ A \geq d^\circ B$, ne pas oublier de faire la division euclidienne.

4 Construction des polynômes (non exigible)

Dans cette partie, hors programme, nous allons donner une « vraie » définition des polynômes. En particulier, nous répondrons à la question suivante : mais qui est ce X ?



Définition des polynômes

On appelle polynôme à coefficients dans \mathbb{K} toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathbb{K} nulle à partir d'un certain rang : il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$, $a_n = 0$.

Remarque 10. En tant que suites, deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux :

$$\forall P = (a_n)_n \quad \forall Q = (b_n)_n \quad (P = Q \iff \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = b_n)$$



Définition des opérations sur les polynômes

Soient $P = (a_n)_n$ et $Q = (b_n)_n$ deux polynômes et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda P = (\lambda a_n)_n$ et $P + Q = (a_n + b_n)_n$ appartiennent dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On définit $P \times Q$ par :

$$P \times Q = (c_n)_n \text{ où pour tout } n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

On vérifie alors que λP , $P + Q$ et PQ sont bien des polynômes, *i.e.* des suites nulles à partir d'un certain rang.

Exemple 17. Si $P = (1, 2, 3, 0, 0, \dots)$, plus rigoureusement, $P = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ et pour tout entier $n \geq 3$, $a_n = 0$, $Q = (3, 2, 1, 2, 0, 0, \dots)$, $R = (1, 0, 0, \dots)$, $S = (0, 1, 0, 0, \dots)$ et $\lambda = 2$ alors

$$\begin{array}{lll} \lambda P = (2, 4, 6, 0, 0, \dots) & P + Q = (4, 4, 4, 2, 0, 0, \dots) & PQ = (3, 8, 14, 10, 7, 6, 0, 0, 0, \dots) \\ R^2 = R \times R = (1, 0, 0, \dots) & RP = P & S^2 = S \times S = (0, 0, 1, 0, 0, \dots) \\ & & S^3 = S^2 \times S = (0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots) \end{array}$$



Proposition n° 11 : propriétés algébriques des polynômes

L'addition est commutative, associative, tout polynôme admet un polynôme opposé.

La multiplication est commutative, associative et distributive par rapport à l'addition.

Le polynôme R est l'élément neutre pour la multiplication : pour tout polynôme P , $PR = P$.

Remarque 11. On pose $X = S = (\delta_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $1 = R = (\delta_{0,n})_{n \in \mathbb{N}}$. Pour tout polynôme P , on pose $P^0 = R = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P^n = P \times P \times \dots \times P$.



Théorème n° 6 : décomposition d'un polynôme en fonction des puissances de X

Avec les notations précédentes, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X^k = (\delta_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$.

Soit un polynôme $P = (a_n)_n$ (une suite nulle à partir du rang N), alors

$$P = \sum_{n=0}^N a_n X^n.$$

Remarque 12. Ainsi, ici, l'identité $P = \sum_{n=0}^N a_n X^n$ n'est pas issue de la définition même d'un polynôme mais elle provient d'un théorème. Dès qu'on a posé $X = (\delta_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$, on décide de nommer $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} . La notation X est donc une lettre, muette, pour désigner un polynôme particulier. Le X n'est donc ni une variable, ni un nombre réel, mais une certaine suite. En particulier, on pourrait très bien poser $Y = (\delta_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ et dans ce cas $\mathbb{K}[Y]$ désignerait l'ensemble des polynômes. À noter que ceci est un procédé de construction pour justifier l'existence et les notations des polynômes, dans la pratique, on préfère oublier que ce sont des suites nulles à partir d'un certain rang et utiliser le X comme un objet mystère en feignant d'ignorer sa vraie nature.

Cela est très similaire à la construction de \mathbb{C} , on construit i comme un couple de réels et on feint d'ignorer sa vraie nature et on se réduit à l'utiliser comme un élément dans le carré vaut -1 .