Chapitre 10
Limite et continuité

Objectif : définir la notion de limites et prouver rigoureusement les théorèmes de limites et de continuité.
Pré-requis :

- Ensembles et applications
- Suites
- Fonctions usuelles
- Nombres réels

Table des matières

1 Limites

Soient α et β deux réels, les extrémités des intervalles $[\,\alpha\,;\beta\,]$, $[\,\alpha\,;\beta\,[$ etc. sont α et β. Les extrémités de $[\,\alpha\,;+\infty\,[$ sont α et $+\infty$ etc. On note $\mathring{I}$ l'intervalle I privé de ses extrémités. Dans tout ce chapitre, sauf exception mentionné, I et J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$, non vides et non réduits à un point et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction, et a un point de I ou une extrémité de I.

1.1 Rappels : opérations sur les fonctions

- Si $f\colon I \to \mathbb{R}$ et $g\colon I \to \mathbb{R}$, alors $f+g\colon \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x)+g(x) \end{cases}$ et $f \times g\colon \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x)\times g(x) \end{cases}$.
- Si $f\colon I \to J$ et $g\colon J \to \mathbb{R}$, alors $g \circ f\colon \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto g(f(x)) \end{cases}$. On peut synthétiser :

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & J \arrow[r, "g"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Figure 1 – Composition de fonctions.

Attention à la compatibilité des intervalles

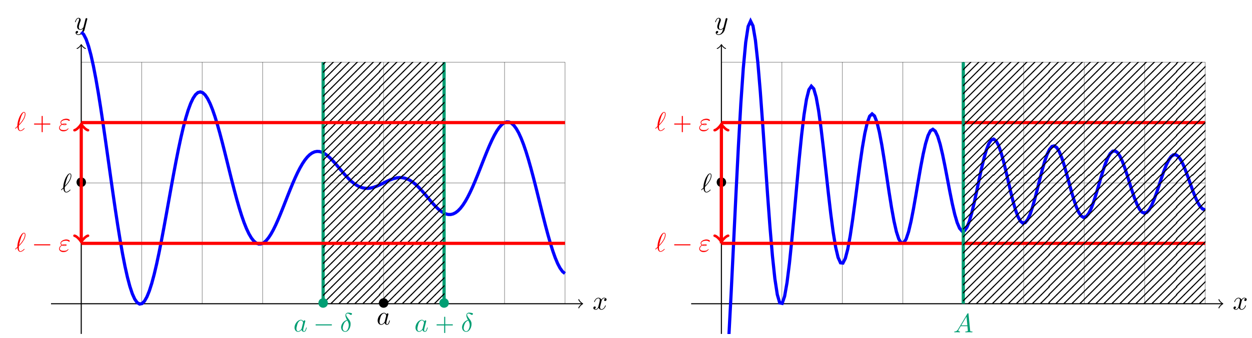
Si $g\colon J \to \mathbb{R}$, il faut f prenne ses valeurs dans J pour que $g \circ f$ ait un sens. Par exemple, si $g = \ln$ et si $f = \cos$, alors $g \circ f$ n'est pas défini sur $\mathbb{R}$ (ni sur $\mathbb{R}_+^*$) f prend des valeurs négatives.

1.2 Définition de la limite d'une fonction

Définition d'une limite finie

On dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ en a, et on note $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ (ou bien $f \underset{a}{\to} \ell$) si

- Cas $a \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \qquad |x-a| \leqslant \delta \implies |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$
- Cas $a = +\infty$: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \qquad x \geqslant A \implies |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$
- Cas $a = -\infty$: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \qquad x \leqslant A \implies |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$



(a) Si $\varepsilon > 0$, pour x assez proche de $a \in \mathbb{R}$ ($|x-a| \leqslant \delta$), $f(x)$ est dans le tube délimité par $\ell+\varepsilon$ et $\ell-\varepsilon$: illustration que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

(b) Si $\varepsilon > 0$, pour x assez grand ($x \geqslant A$), $f(x)$ est dans le tube délimité par $\ell+\varepsilon$ et $\ell-\varepsilon$: illustration que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$.

Figure 2 – Illustration de la définition de la limite.

Exemple 1. Choisir l'une des 3 définitions de la limite, et nier cette définition avec des quantificateurs.

Exemple 2. Soit $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$. Alors $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

Proposition n° 1 : unicité de la limite

Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ et $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell'$, alors $\ell = \ell'$. On note alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Cette première définition ne concerne que les cas où la limite ℓ est finie, on peut donner des définitions adaptées dans le cas où la fonction tend vers $+\infty$, ou encore quand la fonction tend vers $-\infty$:

Définition de la limite $+\infty$ en a

On dit que f tend vers $+\infty$ en a si
- Cas $a \in \mathbb{R}$: $\quad \forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x-a| \leqslant \delta \implies f(x) \geqslant M$
- Cas $a = +\infty$: $\quad \forall M \in \mathbb{R} \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad x \geqslant A \implies f(x) \geqslant M$
- Cas $a = -\infty$: $\quad \forall M \in \mathbb{R} \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad x \leqslant A \implies f(x) \geqslant M$

Définition de la limite $-\infty$ en a

On dit que f tend vers $-\infty$ en a si
- Cas $a \in \mathbb{R}$: $\quad \forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x-a| \leqslant \delta \implies f(x) \leqslant M$
- Cas $a = +\infty$: $\quad \forall M \in \mathbb{R} \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad x \geqslant A \implies f(x) \leqslant M$
- Cas $a = -\infty$: $\quad \forall M \in \mathbb{R} \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad x \leqslant A \implies f(x) \leqslant M$

Exemple 3. Soit $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$. On a $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$

Remarque 1. Voilà qui est peu pratique : on a 9 définitions différentes pour recouvrir tous les cas. La notion de voisinage permet d'unifier les neuf définitions en une seule :
- Soit $\delta > 0$, on dit que $[\,a-\delta\,;a+\delta\,]$ est un **voisinage** de $a \in \mathbb{R}$.
  L'ensemble des voisinages de a est : $\mathcal{V}_a = \{V \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) \mid \exists \delta > 0 \quad V = [\,a-\delta\,;a+\delta\,]\} = \{[\,a-\delta\,;a+\delta\,] \mid \delta > 0\}$
- Soit $M \in \mathbb{R}$, on dit que $[\,M\,;+\infty\,[$ est un **voisinage** de $+\infty$.
  L'ensemble des voisinages de $+\infty$ est : $\mathcal{V}_{+\infty} = \{V \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) \mid \exists M \in \mathbb{R} \quad V = [\,M\,;+\infty\,[\} = \{[\,M\,;+\infty\,[\mid M \in \mathbb{R}\}$
- Soit $M \in \mathbb{R}$, on dit que $]\,-\infty\,;M\,]$ est un **voisinage** de $-\infty$.
  L'ensemble des voisinages de $-\infty$ est : $\mathcal{V}_{-\infty} = \{V \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) \mid \exists M \in \mathbb{R} \quad V =]\,-\infty\,;M\,]\} = \{]\,-\infty\,;M\,] \mid M \in \mathbb{R}\}$

Définition unifiée de la limite

Soient $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty;-\infty\}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty;-\infty\}$ un point de I ou une extrémité de I. On dit que f tend vers ℓ en a si :

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell \quad \exists \tilde{V} \in \mathcal{V}_a \quad \forall x \in I \qquad x \in \tilde{V} \implies f(x) \in V$$

On peut condenser en : $\quad \forall V \in \mathcal{V}_\ell \quad \exists \tilde{V} \in \mathcal{V}_a \quad f(I \cap \tilde{V}) \subset V$

Mais, un voisinage de l'infini n'a pas la même forme qu'un voisinage d'un réel ! De plus, cette définition peut sembler un peu abstraite. Dans la suite, on ne l'utilisera car n'est pas explicitement au programme. Dans les démonstrations, nous aurons donc parfois 9 cas à distinguer. Nous en ferons un seul, et de dirons que les autres se déduisent de la même façon.

Remarque 2. On peut aussi définir la limite avec des inégalités strictes et les voisinages avec des intervalles ouverts.

Proposition n° 2 : une limite finie en a implique bornée sur un voisinage de a

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors f est bornée sur un voisinage de a :
- Si $a \in \mathbb{R}$: $\quad \exists N \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \cap [\,a-\delta\,;a+\delta\,] \quad |f(x)| \leqslant N$
- Si $a = +\infty$: $\quad \exists N \in \mathbb{R} \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \cap [\,M\,;+\infty\,[\quad |f(x)| \leqslant N$
- Si $a = -\infty$: $\quad \exists N \in \mathbb{R} \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \cap]\,-\infty\,;M\,] \quad |f(x)| \leqslant N$

Remarque 3. Ce théorème ressemble à «toute suite convergente est bornée». Mais, f est bornée seulement sur un voisinage.

Remarque 4. Si $a \in I$ et $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, nécessairement $\ell = f(a)$.

1.3 Limite à droite, limite à gauche

Définition de la limite à droite et à gauche d'une fonction

Soient $a \in I$ ou une extrémité de I et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

1. Si a n'est pas l'extrémité droite de I, on dit que que f tend vers ℓ à droite en a si $f_{|I \cap]\, a\,;\,+\infty\,[}(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$. On note $f(x) \xrightarrow[\substack{x\to a\\ x>a}]{} \ell$ ou bien $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \ell$ ou bien $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell$.
2. Si a n'est pas l'extrémité gauche de I, on dit que f tend vers ℓ à gauche en a si $f_{|I \cap]\, -\infty\,;\,a\,[}(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$. On note $f(x) \xrightarrow[\substack{x\to a\\ x<a}]{} \ell$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \ell$

Exemple 4. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valant 0 sur $\mathbb{R}_+^*$ et 1 sur $\mathbb{R}_-$ admet-elle une limite à gauche de 0 ? Et à droite ?

Exemple 5. Soit $f\colon x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Étudier les limites de f à droite et à gauche en 0.

Remarque 5. Soit $a \in \mathring{I}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$, alors f admet une limite en a si et seulement si f admet une limite finie à droite de a une limite finie à gauche de a et que $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

1.4 Caractérisation séquentielle de la limite

Le théorème suivant, permet de faire le lien entre limites de fonctions et limites de suites.

Théorème n° 1 : caractérisation séquentielle de la limite

Considérons a un point de I ou une extrémité et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$.

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(\forall (x_n) \in I^{\mathbb{N}} \quad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \quad \Longrightarrow \quad f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell\right)$$

Exemple 6. Comme $\exp(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, on peut en déduire que $\exp(n^2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Démonstration du théorème n° 1 : encore une fois, supposons que $a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$, on pourrait traiter les autres cas de façon similaire. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans I, on suppose que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et montrons que $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Soit $\varepsilon > 0$, alors on a :

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \qquad |x - a| \leqslant \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon \tag{1}$$

De plus comme $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, ainsi on a :

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad |x_n - a| \leqslant \delta \tag{2}$$

Soit $n \in N$ tel que $n \geqslant N$, alors d'après (2), on a $|x_n - a| \leqslant \delta$, et donc d'après (1), on a donc $|f(x_n) - \ell| \leqslant \varepsilon$. On a ainsi montré donc que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad |f(x_n) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Dès lors, $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Démontrons la réciproque par contraposée. Supposons que f ne tende pas au point a vers ℓ, et on va construire une suite $(x_n)_n$ convergente vers a tel que $f(x_n)_n$ ne converge pas vers ℓ : Comme ℓ n'est pas une limite de la fonction f au point a on a :

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in I \qquad |x - a| \leqslant \delta \quad \textbf{et} \quad |f(x) - \ell| > \varepsilon$$

Comme on a ceci pour tout $\delta > 0$, on va prendre $\delta = \dfrac{1}{n+1}$, ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\exists x_n \in I, \quad |x_n - a| \leqslant \frac{1}{n+1} \text{ et } |f(x_n) - \ell| > \varepsilon. \tag{3}$$

La suite $(x_n)_n$ ainsi construite est bien à valeur dans I. D'après (3), on a bien que $(x_n)_n$ est une suite convergente vers a, cependant $(f(x_n))_n$ ne converge pas vers ℓ. ■

Exemple 7. La fonction cos n'a pas de limite en $+\infty$.

1.5 Opérations sur les limites de fonctions

Proposition n° 3 : limites de la somme/du produit/du quotient

Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \mathbb{R}$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell' \in \mathbb{R}$, alors $(f+g)(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell+\ell'$ et $(fg)(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell\ell'$.
Si $\ell' \neq 0$, alors g est non nulle sur un voisinage de a et $f/g \xrightarrow[x\to a]{} \ell/\ell'$.

Lorsque les limites ℓ et ℓ' ne sont pas finies, on peut encore avoir certains résultats similaires SAUF DANS CERTAINS CAS APPELÉS FORMES INDÉTERMINÉES.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$-\infty$	ℓ'	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	FI
ℓ	$-\infty$	$\ell+\ell'$	$+\infty$
$+\infty$	FI	$+\infty$	$+\infty$

(a) Limites de la somme de deux fonctions suivant leur limite.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$-\infty$	$\ell'<0$	0	$\ell'>0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$	$-\infty$
$\ell<0$	$+\infty$	$\ell\times\ell'$	0	$\ell\times\ell'$	$-\infty$
0	FI	0	0	0	FI
$\ell>0$	$-\infty$	$\ell\times\ell'$	0	$\ell\times\ell'$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	FI	$+\infty$	$+\infty$

(b) Limites du produit de deux fonctions suivant leur limite.

Proposition n° 4 : composition des limites

Soient $f\colon I\to J$ et $g\colon J\to\mathbb{R}$. Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ et $g(y) \xrightarrow[y\to \ell]{} \ell'$, alors $(g\circ f)(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell'$.

Démonstration de la proposition n° 4 : supposons que $a\in\mathbb{R}$, que $\ell\in\mathbb{R}$ et que $\ell'\in\mathbb{R}$. Les autres cas se traitent de manière similaire. Soit $\varepsilon>0$, comme g admet une limite ℓ' en ℓ, on a :

$$\exists\delta>0,\quad \forall y\in J\quad |y-\ell|\leqslant\delta \Longrightarrow |g(y)-\ell'|\leqslant\varepsilon \tag{4}$$

Comme f tend vers ℓ en a on a :

$$\exists\delta>0\quad \forall x\in I\qquad |x-a|\leqslant\delta\quad\Longrightarrow\quad |f(x)-\ell|\leqslant\delta \tag{5}$$

Soit $x\in I$, on suppose que $|x-a|\leqslant\delta$ alors d'après (5), on a alors $|f(x)-\ell|\leqslant\delta$. Posons $y=f(x)$, on a ainsi $|y-\ell|\leqslant\delta$, en appliquant (4), il vient $|g(y)-\ell'|\leqslant\varepsilon$. De plus, $g(y)=g(f(x))$, on ainsi montré que :

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\forall x\in I\qquad |x-a|<\delta\quad\Longrightarrow\quad |g(f(x))-\ell'|<\varepsilon$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to a}(g\circ f)(x)=\ell'$. ■

1.6 Théorèmes de limites

Proposition n° 5 les inégalités larges passent à la limite

Soient $f\colon I\to\mathbb{R}$ et $g\colon I\to\mathbb{R}$. Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell'$, et si $f(x)\geqslant g(x)$ sur un voisinage de a, alors $\ell\geqslant\ell'$.

Attention : les inégalités strictes ne passent pas à la limite

Même si $f(x)>g(x)$ sur un voisinage de a, on n'a pas forcément $\ell>\ell'$. Par exemple : $f\colon x\mapsto 1/x$ et $g\colon x\mapsto 1/x^2$ définies sur $[\,2\,;+\infty\,[$ avec $a=+\infty$.

Proposition n° 6 d'encadrement (ou théorème des gendarmes ou du sandwich)

Soient f, g et $h\colon I\to\mathbb{R}$. Si sur un voisinage de a, on a $f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\ell\in\mathbb{R}$, alors, $h(x)\xrightarrow[x\to a]{}\ell$.

Corollaire 1 (produit d'une fonction ayant une limite nulle par une fonction bornée)**.** Supposons que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ et g est bornée au voisinage de a, alors $(fg)(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

Proposition n° 7 de minoration/majoration par une fonction ayant une limite infinie

Soient $f, g\colon I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ ou une extrémité de I telle que sur un voisinage de a, on ait $f(x) \leqslant g(x)$:
Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ alors $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$. De même, si $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$ alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$

Théorème n° 2 de la limite monotone

Soient $I =]\,a\,;b\,[$ ($a < b$ avec possiblement $a = -\infty$ et $b = +\infty$) et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction **monotone**.

1. Si f est croissante sur I :
   (a) f admet des limites finies à droite et à gauche en tout point $c \in \mathring{I}$, $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) \leqslant f(c) \leqslant \lim\limits_{x\to c^+} f(x)$
   (b) Si f est majorée sur I, alors $f(x) \xrightarrow[x\to b^-]{} \sup f \in \mathbb{R}$. Sinon, $f(x) \xrightarrow[x\to b^-]{} +\infty$.
   (c) Si f est minorée sur I, alors $f(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} \inf f \in \mathbb{R}$. Sinon, $f(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} -\infty$
2. Si f est décroissante sur I, on en déduit un résultat équivalent.

2 Continuité en un point

2.1 Définition

Définition de la continuité en un point

Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $a \in I$, on dit que f est **continue** en a si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$, *i.e.* :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \qquad |x - a| \leqslant \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

Définition de la continuité à droite/à gauche

Si $a \in I$ sans en être une extrémité à droite. On dit que f est **continue à droite** en a si $f(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} f(a)$.
Si $a \in I$ sans en être une extrémité à gauche. On dit que f est **continue à gauche** en a si $f(x) \xrightarrow[x\to a^-]{} f(a)$.

Exemple 8. La fonction partie entière est-elle continue en 0 à gauche ? À droite ?

Remarque 6. Soit $a \in \mathring{I}$, f est continue en a si et seulement si f est continue en a à droite et à gauche.

Exemple 9. On pose $f(x) = x^2$ pour $x \geqslant 0$, et $f(x) = -x^3 + 2x$ si $x < 0$, f est-elle continue en 0 ?

2.2 Caractérisation séquentielle de la continuité

Théorème n° 3 : caractérisation séquentielle de la continuité

Soient $f\colon I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Alors f est continue en a ssi pour toute suite $(x_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$ tendant vers a, on a $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$.

Exemple 10. $\sin(1/n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Corollaire : limite possible d'une suite récurrente

Soient $f\colon I \to I$, $u_0 \in I$, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in I$ et f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.

Exemple 11. Soit $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = {u_n}^2 + u_n + 1$, montrer que $(u_n)_n$ diverge.

2.3 Opérations de fonctions continues en a

Proposition n° 8 : continuité de la somme/produit/quotient de fonctions continues

Si $f\colon I \to \mathbb{R}$ et $g\colon I \to \mathbb{R}$ sont continues en $a \in I$, alors $f+g$ et fg sont continues en a.
De plus, si $g(a) \neq 0$, alors f/g est définie sur un voisinage de a et est continue en a.

Proposition n° 9 : continuité de la composée de deux fonctions continues

Soient $f\colon I \to J$ continue en $a \in I$ et $g\colon J \to \mathbb{R}$ continue en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est continue en a.

2.4 Prolongement par continuité

Définition d'un prolongement par continuité

Soient $a \in I$, $f\colon I\backslash\{a\} \to \mathbb{R}$. On dit que f est **prolongeable par continuité** s'il existe un prolongement de f noté $\tilde{f}\colon I \to \mathbb{R}$ continue en a.

Proposition n° 10 : existence d'un prolongement par continuité

Soient $a \in I$, $f\colon I\backslash\{a\} \to \mathbb{R}$. Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors $\tilde{f}\colon \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \neq a \\ \ell & \text{si} \quad x = a \end{cases} \end{cases}$ est un prolongement par continuité de f.

Exemple 12. 𝄞 La fonction $x \mapsto \sin(x)/x$, définie sur $\mathbb{R}^*$, est prolongeable par continuité en 0.

Remarque 7. Le prolongement par continuité, quand il existe, est unique.

3 Continuité sur un intervalle

3.1 Définition et propriétés

Définition de la continuité sur un intervalle

On dit que f est **continue** sur I si pour tout $a \in I$, f est continue en a. On note $\mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$ ou $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exemples des fonctions usuelles

Les fonctions polynomiales, exp, cos et sin sont continues sur $\mathbb{R}$, ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Si $\alpha \geqslant 0$, alors $x \mapsto x^\alpha$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Si $\alpha < 0$, alors $x \mapsto x^\alpha$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Si $n \in \mathbb{N}$, alors $x \mapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}$. Si $n \in \mathbb{Z}$, alors, $x \mapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Exemple 13. La partie entière est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Proposition n° 11 : opérations sur les fonctions continues sur un intervalle

Si $(f,g) \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})^2$, alors $(f+g, fg) \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})^2$. De plus, si g ne s'annule pas sur I, alors $f/g \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$.
Si $f \in \mathscr{C}^0(I,J)$ et $g \in \mathscr{C}^0(J,\mathbb{R})$, alors $g \circ f \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$.

Proposition n° 12 : continuité des applications lipschitziennes

Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que f est une fonction $k-$**lipschitzienne** si : $\quad \forall (x,x') \in I^2 \quad |f(x)-f(x')| \leqslant k|x-x'|$
Si f est k-lipschitzienne sur I, alors f est continue sur I.

Démonstration de la proposition n° 12 : Soit $a \in I$. Fixons un $\varepsilon > 0$, et posons $\delta = \varepsilon/k > 0$. Alors, pour tout $x \in I$, si $|a-x| \leqslant \delta$ alors $|f(x)-f(a)| \leqslant k|x-a| \leqslant k\delta = \varepsilon$. Ceci prouve que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$. Ainsi f est continue en a et ce pour tout $a \in I$. Donc f est continue sur I. ■

Exemple 14. Existe-t-il $k > 0$ tel que $f : x \mapsto |x|$ est-elle k-lipschitzienne ?

Remarque 8. Noter que la réciproque n'est pas vraie : $x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ n'est pas k-lipschitzienne.

3.2 Image d'un intervalle par une fonction continue

Théorème n° 4 des valeurs intermédiaires (TVI)

Soit $f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$. Si $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$ (ou $f(b) \leqslant y \leqslant f(a)$), alors il existe $x \in [\,a\,;b\,]$ tel que $y = f(x)$.

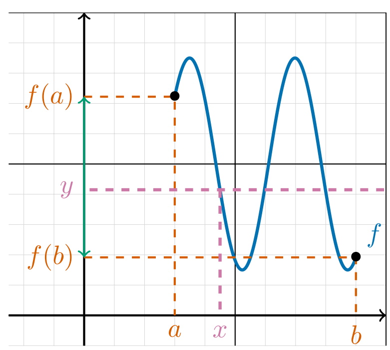


Figure 3 – Illustration du théorème des valeurs intermédiaires.

Démonstration du théorème n° 4 : Travaillons dans le cas où $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$. Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$ ainsi que $c = (b_0+a_0)/2$. Il y a deux cas, soit $f(c) \leqslant y$. Dans ce cas $f(c) \leqslant y \leqslant f(b_0)$ et on pose $a_1 = c$ et $b_1 = b_0$. Soit $y < f(c)$, dans ce cas $f(a_0) \leqslant y \leqslant f(c)$ et on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = c$. On réitère ce processus, en posant l'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}(n)$ suivante :

$$«\exists (a_0,a_1,\ldots,a_n,b_0,b_1,\ldots,b_n) \in \mathbb{R}^{2n+2} \qquad \begin{cases} f(a_n) \leqslant y \leqslant f(b_n) \\ b_n - a_n = \dfrac{b_0-a_0}{2^n} \\ a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_{n-1} \leqslant a_n < b_n \leqslant b_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant b_1 \leqslant b_0 \end{cases} »$$

- $\mathscr{P}(0)$ est vraie par définition de a_0 et b_0.
- Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Posons alors $c = \dfrac{a_n+b_n}{2}$. Il y a deux cas :
  — Soit $f(c) \leqslant y$. Dans ce cas, $f(c) \leqslant y \leqslant f(b_n)$ et on pose $a_{n+1} = c$ et $b_{n+1} = b_n$.
  — Soit $y < f(c)$. Dans ce cas $f(a_n) \leqslant y \leqslant f(c)$ et on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c$.
  Dans les deux cas : $a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n-a_n}{2} = \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$ et $f(a_{n+1}) \leqslant y \leqslant f(b_{n+1})$. Dès lors, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

On dispose donc de deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ telles que $(a_n)_n$ est croissante, $(b_n)_n$ décroissante, $b_n - a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, ce sont donc deux suites adjacentes donc convergentes vers la même limite d'après le cours sur les suites. Notons x leur limite commune, comme $a \leqslant a_n \leqslant b$, par passage à la limite qui conserve les inégalités larges, $a \leqslant x \leqslant b$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) \leqslant y$ que $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, par image d'une suite tendant vers x et f est continue en x, $f(a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$, par passage à la limite qui conserve les inégalités larges, $f(x) \leqslant y$. Mais $y \leqslant f(b_n)$ donc pour les mêmes raisons, $y \leqslant f(x)$. Bref, $y = f(x)$. ∎

Le principe de dichotomie permet de calculer une approximation de x. Si $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$, posons $c = \dfrac{a+b}{2}$, puis calculons $f(c)$.

- Si $y \leqslant f(c)$, alors $f(a) \leqslant y \leqslant f(c)$, alors on recommence avec le segment $[\,a\,;c\,]$.
- Si $y > f(c)$, alors $f(c) \leqslant y \leqslant f(b)$, alors on on recommence avec segment $[\,c\,;b\,]$.

Après suffisamment d'étapes, on obtient une approximation de x.

```python
def Dichotomie(f,a,b,y,epsilon):
    """Renvoie une approximation de x tel que f(x)=y
    a epsilon près si y est entre f(a) et f(b)"""
    assert (f(a)<=y and y<=f(b)) or (f(b)<=y and y<=f(a))
    if f(a)<f(b):
        while b-a>=epsilon:
            c=(a+b)/2
                if y<=f(c):#y est entre f(a) et f(c)
                    b=c#On regarde f entre a et c
                else:
                    a=c#On regarde f entre c et b
    else:
        while b-a>=epsilon:
            c=(a+b)/2
            if y<=f(c):#y est entre f(b) et f(c)
                    a=c# Donc on regarde f entre a et b
            else:
                    b=c#Alors, on regarde f entre c et b
    return a
```

```python
def Dichotomie(f,a,b,y,epsilon):
    """version plus courte sans distinction de cas"""
    assert (f(a)-y)*(f(b)-y)<=0
    while b-a>=epsilon:
        c=(a+b)/2
        if (f(a)-y)*(f(c)-y)<=0:#y est entre f(a) et f(c)
            b=c# Donc on regarde f entre a et c
        else:
            a=c#Alors, on regarde f entre c et b
    return a
```

```python
def Dichotomie(f,a,b,y,epsilon):
    """par récursivité"""
    assert (f(a)-y)*(f(b)-y)<=0
    if b-a<epsilon:
        return a
    c=(a+b)/2
    if (f(a)-y)*(f(c)-y)<=0:#y est entre f(a) et f(c)
        return Dichotomie(f,a,c,y,epsilon)# Donc on regarde f entre a et c
    else:
        return Dichotomie(f,c,b,y,epsilon)# Donc on regarde f entre a et c
```

Exemple 15. Montrer que l'équation $\cos(x) = x$ admet au moins une solution.

Proposition n° 13 : l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

Soient I un intervalle et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors $f(I)$ est encore un intervalle.

Démonstration de la proposition n° 13 : Pour démontrer que $f(I)$ est un intervalle, utilisons la caractérisation des intervalles vue au chapitre «Nombres réels et suites». Considérons p et q deux éléments de $f(I)$, supposons que $p < q$. Soit r tel que $p < r < q$, le but est de montrer que $r \in f(I)$. Il existe $(a, b) \in I^2$ tel que $p = f(a)$ et $q = f(b)$. Alors $f(a) \leqslant r \leqslant f(b)$ et f est continue sur $[\,a\,;b\,] \subset I$, d'après le TVI, il existe $x \in [\,a\,;b\,]$ tel que $r = f(x)$ comme $x \in I$, $r \in f(I)$. On a ainsi montré que $f(I)$ est un intervalle. ■

Corollaire : cas des fonctions strictement monotones

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$ continue et strictement monotone. Alors $f(I)$ vaut suivant les cas :

Intervalle	$I = [\,a\,;b\,]$	$I = [\,a\,;b\,[$	$I =]\,a\,;b\,]$	$I =]\,a\,;b\,[$
f strictement croissante	$[\,f(a)\,;f(b)\,]$	$\left[f(a)\,;\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\,;f(b)\right]$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\,;\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$
f strictement décroissante	$[\,f(b)\,;f(a)\,]$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\,;f(a)\right]$	$\left[f(b)\,;\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\,;\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$

Exemple 16. Calculer $\ln(]\,0\,;1\,])$, $\sin([\,0\,;\pi\,])$, $\sin(]\,0\,;\pi\,[)$, $\exp(\mathbb{R})$, $f(\mathbb{R})$, $g(\mathbb{R})$, $E(\mathbb{R})$ où $f\colon x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$, $g\colon x \mapsto x\mathrm{e}^{-x^2}$, et E la partie entière.

Théorème n° 5 des bornes atteintes *(admis)*

Si $f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$, alors, $\exists (m, M) \in [\,a\,;b\,]^2 \quad \forall x \in [\,a\,;b\,] \quad f(m) \leqslant f(x) \leqslant f(M)$.

Remarque 9. On a aussi $f\left([\,a\,;b\,]\right) = [\,f(m)\,;f(M)\,]$ (l'image d'un segment par une application continue est un segment).

Remarque 10. $f(M)$ est donc la plus grande valeur que prend f et M est un point où le maximum de f est atteint.

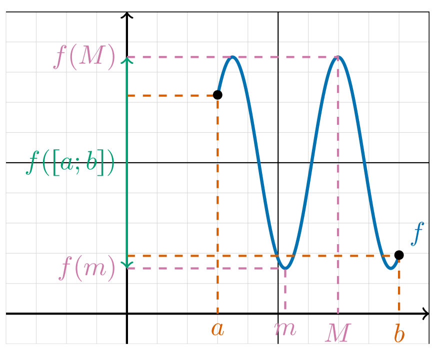


Figure 4 – Illustration du théorème des bornes atteintes.

Démonstration du théorème n° 5 : Si g est une fonction définie sur J, posons $\sup(g) = \sup g(J)$. Si g n'est pas majorée, alors on convient que $\sup(g) = +\infty$. Rappelons que pour deux ensembles (non nécessairement majorés) A et B, $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$. Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$ ainsi que $c = (b_0 + a_0)/2$. Ainsi, $\sup f = \max(\sup f_{|[\,a_0\,;c\,]}, \sup f_{|[\,c\,;b_0\,]})$. Il y a donc deux cas : soit $\sup f = \sup f_{|[\,c\,;b_0\,]}$, et on pose $a_1 = c$ et $b_1 = b_0$. Soit $\sup f = \sup f_{|[\,a_0\,;c\,]}$, et on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = c$. On réitère ce processus, en posant l'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}(n)$ suivante :

$$«\exists (a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n+2} \qquad \begin{cases} \sup f_{|[\,a_n\,;b_n\,]} = \sup(f) \\ b_n - a_n = \dfrac{b_0 - a_0}{2^n} \\ a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n < b_n \leqslant b_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant b_1 \leqslant b_0 \end{cases} »$$

- $\mathscr{P}(0)$ est vraie par définition de a_0 et b_0.
- Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Posons alors $c = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, alors $\sup(f) = \max(\sup f_{|[\,a_n\,;c\,]}, \sup f_{[\,c\,;b_n\,]})$. Il y a deux cas :
  — Soit $\sup(f) = \sup f_{|[\,a_n\,;c\,]}$. Dans ce cas $f(a_n) \leqslant y \leqslant f(c)$ et on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c$.
  — Soit $\sup(f) = \sup f_{|[\,c\,;b_n\,]}$. Dans ce cas, $f(c) \leqslant y \leqslant f(b_n)$ et on pose $a_{n+1} = c$ et $b_{n+1} = b_n$.

  Dans les deux cas, $a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2} = \dfrac{b - a}{2^{n+1}}$ et $\sup f_{|\left[\,a_{n+1}\,;b_{n+1}\,\right]} = \sup f_{|[\,a_n\,;b_n\,]} = \sup f$, ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

- Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

On dispose donc de deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ tel que $(a_n)_n$ est croissante, $(b_n)_n$ décroissante, $b_n - a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, ce sont donc deux suites adjacentes donc convergentes vers la même limite notée $M \in [\,a\,;b\,]$. Fixons $\varepsilon > 0$, f étant continue en M, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in [\,a\,;b\,] \qquad M-\delta \leqslant x \leqslant M+\delta \quad \Longrightarrow \quad f(M)-\varepsilon \leqslant f(x) \leqslant f(M)+\varepsilon$$

Comme $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} M$ et $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} M$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $M-\delta \leqslant a_n < b_n \leqslant M+\delta$. Dès lors, pour tout $x \in [\,a_n\,;b_n\,]$, $f(x) \leqslant f(M)+\varepsilon$. Ceci prouve que

$$\sup(f) = \sup f_{|[\,a_n\,;b_n\,]} \leqslant f(M)+\varepsilon$$

Dès lors, f est majoré sur $[\,a\,;b\,]$. De plus, $f(M) \leqslant \sup(f)$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, $f(M) \leqslant \sup(f) \leqslant f(M)+\varepsilon$. Ceci prouve que $\sup(f) = f(M)$.

De même, on a l'existence de m tel que $\inf(f) = f(m)$. Ainsi, pour tout $x \in [\,a\,;b\,]$, $f(m) \leqslant f(x) \leqslant f(M)$ donc que $f(x) \in [\,f(m)\,;f(M)\,]$. Donc $f([\,a\,;b\,]) \subset [\,f(m)\,;f(M)\,]$. Soit $y \in [\,f(n)\,;f(M)\,]$, remarquons que $f(m) \in f([\,a\,;b\,])$ et $f(M) \in f([\,a\,;b\,])$. Or, on sait d'après le corollaire que $f([\,a\,;b\,])$ est un intervalle, donc $y \in f([\,a\,;b\,])$. Dès lors $[\,f(m)\,;f(M)\,] \subset f([\,a\,;b\,])$. Et on a ainsi l'égalité. ∎

Exemple 17. Montrer que la fonction $f\colon x \mapsto \sin(x)/x$ définie sur $]\,0\,;\pi\,[$ est bornée.

Théorème n° 6 : de la bijection strictement monotone *(admis)*

Soit $f \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$ strictement monotone sur l'intervalle I. Alors, f réalise une bijection de I dans $f(I)$. Sa bijection réciproque $f^{-1}\colon f(I) \to I$ est continue et a la même monotonie que f.

Démonstration de la proposition n° 13 : Supposons que f soit strictement croissante sur l'intervalle I (idem si f est strictement décroissante).

- $f\colon I \to f(I)$ est surjective (par définition de $f(I)$).
- Soit $(x,x') \in I^2$, supposons $f(x) = f(x')$. Si $x < x'$ (resp. $x > x'$) alors $f(x) < f(x')$ (resp. $f(x) > f(x')$), donc $x = x'$. Ainsi, f est injective.
- Ainsi, $f\colon I \to f(I)$ est bijective, comme f est continue, $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
- Montrons que $f^{-1}\colon f(I) \to I$ est strictement croissante. Soit $(y,y') \in f(I)^2$ tel que $y < y'$, il existe $(x,x') \in I^2$ tel que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. Ainsi, $f(x) < f(x')$, si $x \geqslant x'$, alors comme f est croissante $y = f(x) \geqslant f(x') = y'$ absurde. Donc $x < x'$, soit $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$. Ainsi, f^{-1} est strictement croissante.
- Soit $b \in f(I)$, montrons la continuité de f^{-1} en b. Supposons que b ne soit pas une extrémité gauche de I et montrons que f^{-1} est continue à gauche en b. Comme f^{-1} est monotone, le théorème de la limite monotone affirme que f^{-1} admet une limite finie à gauche en b. Notons donc $\ell = \lim\limits_{y\to b^-} f^{-1}(y)$. Remarquons que si on fixe $z \in f(I)$ tel que $z < b$, par croissance de f^{-1}, on a $f^{-1}(z) \leqslant \ell \leqslant f^{-1}(b)$. Or $f^{-1}(z) \in I$ et $f^{-1}(b) \in I$, comme I est un intervalle, on a $\ell \in I$. Remarquons alors que f est continue en $\ell \in I$, d'où $f(\ell) = \lim\limits_{y\to b^-} f(f^{-1})(y) = b$. Ainsi, $\ell = f^{-1}(b)$. D'où $\lim\limits_{y\to b^-} f^{-1}(y) = f^{-1}(b)$. Dès lors, f^{-1} est continue à gauche en b (démonstration analoge pour la continuité à droite). Par conséquent f^{-1} est continue sur $f(I)$. ∎

Exemple 18. arcsin est une bijection $[\,-1\,;1\,]$ vers $[\,-\pi/2\,;\pi/2\,]$ strictement croissante et continue sur $[\,-1\,;1\,]$.

4 Brève extension au cas des fonctions à valeurs complexes

On considère maintenant $f\colon I \to \mathbb{C}$ et $a \in I$ ou une extrémité de I.

Définition de la limite de f en a

On dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{C}$ en a (noté $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$) si

- Cas $a \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \qquad |x-a| \leqslant \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$
- Cas $a = +\infty$: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \qquad x \geqslant A \quad \Longrightarrow \quad |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$
- Cas $a = -\infty$: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \qquad x \leqslant A \quad \Longrightarrow \quad |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$

Définition de la continuité d'une fonction à valeurs complexes en un point ou sur un intervalle

f est dite continue en $a \in I$ si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$. f est dite continue sur I si f est continue en tout $a \in I$.

Proposition n° 14 : traduction à l'aide des parties réelle et imaginaire

- Pour $\ell \in \mathbb{C}$, $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ ssi $\mathrm{Re}(f(x)) \xrightarrow[x\to a]{} \mathrm{Re}(\ell)$ et $\mathrm{Im}(f(x)) \xrightarrow[x\to a]{} \mathrm{Im}(\ell)$
- f est continue en a si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.
- f est continue sur I si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.

Exemple 19. $\theta \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Proposition n° 15 : une fonction admettant une limite en a est bornée au voisinage de a

Si f admet une limite $\ell \in \mathbb{C}$ en a, alors f est bornée sur un voisinage de a.

Proposition n° 16 : opérations sur les notions de limite/continuité

1. Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$, $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell'$ alors $(f+g)(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell+\ell'$, $(fg)(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell\ell'$, $(f/g)(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell/\ell'$ (si $\ell' \neq 0$).
2. Si f et g sont continues en a, alors $f+g$, fg et f/g (si $g(a) \neq 0$) sont continues en a.
3. Si $(f,g) \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{C})^2$, alors $f+g$, fg et f/g (si g ne s'annule pas sur I) sont continues sur I.

Péril imminent certaines choses ne sont pas généralisables

Une fonction à valeurs complexes ne peut pas avoir une limite infinie. Pas de généralisation du théorème des valeurs intermédiaires, pas de théorème des bornes atteintes, on ne peut pas parler de fonctions monotones, ni des théorèmes d'encadrement, majoration, minoration etc.

Exemple 20. Soit $f\colon x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} \in \mathscr{C}^0([\,0\,;\pi\,],\mathbb{C})$, $f(0)=1$ et $f(\pi)=-1$, pourtant f ne s'annule pas sur $[\,0\,;\pi\,]$.