Correction de l'exercice 1.

Correction de l'exercice 2.

Correction de l'exercice 3.

Correction de l'exercice 4. 1. Soit $x > 0$, alors[1] $E\left(\frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x} - 1$. Donc $0 \leqslant g(x) < \frac{1}{\frac{1}{x}-1}$, De plus, $\frac{1}{\frac{1}{x}-1} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, par le théorème d'encadrement $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0 = g(0)$. La fonction est donc continue en 0.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \left]\frac{1}{k+1}\,;\frac{1}{k}\right]$, on a alors $\frac{1}{k+1} < x \leqslant \frac{1}{k}$. En passant à l'inverse, $k \leqslant \frac{1}{x} < k+1$. Donc, $E(\frac{1}{x}) = k$. Donc $g(x) = \frac{1}{k}$. Ainsi sur l'intervalle $\left]\frac{1}{k+1}\,;\frac{1}{k}\right]$, g est constante et cette constante vaut $1/k$.

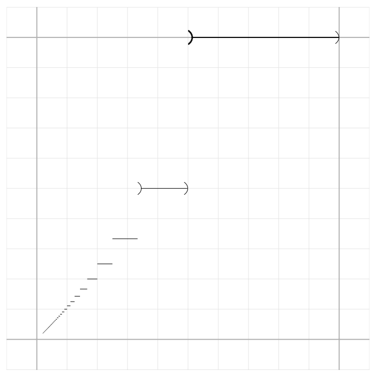

FIGURE 1 – Représentation de la fonction g, les discontinuités proches de 0 sont tellement petites qu'on pourrait penser que la fonction devient continue sur $[\,0\,;\delta\,]$. Mais ce n'est pas le cas.

Correction de l'exercice 5. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(2x) = f(x).$$

1. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$:«$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$».
   - Initialisation : Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x) = f\left(\frac{x}{2^0}\right)$. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie. Soit $x \in \mathbb{R}$.

   $$f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{\frac{x}{2}}{2^n}\right) \underset{\mathscr{P}(n)}{=} f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(2 \times \frac{x}{2}\right) = f(x)$$

   Où l'on a appliqué l'hypothèse de récurrence à $\frac{x}{2}$. Comme x est un réel quelconque, on a donc $\mathscr{P}(n+1)$.
   - Conclusion : Par principe de récurrence, on a donc montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. La suite $\left(f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à $f(x)$ par la question précédente. De plus, $\lim_{n\to+\infty} \frac{x}{2^n} = 0$ et la fonction f est continue en 0. Donc, $\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0)$. Par unicité de la limite, $f(x) = f(0)$. Ceci est vrai pour tous les réels x donc la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 6.

1. Par propriété de la partie entière : à connaître absolument

Correction de l'exercice 7.

Correction de l'exercice 8. Considérons $f\colon x \mapsto x - \mathrm{e}^{-x}$. La fonction f est dérivable, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \mapsto 1 + \mathrm{e}^{x} > 0$. Ainsi, f est strictement croissante et continue donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \,;\, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[= \left]-\infty\,;+\infty\right[= \mathbb{R}$. Comme $0 \in \mathbb{R}$, par définition de la bijectivité, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$. Ainsi, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $x = \mathrm{e}^{-x}$

De plus, $f(1) = 1 - \mathrm{e}^{-1} > 0$. Comme $\mathrm{e} \leqslant 4$ et que la racine carrée est strictement croissante $\mathrm{e}^{1/2} \leqslant 2$, par passage à l'inverse $\mathrm{e}^{-1/2} \geqslant 1/2$ donc $-\mathrm{e}^{-1/2} \leqslant -1/2$, ainsi, $f(1/2) \leqslant 0$. Comme f est continue sur $[\,1/2\,;1\,]$, et $f(1/2) \leqslant 0 \leqslant f(1)$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [\,1/2\,;1\,]$ tel que $f(c) = 0$. Par unicité $c = x$.

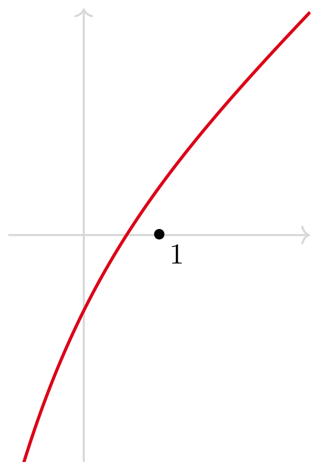

FIGURE 2 – La fonction $x \mapsto x - \mathrm{e}^{-x}$ de l'exercice 8.

Remarque 1. Attention, démontrer directement qu'il existe un unique $x \in [\,1/2\,;1\,]$ tel que $x = \mathrm{e}^{-x}$ n'est pas suffisant. En effet, rien n'assurerait alors qu'il n'en existe pas un ailleurs.

De manière générale, si E et F sont deux ensembles avec $F \subset E$ montrer qu'il existe un unique x dans E vérifiant une propriété $P(x)$ puis montrer que x est dans F est plus fort que de montrer qu'il existe un unique x dans F vérifiant la propriété $P(x)$.

Correction de l'exercice 9.

Correction de l'exercice 10. Montrons que f est constante. Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(a) \neq f(b)$. Quitte à échanger a et b de rôles, on peut supposer $f(a) < f(b)$. Ainsi, $f(a)$ et $f(b)$ sont deux entiers et $f(b) \geqslant f(a) + 1$. En particulier, $f(a) \leqslant f(a) + 1/2 \leqslant f(b)$. Comme f est continue sur $[\,a\,;b\,]$ (ou $[\,b\,;a\,]$ si $b < a$), il existe $x \in [\,a\,;b\,]$ (ou $[\,b\,;a\,]$) tel que $f(x) = f(a) + 1/2$. Comme $f(a) \in \mathbb{Z}$, $f(x) \notin \mathbb{Z}$, ce qui est absurde. Ainsi, f est constante.

Correction de l'exercice 11. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors on sait qu'il existe $(a_n)_n \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, comme f est continue en x par caractérisation séquentielle de la limite, $f(a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$. En outre, comme g est continue en x, on a de même, $g(a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(x)$. Or, pour tout n, $f(a_n) = g(a_n)$, par unicité de la limite, $f(x) = g(x)$ et ce pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, $f = g$.

Correction de l'exercice 12.

1. Notons ℓ la limite de f en $+\infty$ et T la période de f. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $u_n = x + nT$ pour $n \in \mathbb{N}$, alors la suite $(u_n)_n$ converge vers $+\infty$. D'après le cours, $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = f(x + nT) = f(x)$, par périodicité de T. Donc la suite $(f(u_n))_n$ est une suite constante égale à $f(x)$ et donc cette suite tend également vers $f(x)$. Par unicité de la limite, on a que $f(x) = \ell$. On a donc montré que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ell$, donc f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.
2. Notons T la période de f. Comme f est continue sur le segment $[\,0\,;T\,]$, d'après le théorème des bornes atteintes, f est bornée sur ce segment, donc

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [\,0\,;T\,] \quad |f(x)| \leqslant M \tag{1}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, montrons que $|f(x)| \leqslant M$. Notons $n = E(x/T) \in \mathbb{Z}$. On a donc $n \leqslant x/T < n+1$. Et donc $nT \leqslant x < (n+1)T$. Ainsi, $0 \leqslant x - nT < (n+1)T - nt = T$. Ainsi $x - nt \in [\,0\,;T\,]$. En appliquant (1), on a donc $|f(x-nt)| \leqslant M$, de plus, comme f est périodique, donc $f(x-nt) = f(x)$, on a ainsi $|f(x)| \leqslant M$. On a donc trouvé $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant M$. On a donc bien montré que f est bornée.

Correction de l'exercice 13.

1. Comme g est bornée sur $\mathbb{R}$, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|g(x)| \leqslant M$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|g(f(x)| \leqslant M$, ainsi $g \circ f$ est bornée.
2. Comme g est bornée sur $\mathbb{R}$, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|g(x)| \leqslant M$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-M \leqslant g(x) \leqslant M$. Comme f est continue sur le segment $[\,-M\,;M\,]$, f est bornée et atteint ses bornes. Ainsi, il existe $(c,d) \in [\,-M\,;M\,]^2$ tel que pour tout $y \in [\,-M\,;M\,]$, $f(c) \leqslant f(y) \leqslant f(d)$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \in [\,-M\,;M\,]$, donc $f(c) \leqslant f(g(x)) \leqslant f(d)$. Ceci prouve que $f \circ g$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 14.

1. Posons $g = f - \mathrm{Id}_{[\,a\,;b\,]}$, comme différence de fonctions continues, g est continue. De plus, pour tout $x \in [\,a\,;b\,]$, $a \leqslant f(x) \leqslant b$. Dès lors $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$ et $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$, ainsi $0 \in [\,g(b)\,;g(a)\,]$, par application du théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [\,a\,;b\,]$ tel que $0 = g(c) = f(c) - c$, ainsi $f(c) = c$.
2. Posons $g \colon x \mapsto f(x) - x$.
   - comme différence de fonctions continues, g est continue sur $\mathbb{R}$.
   - Pour tout $x \geqslant 0$, on a $f(x) \leqslant f(0)$, donc $g(x) \leqslant f(0) - x$. Ainsi, posons $A = \max(f(0), 0)$, alors $A \geqslant 0$ et $g(A) \leqslant f(0) - A \leqslant 0$.
   - Pour tout $x \leqslant 0$, on a $f(x) \geqslant f(0)$, donc $g(x) \geqslant f(0) - x$. Ainsi, posons $B = \min(f(0), 0)$, alors $B \leqslant 0$ et $g(B) \geqslant f(0) - B \geqslant 0$

   Ainsi, $g(A) \leqslant 0 \leqslant g(B)$ et g et continue, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [\,A\,;B\,]$ (ou $c \in [\,B\,;A\,]$ si $B \leqslant A$) tel que $g(c) = 0$, soit $f(c) = c$.

Correction de l'exercice 15.

1. Notons $d = d^\circ P \geqslant 1$. Ainsi, $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k = a_d X^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k$ avec $(a_0, a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ et $a_d \neq 0$. Pour $x \neq 0$, en factorisant par le terme de plus haut degré on a a $P(x) = a_d x^d \left(1 + \sum_{k=0}^{d-1} \frac{a_k}{a_d} x^{k-d}\right)$. Or, pour $k < d$, $x^{k-d} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ et $x^{k-d} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$. Ainsi, par somme

$$\left(1 + \sum_{k=0}^{d-1} \frac{a_k}{a_d} x^{k-d}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1 \qquad \text{et} \qquad \left(1 + \sum_{k=0}^{d-1} \frac{a_k}{a_d} x^{k-d}\right) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 1$$

   De plus, $x^d \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et si d est pair $x^d \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$ et si d est impair $x^d \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$ Ainsi, par produit de limites :
   - Si $a_d > 0$ et d pair $P(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et $P(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$
   - Si $a_d > 0$ et d impair $P(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et $P(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$
   - Si $a_d < 0$ et d pair $P(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$ et $P(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$
   - Si $a_d < 0$ et d impair $P(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$ et $P(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$
2. Notons toujours $d = d^\circ P$. Ici d est impair, quitte à poser $\tilde{P} = -P$, on peut supposer que[2] $a_d > 0$. Ainsi, d'après la question précédente, $P(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et $P(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$. Comme $P(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$, en posant $M = 0$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in [\,A\,;+\infty\,[$, $P(x) \geqslant M = 0$. De même, comme $P(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$, en posant $m = 0$, il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \,]-\infty\,;B\,]$, $P(x) \leqslant m = 0$. En particulier $P(B) \leqslant 0 \leqslant P(A)$. Or, la fonction polynomiale $x \mapsto P(x)$ est continue sur $[\,B\,;A\,]$ (ou $[\,A\,;B\,]$ si $A < B$), d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [\,B\,;A\,]$ (ou $[\,A\,;B\,]$) tel que $P(c) = 0$. Ainsi, le polynôme P admet bien une racine réelle.

2. Si $a_d < 0$, alors le coefficient dominant de $\tilde{P}$ sera lui strictement positif, et on appliquera ce qui va suivre à $\tilde{P}$, ainsi, $\tilde{P}$ admettra une racine réelle. Par conséquent, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\tilde{P}(x) = -P(x) = 0$ ce qui montre que P admet une racine réelle également.

3. Le polynôme $X^2 + 1$ n'a pas de racines réelles.

Correction de l'exercice 16. Posons $\varepsilon = 1/2 > 0$. Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$, alors il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \leqslant A$, $-\varepsilon \leqslant f(x) + 1 \leqslant \varepsilon$. En particulier, pour tout $x \leqslant A$, $f(x) \leqslant -1 + \varepsilon = 1/2$. En particulier, $f(A) \leqslant -1/2 \leqslant 0$.

De même, il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geqslant B$, $f(x) \geqslant 1 - \varepsilon$, en particulier $f(B) \geqslant 1/2 \geqslant 0$.

Ainsi $0 \in [\, f(A)\,;f(B)\,]$, et f est continue sur $[\,A\,;B\,]$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [\,A\,;B\,]$ tel que $f(c) = 0$.

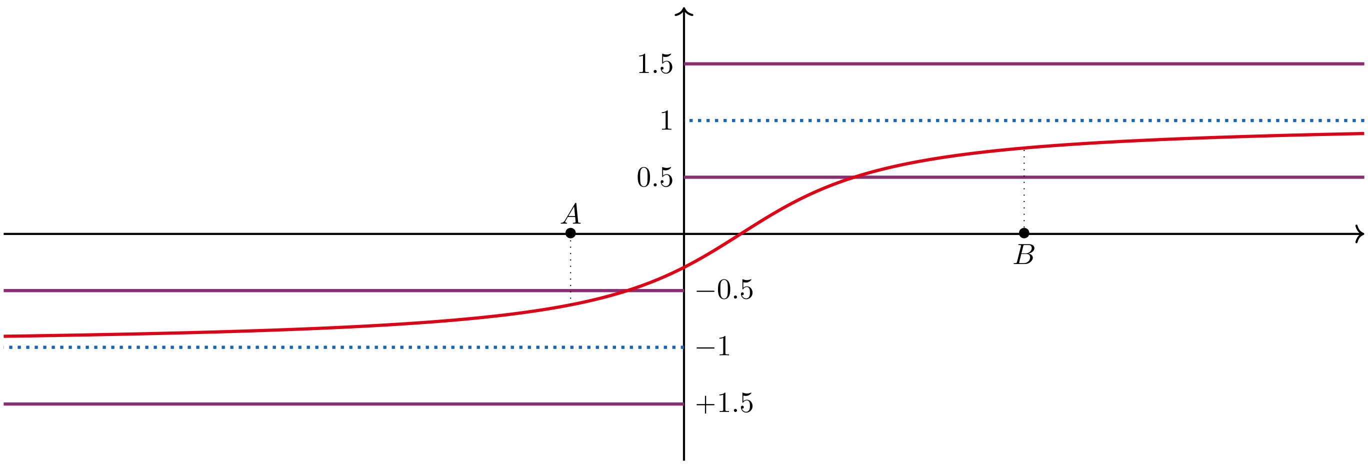

FIGURE 3 – La fonction f est continue sur $[\,A\,;B\,]$, $f(A) \leqslant 0 \leqslant f(B)$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule sur $[\,A\,;B\,]$.

Correction de l'exercice 17. Tout d'abord on a :

$$\begin{array}{llllll} \forall M \in \mathbb{R} & \exists A \in \mathbb{R} & \forall x \in \mathbb{R} & x \geqslant A & \Longrightarrow & f(x) \geqslant M \\ \forall M \in \mathbb{R} & \exists B \in \mathbb{R} & \forall x \in \mathbb{R} & x \leqslant B & \Longrightarrow & f(x) \geqslant M \end{array}$$

Posons $M = f(0) + 1 \in \mathbb{R}$, alors il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad x \geqslant A \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geqslant M \tag{2}$$

Il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad x \leqslant B \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geqslant M \tag{3}$$

Montrons que $B < 0 < A$. Pour cela, supposons que $0 \geqslant A$, alors, $f(0) \geqslant M = f(0) + 1$, ce qui est absurde, donc $0 < A$. On montre de même $B < 0$. De plus, f est continue sur le segment $[\,B\,;A\,]$. Donc d'après le théorème des bornes atteintes, il existe $(c, d) \in [\,B\,;A\,]^2$ tel que $f([\,B\,;A\,]) = [\,f(c)\,;f(d)\,]$. En particulier, pour tout $x \in [\,B\,;A\,]$, $f(x) \geqslant f(c)$. Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant f(c)$. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé, il y a trois cas :

- Si $x \in [\,B\,;A\,]$, alors $f(x) \geqslant f(c)$, comme $0 \in [\,B\,;A\,]$, on a, en particulier $f(0) \geqslant f(c)$.
- Si $x > A$, alors, d'après (2), on a $f(x) \geqslant M = f(0) + 1 \geqslant f(0) \geqslant f(c)$.
- Si $x < B$, alors, d'après (3), on a $f(x) \geqslant M = f(0) + 1 \geqslant f(0) \geqslant f(c)$.

Dans tous les cas, on a trouvé $c \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant f(c)$.

Correction de l'exercice 18. Notons ℓ la limite de f en $+\infty$. Pour $\varepsilon = 1$, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in [\,A\,;+\infty\,[$, $|f(x) - \ell| \leqslant 1$. Ainsi, pour $x \geqslant A$, par inégalité triangulaire :

$$|f(x)| = |f(x) - \ell + \ell| \leqslant |f(x) - \ell| + |\ell| \leqslant 1 + |\ell|$$

De plus, f est continue sur $[\,0\,;A\,]$, d'après le théorème des bornes atteintes, il existe $(\alpha,\beta)\in[\,0\,;A\,]^2$ tel que pour tout $x\in[\,0\,;A\,]$, $f(\alpha)\leqslant f(x)\leqslant f(\beta)$, ainsi :

$$-|f(\alpha)|\leqslant f(\alpha)\leqslant f(x)\leqslant f(\beta)\leqslant|f(\beta)|$$

Posons $M=\max(|f(\beta)|,|f(\alpha)|,1+\ell)$, alors pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $-M\leqslant f(x)\leqslant M$. Ceci montre que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Correction de l'exercice 19.

Correction de l'exercice 20.

Correction de l'exercice 21.

Correction de l'exercice 22.

Correction de l'exercice 23.

1. Soit $a\in I$. Montrons la continuité de f en a : Soit $\varepsilon>0$. Notons $\delta=\varepsilon/k>0$. On a alors

$$\forall x\in I\qquad |x-a|\leqslant\delta\quad\Longrightarrow\quad|f(x)-f(a)|\leqslant k|x-a|\leqslant k\delta=\varepsilon$$

Ce qui montre que $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$ donc que f est continue en a, et ce pour tout $a\in I$, donc f est continue sur I.

2. (a) **Existence :** Appliquons le théorème des valeurs intermédiaires. Soit $g\colon x\mapsto f(x)-x$.
   - Comme $f\colon\,[\,0\,;+\infty\,[\,\to[\,0\,;+\infty\,[$, la fonction f est positive donc $g(0)=f(0)-0=f(0)\geqslant 0$.
   - Appliquons la définition de lipschiztienne avec $y=0$, on obtient

   $$\forall x\in\mathbb{R}_+\quad|f(x)-f(0)|\leqslant k|x|=kx$$

   Donc pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $f(x)-f(0)\leqslant|f(x)-f(0)|\leqslant kx$, autrement dit, $f(x)\leqslant kx+f(0)$. On a donc pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $g(x)\leqslant f(0)+(k-1)x$. Posons[3] $A=\dfrac{f(0)}{1-k}$ (possible car $k<1$), alors $A\in\mathbb{R}_+$, et $g(A)\leqslant f(0)+(k-1)\dfrac{f(0)}{1-k}=0$, donc $g(A)\leqslant 0$.
   - Donc $0\in[\,g(A)\,;g(0)\,]$, par application du théorème des valeurs intermédiaires (g est continue, car f[4] et $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$ le sont), on en déduit qu'il existe $c\in[\,0\,;A\,]$, tel que $g(c)=0$. Donc $f(c)-c=0$, ainsi $f(c)=c$.

   (b) **Unicité :** Supposons qu'il existe deux points fixes c_1 et c_2 différents. Appliquons la définition de lipschiztienne à c_1 et c_2, on obtient

   $$\begin{aligned}|f(c_1)-f(c_2)| &\leqslant k|c_1-c_2|\\ |c_1-c_2| &\leqslant k|c_1-c_2| \qquad (4)\end{aligned}$$

   Comme on a supposé $c_1\neq c_2$, on a $|c_1-c_2|>0$, en divisant par $|c_1-c_2|$ dans (4), on obtient $1\leqslant k$, absurde car on a supposé $k<1$. Donc $c_1=c_2$ et on un unique point fixe.

3. En appliquant le fait que f soit lipschitzienne aux points u_n et c, on obtient

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad|u_{n+1}-c|=|f(u_n)-f(c)|\leqslant k|u_n-c|$$

Ainsi par une récurrence facile (mais à faire absolument), on a que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_n-c|\leqslant k^n|u_0-c|$. Or, $k\in[\,0\,;1\,[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}k^n=0$. Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n-c|=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=c$.

3. Au brouillon, on a cherché ce A de façon à avoir $g(A)\leqslant 0$.
4. D'après la question 1

Correction de l'exercice 24. 1. Soit $y \in \mathbb{R}$. Comme f est surjective, il existe $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x) = y$. Supposons que y admette un nombre fini d'antécédents :

$$\exists\,(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \forall i \in [\![\,1\,;n\,]\!] \qquad f(x_i) = y \qquad \text{et} \qquad \forall x \notin \{x_1, x_1, \dots, x_n\} \qquad f(x) \neq y$$

Notons $M = \max(\{x_1, \dots, x_n\})$. En particulier, pour tout $x > M$, $f(x) \neq y$. Il y a donc trois cas, soit la courbe de f sera toujours au dessus strictement de y à droite M, soit la courbe de f sera toujours en dessous strictement de y à droite de M, soit la courbe prendra à la fois des valeurs strictement plus grande que M et strictement plus petite que y à droite de M.

- Supposons que, pour tout $x > M$, $f(x) > y$. Notons que f est continue sur $[\,0\,;M\,]$, ainsi d'après le théorème des bornes atteintes, il existe $(\alpha, \beta) \in [\,0\,;M\,]^2$, tel que pour tout $x \in [\,0\,;M\,]$, $f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta)$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \geqslant \min(y, f(\alpha))$. En particulier, $\min(y, f(\alpha)) - 1$ n'a pas d'antécédent.
- Supposons que, pour tout $x > M$, $f(x) < y$. Notons que f est continue sur $[\,0\,;M\,]$, ainsi d'après le théorème des bornes atteintes, il existe $(\alpha, \beta) \in [\,0\,;M\,]^2$, tel que pour tout $x \in [\,0\,;M\,]$, $f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta)$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leqslant \max(y, f(\beta))$. En particulier, $\max(y, f(\beta)) + 1$ n'a pas d'antécédent.
- Supposons qu'il existe $x > M$ tel que $f(x) < y$ et qu'il existe $x' > M$ tel que $f(x') > y$, alors comme f est continue sur $[\,x\,;x'\,]$ (ou sur $[\,x'\,;x\,]$ si $x' < x$) et que $f(x) \leqslant y \leqslant f(x')$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [\,x\,;x'\,]$ (ou $c \in [\,x'\,;x\,]$) tel que $f(c) = y$, avec $c \geqslant \min(x, x') > M$ c'est absurde.

Dans les trois cas, on obtient donc une absurdité. Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R}$, y admet une infinité d'antécédents.

2. Posons $f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x\cos(\pi x) \end{cases}$. Par produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$, f est continue sur $\mathbb{R}_+$. Soit $y \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(2n) = 2n$, ainsi $f(2n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(2n) \geqslant y$. De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(2n+1) = -(2n+1) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $f(2m+1) \leqslant y$, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à f continue sur le segment $[\,n\,;m\,]$ (ou $[\,m\,;n\,]$ si $m < n$), il existe $x \in [\,n\,;m\,]$ tel que $f(x) = y$, la fonction f est donc surjective.

Correction de l'exercice 25. 1. Par somme télescopique,

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) = f(1) - f(0) = 0$$

Or, si une somme de réels est nulle, c'est que nécessairement l'un des termes de la somme est négatif ou nul (par l'absurde si tous les termes étaient strictement positifs, la somme serait strictement positive). De même, un des termes est positif ou nul. Ainsi,

$$\exists k \in [\![\,0\,;n-1\,]\!] \quad f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \exists j \in [\![\,0\,;n-1\,]\!] \quad f\left(\frac{j+1}{n}\right) - f\left(\frac{j}{n}\right) \geqslant 0$$

Posons, $g\colon x \mapsto f(x + 1/n) - f(x)$, alors g est continue sur $[\,k/n\,;j/n\,]$ (ou sur $[\,j/n\,;k/n\,]$ si $j < k$) par différence de fonctions continues, en outre, $g(k/n) \leqslant 0 \leqslant g(j/n)$, par application du théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [\,k/n\,;j/n\,]$ (ou $x \in [\,j/n\,;k/n\,]$) tel que $g(x) = 0$, ainsi $f(x + 1/n) = f(x)$.

2. Soit $\alpha \in]\,0\,;1\,]$ tel que $1/\alpha \notin \mathbb{N}$. Posons $f\colon x \mapsto \sin^2(\pi x/\alpha) - x\sin^2(\pi/\alpha)$, alors f est continue sur $[\,0\,;1\,]$, $f(0) = 0 = f(1)$. De plus,

$$\forall x \in [\,0\,;1-\alpha\,] \qquad f(x+\alpha) - f(x) = -\alpha\sin^2(\pi/\alpha) \neq 0$$

Correction de l'exercice 26.

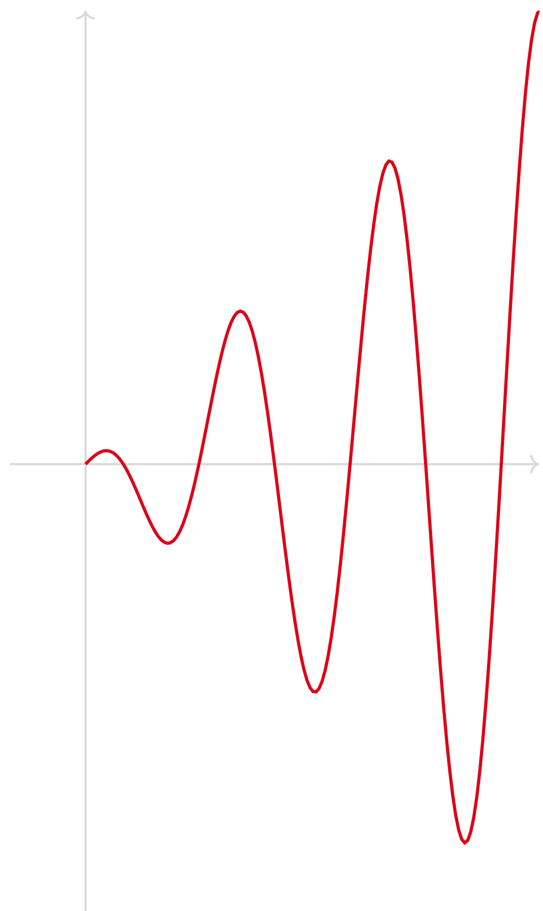

FIGURE 4 – La fonction f de l'exercice 24 oscille de plus en plus vers $+\infty$ et $-\infty$ en étant continue et surjective.