Correction de l'exercice 1.

Correction de l'exercice 2.

Correction de l'exercice 3. 1. Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$. Alors,

$$\begin{aligned} R_\theta R_{\theta'} &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\theta') & -\sin(\theta') \\ \sin(\theta') & \cos(\theta') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') & -\cos(\theta)\sin(\theta') - \sin(\theta)\cos(\theta') \\ \sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta') & -\sin(\theta)\sin(\theta') + \cos(\theta)\cos(\theta') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix} = R_{\theta+\theta'} \end{aligned}$$

2. D'après ce qui précède, ${R_\theta}^2 = R_\theta R_\theta = R_{\theta+\theta} = R_{2\theta}$, ${R_\theta}^3 = {R_\theta}^2 R_\theta = R_{2\theta} R_\theta = R_{2\theta+\theta} = R_{3\theta}$. On pose alors l'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}(n)$: «${R_\theta}^n = R_{n\theta}$».
   - Pour $n = 0$, $R_{n\theta} = R_0 = I_2 = {R_\theta}^0$. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vérifiée.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, alors

   $${R_\theta}^{n+1} = R_\theta \times {R_\theta}^n = R_\theta R_{n\theta} = R_{\theta+n\theta} = R_{(n+1)\theta}$$

   Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   - En conclusion, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ${R_\theta}^n = R_{n\theta}$.
3. On constate que $R_\theta \times R_{-\theta} = R_{\theta-\theta} = R_0 = I_2$ et que $R_{-\theta} \times R_{+\theta} = R_{-\theta+\theta} = R_0 = I_2$. Ainsi, R_θ est inversible et ${R_\theta}^{-1} = R_{-\theta}$.
4. Soit $(x, x') \in \mathbb{R}^2$. Alors,

$$\begin{aligned} H_x H_{x'} &= \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(x) & \mathrm{sh}(x) \\ \mathrm{sh}(x) & \mathrm{ch}(x) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(x') & \mathrm{sh}(x') \\ \mathrm{sh}(x') & \mathrm{ch}(x') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(x') + \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(x') & \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(x') + \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x') \\ \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x') + \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(x') & \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(x') + \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(x') \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Or,

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(x') + \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(x') &= \frac{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^{x'} + \mathrm{e}^{-x'}) + (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^{x'} - \mathrm{e}^{-x'})}{4} \\ &= \frac{2\mathrm{e}^{x+x'} + 2\mathrm{e}^{-x-x'}}{4} = \mathrm{ch}(x+x') \\ \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(x') + \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x') &= \frac{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^{x'} - \mathrm{e}^{-x'}) + (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^{x'} + \mathrm{e}^{-x'})}{4} \\ &= \frac{2\mathrm{e}^{x+x'} - 2\mathrm{e}^{-x-x'}}{4} = \mathrm{sh}(x+x') \end{aligned}$$

   Ainsi, $H_x H_{x'} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(x+x') & \mathrm{sh}(x+x') \\ \mathrm{sh}(x+x') & \mathrm{ch}(x+x') \end{pmatrix} = H_{x+x'}$.
   On pose l'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}(n)$: «${H_x}^n = H_{nx}$».
   - Pour $n = 0$, $H_{nx} = H_0 = I_2 = {H_x}^0$. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vérifiée.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, alors

   $${H_x}^{n+1} = H_x \times {H_x}^n = H_x H_{nx} = H_{x+nx} = H_{(n+1)x}$$

   Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   - Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ${H_x}^n = H_{nx}$.

De plus, $H_x H_{-x} = H_{x+(-x)} = H_0 = I_2$ et $H_{-x}H_x = H_{-x+x} = H_0 = I_2$, ainsi H_x est inversible et ${H_x}^{-1} = H_{-x}$.

Correction de l'exercice 4. 1. $A^\top \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, ainsi, par produit, $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $i \in [\![1 ; n]\!]$,

$$B_{i,i} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k}A_{i,k} = \sum_{k=1}^{p} {A_{i,k}}^2 \geqslant 0$$

2. $B^\top = (AA^\top)^\top = (A^\top)^\top A^\top = AA^\top = B$, ainsi B est symétrique.
3. Supposons B antisymétrique. Alors $B^\top = B$ (B symétrique d'après la question 2), $B^\top = -B$ (B est antisymétrique par hypothèse), ainsi $B = -B$ donc $2B = 0_n$, en multipliant par $1/2$, on obtient $B = 0_n$. Donc[1], pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $B_{i,i} = \sum\limits_{k=1}^{p} {A_{i,k}}^2 = 0$, mais si une somme de réels positifs est nul, alors tous les termes sont nuls. Ainsi, pour tout $k \in [\![1 ; p]\!]$, ${A_{i,k}}^2 = 0$. Par conséquent, pour tout, $(i,j) \in [\![1 ; n]\!] \times [\![1 ; p]\!]$, $A_{i,j} = 0$. Dès lors, la matrice A est nulle.
4. Prenons $A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$, alors $B = AA^\top = 0_2$ est bien antisymétrique. Néanmoins, A n'est pas la matrice nulle.

Correction de l'exercice 5.

Correction de l'exercice 6. 1. On pose $\mathscr{P}(p)$: «$A^pB = BA^p$». Pour $p = 0$, $A^pB = I_n \times B = B \times I_n = B \times A^0$. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie. Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons, $\mathscr{P}(p)$ vraie. Alors,

$$A^{p+1}B = (A \times A^p)B = A \times (A^pB) = A \times (BA^p) = (AB)A^p = BA \times A^p = BA^{p+1}$$

Ceci montre, que $\mathscr{P}(p+1)$ est vraie. Par récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^pB = B^pA$.

2. On pose $\mathscr{P}(p)$: «$(AB)^p = A^pB^p$». Pour $p = 0$, $(AB)^p = I_n = I_n \times I_n = A^0B^0$. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie. Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons, $\mathscr{P}(p)$ vraie. Alors,

$$(AB)^{p+1} = (AB)^p(AB) = A^pB^p(AB) = A^p(B^pA)B = A^p(AB^p)B = A^{p+1}B^{p+1}$$

(où on a utilisé le résultat de la question précédente, pour affirmer que $B^pA = AB^p$) Ceci montre, que $\mathscr{P}(p+1)$ est vraie. Par récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(AB)^p = A^pB^p$.

Correction de l'exercice 7. Comme A est nilpotente, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0_n$ de même, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $B^p = 0_n$,

1. D'après l'exercice précédent, $(AB)^p = A^pB^p = 0_n \times B^p = 0_n$. Par conséquence, AB est une matrice nilpotente[2]
2. Comme A et B commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton :

$$(A+B)^{p+q-1} = \sum_{k=0}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{k} A^kB^{p+q-1-k} = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+q-1}{k} A^kB^{p+q-1-k} + \sum_{k=p}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{k} A^kB^{p+q-1-k}$$

Remarquons que, dans la seconde somme, comme $k \geqslant p$, ainsi, $A^k = 0_n$, ainsi la seconde somme est nulle. Quant à la première somme, remarquons que, comme $p+q-1-k \geqslant p+q-1-(p-1) = q$, $B^{p+q-1-k} = 0_n$, ainsi la première somme est nulle. Dès lors, On obtient que $(A+B)^{p+q-1} = 0_n$. Ceci prouve que $A+B$ est nilpotente.

Correction de l'exercice 8.

Correction de l'exercice 9.

1. Attention, si $AA^\top = 0_n$, on ne peut pas en déduire directement que $A = 0_n$ ou $A^\top = 0_n$.
2. Ici, il n'était pas nécessaire que B soit nilpotente.

Correction de l'exercice 10. 1. Posons l'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}(p)$: «il existe α et β tel que $A^p = \alpha A + \beta I_n$». Comme $A^0 = I_n = 0A + 1I_n$, $\mathscr{P}(0)$ est vraie. Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons $\mathscr{P}(p)$ vraie : $A^p = \alpha A + \beta I_n$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Alors,

$$A^{p+1} = A(A^p) = A(\alpha A + \beta I_n) = \alpha A^2 + \beta A = \alpha(aA + bI_n) + \beta A = (\alpha a + \beta)A + b\alpha I_n$$

Ainsi, $\mathscr{P}(p+1)$ est vraie. Par récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p est bien une combinaison linéaire de A et I_n.

2. Supposons $b \neq 0$, alors $A^2 - aA = bI_n$. Donc

$$A\left(\frac{1}{b}A - \frac{a}{b}I_n\right) = I_n \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{b}A - \frac{a}{b}I_n\right)A = I_n$$

Ceci montre que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{b}A - \frac{a}{b}I_n$. Ainsi, A^{-1} est bien une combinaison linéaire de A et de I_n.

Correction de l'exercice 11. 1. $X^\top \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et $AX \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, par produit $X^\top AX \in \mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{K})$.

2. Comme $X^\top AX$ est une matrice de taille $(1,1)$, c'est une matrice symétrique, ainsi :

$$X^\top AX = (X^\top AX)^\top = X^\top A^\top (X^\top)^\top = X^\top(-A)X = -(X^\top AX)$$

Ainsi, $2X^\top AX = 0$ donc $X^\top AX = 0$.

Correction de l'exercice 12.

Correction de l'exercice 13. Supposons que A soit inversible, alors, comme $AB = 0_n$, on multiplie par A^{-1} à gauche et on obtient $A^{-1}(AB) = A^{-1}0_n$. Par associativité du produit matriciel, on obtient $(A^{-1}A)B = 0_n$, finalement $I_nB = 0_n$, dès lors, $B = 0_n$ ce qui est absurde. On a donc démontré que A n'est pas inversible.

Correction de l'exercice 14. 1. Comme A et I_n commutent :

$$I_n - A^p = {I_n}^p - A^p = (I_n - A)\sum_{k=0}^{p-1} A^k {I_n}^{p-1-k} = (I_n - A)\sum_{k=0}^{p-1} A^k$$

2. Si N est nilpotente d'ordre p, alors en utilisant ce qui précède :

$$(I_n - N)\sum_{k=0}^{p-1} N^k = I_n - N^p = I_n - 0_n = I_n$$

Ceci montre que $I_n - N$ est inversible et que $(I_n - N)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} N^k$.

3. On pose $N = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0_3$. Ainsi, N est nilpotente d'indice 3, d'après la question précédente, $I_n - N = P$ est inversible et $P^{-1} = I_3 + N + N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Correction de l'exercice 15.

Correction de l'exercice 16. La matrice X est nécessairement dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. On pose $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Calculons $X^2 - 2X$:

$$X^2 - 2X = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ad + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - 2a + bc & (a + d - 2)b \\ (a + d - 2)c & bc + d^2 - 2d \end{pmatrix}$$

Or deux matrices sont égales si et seulement si elles ont les mêmes coefficients, ainsi :

$$X^2-2X=\begin{pmatrix}-1&0\\6&3\end{pmatrix}\iff\begin{cases}a^2-2a+bc&=&-1\\(a+d-2)b&=&0\\(a+d-2)c&=&6\\bc+d^2-2d&=&3\end{cases}$$

Remarquons $a+d-2=0$ est impossible à cause de L_3, ainsi :

$$X^2-2X=\begin{pmatrix}-1&0\\6&3\end{pmatrix}\iff\begin{cases}a^2-2a+1&=&0\\b&=&0\\(a+d-2)c&=&6\\d^2-2d-3&=&0\end{cases}\iff\begin{cases}(a-1)^2&=&0\\b&=&0\\(a+d-2)c&=&6\\d&=&-1\text{ ou }3\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}a&=&1\\b&=&0\\(d-1)c&=&6\\d&=&-1\text{ ou }3\end{cases}$$

On a donc deux solutions : $X=\begin{pmatrix}1&0\\-3&-1\end{pmatrix}$ et $X=\begin{pmatrix}1&0\\3&3\end{pmatrix}$

Correction de l'exercice 17. 1. Supposons $X^2=A$, alors $AX=X^2X=X^3$ tandis que $XA=XX^2=X^3$, ainsi $AX=XA$.

2. Écrivons $X=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$, alors :

$$AX=XA\iff\begin{pmatrix}a+g&b+h&c+i\\4d+2g&4e+2h&4f+2i\\16g&16h&16i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&4b&a+2b+16c\\d&4e&d+2e+16f\\g&4h&g+2h+16i\end{pmatrix}$$

$$\iff\begin{cases}g=h=d=b&=&0\\a+16c&=&c+i\\2e+16f&=&4f+2i\end{cases}$$

En particulier, si $AX=XA$, alors $g=h=d=b=0$, il y a donc au moins quatre coefficients de X qui sont nuls et donc au plus cinq qui sont non nuls.

3. On va donc directement chercher X sous la forme $X=\begin{pmatrix}a&0&c\\0&e&f\\0&0&i\end{pmatrix}$. Ainsi, $X^2=\begin{pmatrix}a^2&0&c(a+i)\\0&e^2&f(e+i)\\0&0&i^2\end{pmatrix}$.

Ainsi,

$$X^2=A\iff\begin{cases}a^2&=&1\\e^2&=&4\\i^2&=&16\\c(a+i)&=&1\\f(e+i)&=&2\end{cases}$$

Par conséquent, à chaque fois a, e et i ont deux valeurs possibles, de plus, une fois les valeurs de a, e et i

fixés, on trouve des valeurs uniques pour c et f. Ainsi, les solutions sont :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 2 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 2 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & -2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 18.

1. Le produit AX_n est possible que si le nombre de colonnes de A est égale au nombre de ligne de X_n. Ainsi, il est nécessaire que A est deux colonnes. Dans ce cas, la matrice AX_n aura autant de lignes que A et autant de colonnes que X_n. Or, on cherche à ce que AX_n ait 2 lignes, si on veut que $AX_n = X_{n+1}$. Dès lors, il est nécessaire que A ait deux lignes et deux colonnes. Bref cherchons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Alors, on obtient :

$$\begin{aligned} AX_n &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au_n + bv_n \\ cu_n + dv_n \end{pmatrix} \\ X_{n+1} &= \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}v_n \\ \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, on cherche a, b, c et d tel que $au_n + bv_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}v_n$ et $cu_n + dv_n = \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n$. On constate alors que $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = \frac{1}{3}$ et $d = \frac{2}{3}$ conviennent. Ainsi, si $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $AX_n = X_{n+1}$.

2. Posons comme hypothèse de récurrence $\mathscr{P}(n)$: «$X_n = A^n X_0$». Pour $n = 0$, $A^n X_0 = I_3 X_0 = X_0$. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Alors,

$$X_{n+1} = AX_n = A(A^n X_0) = (A \times A^n) \times X_0 = A^{n+1} X_0$$

Ce qui prouve que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

3.
   - $J^0 = I_2$
   - $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
   - $J^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2J$.
   - $J^3 = J^2 \times J = (2J) \times J = 2J^2 = 4J$.
   - $J^4 = J^3 \times J = (4J) \times J = 8J$.

   On conjecture, pour $n \in \mathbb{N}^*$, que $\mathscr{P}(n)$: «$J^n = 2^{n-1}J$». Alors, $\mathscr{P}(1)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, alors

$$J^{n+1} = J^n \times J = (2^{n-1}J) \times J = 2^{n-1}J^2 = 2^{n-1}2J = 2^{(n+1)-1}J$$

   Dès lors, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Ceci démontre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J^n = 2^{n-1}J$. En outre, $J^0 = I_2$.

4. Remarquons que $A = \frac{1}{3}I_2 + \frac{1}{3}J$. Comme $\frac{1}{3}I_2$ est une matrice scalaire elle commute avec toutes les matrices, en particulier, avec $\frac{1}{3}J$. On peut alors appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
A^n &= \left(\frac{1}{3}I_2 + \frac{1}{3}J\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}I_2\right)^{n-k} \times \left(\frac{1}{3}J\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{3^{n-k}} \times \frac{1}{3^k} J^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{3^n} J^k = \frac{1}{3^n} I_2 + \frac{1}{\times 3^n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{k-1} J = \frac{1}{3^n} I_2 + \frac{1}{2 \times 3^n} \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k}\right) J \\
&= \frac{1}{3^n} I_2 + \frac{1}{2 \times 3^n} \left((2+1)^n - 1)\right) J = \frac{1}{3^n} I_2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3^n}\right) J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3^n} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3^n} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3^n} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3^n} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après les questions précédentes on obtient :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3^n} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3^n} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3^n} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \times 3^n} \\ \frac{3}{2} + \frac{1}{2 \times 3^n} \end{pmatrix}$$

On a ainsi montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \times 3^n}$ et $v_n = \frac{3}{2} + \frac{1}{2 \times 3^n}$.

Correction de l'exercice 19.

Correction de l'exercice 20.

1. Soit M une matrice qui commute avec D. Pour tout $(i, j) \in [\![1 ; n]\!]^2$, $(DM)_{i,j} = (MD)_{i,j}$, soit

$$\sum_{k=1}^{n} D_{i,k} M_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} M_{i,k} D_{k,j}$$

Comme D est diagonale, $D_{i,k} = 0$ si $k \neq i$, ainsi, $D_{i,i} M_{i,j} = M_{i,j} D_{j,j}$, par conséquent, $M_{i,j}(d_i - d_j) = 0$. Ainsi, si on prend $i \neq j$, $d_i - d_j \neq 0$ (par hypothèse sur les coefficients diagonaux de D), donc $M_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$. Ceci montre que M est une matrice diagonale. Réciproquement, si M est une matrice diagonale, alors M et D commutent. Ainsi, l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec D est l'ensemble des matrices diagonales.

2. Si tous les d_i sont égaux, alors $D = \lambda I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$, ainsi pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,

$$DM = (\lambda I_n) M = \lambda M = M(\lambda I_n) = MD$$

Dans ce cas là, l'ensemble des matrices qui commutent avec D est égale à $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Correction de l'exercice 21.

1. Supposons que pour tout $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on ait $AB = BA$. Considérons $B = E_{c,d}$ où $(c, d) \in [\![1 ; n]\!]^2$. On a alors $AE_{c,d} = E_{c,d} A$. Fixons $(i, j) \in [\![1 ; n]\!]^2$ et calculons le coefficient à la i-ième ligne et la j-ième colonne de ce produit matriciel, on a donc

$$\sum_{k=1}^{n} A_{i,k} \left(\delta_{k,c} \delta_{d,j}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\delta_{i,c} \delta_{d,k}\right) A_{k,j}$$

Comme $\delta_{k,c} = 0$ si $k \neq c$ et que $\delta_{d,k} = 0$ dès que $k \neq d$, on en déduit

$$A_{i,c} \delta_{c,c} \delta_{d,j} = \delta_{i,c} \delta_{d,d} A_{d,j}$$

Prenons alors $i = c$ et $j = d$, on obtient $A_{c,c} = A_{d,d}$ et ce pour tout $(c, d) \in [\![1 ; n]\!]$. Prenons maintenant $j = d$ et $i \neq c$, on obtient, $A_{i,c} = 0$. Ainsi, A est une matrice dont tous les éléments diagonaux sont égaux et tous les termes hors de la diagonale sont nuls. En notant $\lambda = A_{1,1}$, on a ainsi prouvé que $A = \lambda I_n$. Réciproquement, supposons $A = \lambda I_n$, alors pour tout $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,

$$AB = \lambda I_n B = \lambda B \quad \text{et} \quad BA = B(\lambda I_n) = \lambda B$$

2. Supposons que A commutent seulement avec les matrices inversibles, alors pour $(c, d) \in [\![1\,; n]\!]^2$, considérons $B = I_n + E_{c,d}$ (qui est une matrice inversible car triangulaire avec des coefficients diagonaux non nuls), et on obtient $AB = BA$, soit :

$$A(I_n + E_{c,d}) = A + AE_{c,d} = (I_n + E_{c,d})A = A + E_{c,d}A$$

En retirant A des deux côtés de l'équation, on retrouve que $AE_{c,d} = E_{c,d}A$ et ceux pour tout $(c, d) \in [\![1\,; n]\!]^2$, ainsi en utilisant ce qui est fait précédemment, on montre qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n$.