Correction de l'exercice 1.

Correction de l'exercice 2.

Correction de l'exercice 3.

Correction de l'exercice 4. 1. $f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{cases}$

(a) $x \mapsto 1/x$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, de plus sin est continue sur $\mathbb{R}$. Donc, par composition d'applications continues, $x \mapsto \sin(1/x)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. Comme $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, on en déduit par produit que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

(b) Montrons la continuité en 0 *i.e.* $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} f(0) = 0$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\left|x^2 \sin(1/x)\right| \leqslant x^2$, on[1] peut donc en déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $-x^2 \leqslant x^2 \sin(1/x) \leqslant x^2$, par le théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

2. $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de plus sin est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc, par composition d'applications dérivables, $x \mapsto \sin(1/x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Comme $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, on en déduit, par produit, que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. De plus, pour tout $x \in\in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$.

3. Pour étudier la dérivabilité de f en 0, calculons le taux d'accroissement. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \in [\,-|x|\,;|x|\,]$$

Pour le théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$, ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

4. Si f était de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors f' serait continue sur $\mathbb{R}$ donc en 0. Ainsi, d'après le cours, pour toute suite $(u_n)_n \in \mathbb{R}^n$ tendant vers 0, on aurait $(f'(u_n))_n$ qui tendrait vers $f'(0) = 0$. Choisissons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{2n\pi}$, alors $f'(u_n) = -1$ et donc $(f'(u_n))_n$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit que f' n'est pas continue en 0 donc que f n'est pas $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Alors que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 5.

Correction de l'exercice 6. 1. φ est continue sur le segment $[\,a\,;b\,]$ comme somme de fonctions continues, donc d'après le théorème des bornes atteintes, elle atteint une valeur minimum sur $[\,a\,;b\,]$.

2. Supposons que φ atteigne son minimum en a. Alors pour tout $x \in [\,a\,;b\,]$, $\varphi(x) \geqslant \varphi(a)$. Remarquons que φ est dérivable sur $[\,a\,;b\,]$ (somme de fonctions dérivables), on a $\varphi'(a) = f'(a) - y < 0$. Comme pour tout $x \in \,]\,a\,;b\,]$, $\varphi(x) \geqslant \varphi(a)$, on a $\dfrac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} \geqslant 0$, par passage à la limite quand $x \to a$, on a $\varphi'(a) \geqslant 0$. Ce qui est absurde. Donc φ n'atteint pas son minimum en a. On montre de même que φ n'atteint pas son minimum en b.

3. Ainsi φ atteint son minimum en $c \in \,]\,a\,;b\,[$ donc[2] $\varphi'(c) = 0$. Donc $f'(c) - y = 0$. Donc $y = f'(c)$.

4. On a donc montré que quelque soit le point situé entre deux points de $f'(I)$ ce point appartenait encore $f'(I)$. Ceci montre que $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 7.

---

1. À partir de ce moment-là, vous aurez le droit de dire que comme x^2 tend vers 0, alors $x^2\sin(1/x)$ aussi. Seulement attention à ne pas dire $|g(x)| \leqslant h(x)$, or $\lim_{x\to a} h(x) = 1$, donc $\lim_{x\to a} g(x) = 1$, cela ne marche que pour 0.

2. Rappelons que si f est dérivable sur I admet un minimum en $x \in I$ et **que ce minimum n'est pas sur les bords de** I, alors on peut dire que $f'(x) = 0$.

Correction de l'exercice 8.

Correction de l'exercice 9.

Correction de l'exercice 10.

Correction de l'exercice 11.

- Soit $x > 0$, on remarque que exp est continue sur $[\,0\,;x\,]$, dérivable sur $]\,0\,;x\,[$; donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in\,]\,0\,;x\,[$ tel que $\exp(x) - \exp(0) = \exp'(c)(x-0)$, on a donc $\mathrm{e}^x = 1 + \mathrm{e}^c x$, comme $c \geqslant 0$ par croissance de l'exponentielle, on a $\mathrm{e}^c \geqslant 1$. Puis, comme $x > 0$, on a donc $\mathrm{e}^c x \geqslant x$, ainsi $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$.
- Si $x = 0$, alors on a bien l'inégalité demandée.
- Si $x < 0$, on remarque que exp est continue sur $[\,x\,;0\,]$, dérivable sur $]\,x\,;0\,[$; donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in\,]\,x\,;0\,[$ tel que $\exp(x) - \exp(0) = \exp'(c)(x-0)$, on a donc $\mathrm{e}^x = 1 + \mathrm{e}^c x$, comme $c \leqslant 0$ par croissance de l'exponentielle, on a $\mathrm{e}^c \leqslant 1$. Puis, comme $x < 0$, on a donc $\mathrm{e}^c x \geqslant x$, ainsi $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$.

Correction de l'exercice 12.

1. Supposons que a soit une racine de multiplicité m de P (alors $m \geqslant 1$, sinon a n'est pas racine de P). Alors il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X-a)^m Q$ avec $Q(a) \neq 0$. En dérivant un produit,
$$P' = m(X-a)^{m-1}Q + (X-a)^m Q' = (X-a)^{m-1}(mQ + (X-a)Q')$$
Posons alors $\tilde{Q} = mQ + (X-a)Q'$, alors $\tilde{Q}(a) = mQ(a) \neq 0$ avec $P' = (X-a)^{m-1}\tilde{Q}$. Ceci veut dire que la multiplicité de a dans P' est[3] $m - 1$.
2. Soient a et b deux racines de P avec $a \neq b$ (quitte à échanger les noms, on suppose $a < b$). Alors $P(a) = P(b) = 0$. Or, $x \mapsto P(x)$ est continue sur $[\,a\,;b\,]$, dérivable sur $]\,a\,;b\,[$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in\,]\,a\,;b\,[$ tel que $P'(c) = 0$. Ainsi, P' admet une racine entre deux racines de P.
3. Supposons que P soit scindé à racines simples. Notons $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ses n racines distinctes classées par ordre croissante : $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. D'après ce qui précède, pour tout $i \in [\![\,1\,;n-1\,]\!]$, il existe[4] $y_i \in\,]\,x_i\,;x_{i+1}\,[$ tel que $P'(y_i) = 0$. On a alors :
$$x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \dots < x_{n-1} < y_{n-1} < x_n$$
En particulier, $y_1 < y_2 < \dots < y_{n-1}$. Or, $d^\circ P' = n-1$ et qu'on a trouvé $n-1$ racines distinctes de P', il en découle que P' est scindé à racines simples.
4. Supposons P scindé. Notons $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ ces racines distinctes classés par ordre strictement croissant : $x_1 < x_2 < \dots < x_r$. Notons m_i la multiplicité de x_i dans P. Comme P est scindé, $P = \lambda \prod_{i=1}^{r}(X - x_i)^{m_i}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$. En passant au degré, $n = \sum_{i=1}^{r} m_i$. D'après la première question, x_i est racine de P' avec multiplicité $m_i - 1$. De plus, comme à la question précédente, on trouve des racines de P' entre les racines de P, il existe y_1, y_2, …, y_{r-1} des racines de P' tel que
$$x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \dots < x_{r-1} < y_{r-1} < x_r$$
Ainsi, P' est divisible par $\prod_{i=1}^{r}(X - x_i)^{m_i - 1}\prod_{i=1}^{r-1}(X - y_i)$. Par conséquent, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P' = Q\prod_{i=1}^{r}(X - x_i)^{m_i - 1}\prod_{i=1}^{r-1}(X - y_i)$. En passant au degré, on obtient :
$$n - 1 = d^\circ P' = d^\circ Q + \sum_{i=1}^{r}(m_i - 1) + r - 1 = d^\circ Q + \sum_{i=1}^{r} m_i - \sum_{i=1}^{r} 1 + r - 1 = d^\circ Q + n - r + r - 1 = n - 1 + d^\circ Q$$

3. Si $m = 1$, cela veut dire que a est une racine de multiplicité 0 dans P' donc que a n'est pas racine de P'

4. C'est dans ce genre d'exercices que l'on réalise à quel point il est important dans Rolle, d'avoir l'existence d'un réel qui annule la dérivée dans l'intervalle ouvert et non dans l'intervalle fermé. En effet, si on avait l'existence de y_1 dans $[\,x_1\,;x_2\,]$ et l'existence de y_2 dans $[\,x_2\,;x_3\,]$, alors rien n'empêcherait d'avoir $y_1 = y_2$ et donc de trouver moins de racines que ce dont on a besoin.

Ainsi, $d^\circ Q = 0$ et Q est constant. Notons λ cette constante[5]. En conclusion,

$$P' = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X - x_i)^{m_i - 1} \prod_{i=1}^{r-1} (X - y_i)$$

est scindé.

5. Prenons $n \geqslant 3$. Notons $P = X^n - 1 = \prod_{k=1}^{n} (X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2k\pi}{n}})$ est scindé à racines simples, tandis que $P' = nX^{n-1}$ n'est pas à racines simples, car 0 est racine de multiplicité $n - 1 \geqslant 2$.

Correction de l'exercice 13.

- Si $n = 1$, on dispose alors de f de classe $\mathscr{C}^1$ tel que $f(x_0) = f(x_1)$, comme f est continue sur $[\, x_0\,;x_1\,]$, dérivable sur $]\, x_0\,;x_1\,[$, ainsi d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in \,]\, x_0\,;x_1\,[$ tel que $f'(c) = 0$.
- Si $n = 2$, on dispose alors de f de classe $\mathscr{C}^2$ tel que $f(x_0) = f(x_1) = f(x_2)$. En appliquant le théorème de Rolle sur le segment $[\, x_0\,;x_1\,]$ et sur le segment $[\, x_1\,;x_2\,]$, on obtient qu'il existe $y_0 \in \,]\, x_0\,;x_1\,[$ tel que $f'(y_0) = 0$ et qu'il existe $y_1 \in \,]\, x_1\,;x_2\,[$ tel que $f'(y_1) = 0$. Comme $y_0 < y_1$ et que $f'(y_0) = f'(y_1)$, appliquons le théorème de Rolle à la fonction f' et au segment $[\, y_0\,;y_1\,]$, ainsi il existe $c \in \,]\, y_0\,;y_1\,[$ tel que $(f')'(c) = 0$.
- La figure suivante illustre le cas général (mais c'est une figure et non une preuve).

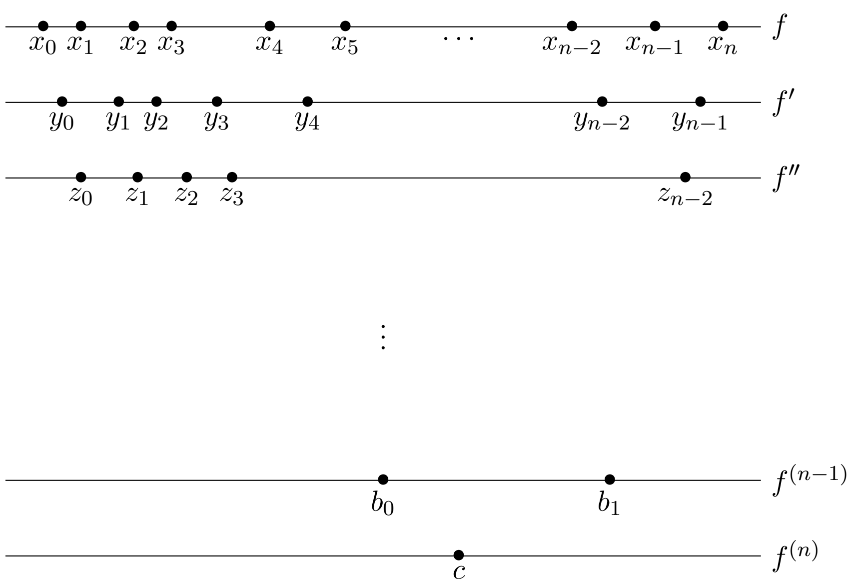


FIGURE 1 – La première ligne représente les réels qui annule f, la deuxième ligne représente les réels qui annule f' par application du théorème de Rolle à f. À chaque dérivée, on obtient un réel en moins qui annule la dérivée en question jusqu'à la dérivée n-ième.

- Généralisons et posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}(n)$: « pour toute $f \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ s'annulant en $x_0 < x_1 < ... < x_n$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$». D'après ce qui précède, $\mathscr{P}(1)$ et $\mathscr{P}(2)$ sont vraies. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Considérons $f \in \mathscr{C}^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ s'annulant en $x_0 < x_1 < ... < x_{n+1}$. Alors, soit $i \in [\![\, 0\,;n\,]\!]$, f est continue sur $[\, x_i\,;x_{i+1}\,]$ dérivable sur $]\, x_i\,;x_{i+1}\,[$ et $f(x_i) = f(x_{i+1})$ d'après le théorème de Rolle, il existe $y_i \in \,]\, x_i\,;x_{i+1}\,[$ tel que $f'(y_i) = 0$. On a alors

$$x_0 < y_0 < x_1 < y_1 < x_2 < \ldots < y_n < x_{n+1}$$

En particulier, $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$. posons $g = f' \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec g qui s'annule en y_1, y_2,... et y_n. En appliquant $\mathscr{P}(n)$ à g, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $g^{(n)}(c) = 0$. Ainsi, $f^{(n+1)}(c) = 0$. Ceci démontre que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

5. On aurait pu aller plus vite en disant qu'on avait des racines telles que la somme des multiplicité était supérieur ou égale à $\sum_{i=1}^{r} (m_i - 1) + r - 1 \geqslant n - 1$ et que comme $d^\circ P' = n - 1$, on les a toutes et donc P' est scindé. «Supérieur ou égale» et non pas «égale», car on ne connait pas la multiplicité des y_i.

Correction de l'exercice 14.

Correction de l'exercice 15. Posons $g\colon x \mapsto f(x) - \left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right)$. Remarquons que $g(a) = g(b) = 0$. La fonction g est dérivable comme somme de fonctions dérivables, et

$$\forall x \in [\,a\,;b\,] \qquad g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x) - \sup_{c\in[\,a\,;b\,]} f'(c) \leqslant 0$$

Ainsi, g est décroissante sur $[\,a\,;b\,]$. Pour tout $x \in [\,a\,;b\,]$, $a \leqslant x \leqslant b$, donc $0 = g(b) \leqslant g(x) \leqslant g(a) = 0$. Ainsi, g est nulle. Dès lors, $f\colon x \mapsto \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$ est une fonction affine.

Correction de l'exercice 16. Présentons deux méthodes. Notons ℓ cette limite finie commune.

1. Première méthode : distinguons plusieurs cas :
   - Soit pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ell$, alors bon ben...
   - Soit il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) < \ell$.
   - Soit il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) > \ell$ (traitons que ce cas, en observant que le cas 2 est similaire). Notons $\varepsilon = \dfrac{f(x_0)-\ell}{2} > 0$, alors comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$:

     $$\exists A \in \mathbb{R} \qquad \forall x \geqslant A \quad \ell-\varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell+\varepsilon = \frac{f(x_0)+\ell}{2} < f(x_0)$$

     On remarque donc que $x_0 < A$ (par l'absurde, car sinon, on aurait $f(x_0) > f(x_0)$). De même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$:

     $$\exists B \in \mathbb{R} \qquad \forall x \leqslant B \quad \ell-\varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell+\varepsilon = \frac{f(x_0)+\ell}{2} < f(x_0)$$

     On remarque de même que $x_0 > B$. On a donc $B < x_0 < A$ avec $f(B) < f(x_0)$ et $f(A) < f(x_0)$. Supposons que $f(B) \leqslant f(A)$. Alors on a $f(B) \leqslant f(A) < f(x_0)$. Comme f est continue (car dérivable), par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [\,B\,;x_0\,]$ tel que $f(c) = f(A)$, avec $c \leqslant x_0 < A$. On applique donc le théorème de Rolle à f sur le segment $[\,c\,;A\,]$. On procède de même si $f(A) \leqslant f(B)$.
2. Une autre méthode consiste à étudier

   $$g\colon \begin{cases} \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad x \qquad \longmapsto f(\tan(x)) \end{cases}$$

   Par composition de fonctions continues, cette fonction est continue sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$. De plus, on observe que par composition de limites, on a que

   $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} g(x) = \ell = \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} g(x)$$

   Donc g est prolongeable par continuité sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Notons encore g ce prolongement. On a alors $g\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \ell$. Avec g continue sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$. De plus par composition de fonctions dérivables, g est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$. On peut donc appliquer le théorème de Rolle. Il existe $c \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, tel que $g'(c) = 0$. Or en dérivant g, on a donc que $(1+\tan^2(c))f'(\tan c) = 0$. En notant $\tilde{c} = \tan c \in \mathbb{R}$ et en remarquant que $1+\tan^2(c) \neq 0$, on obtient que $f'(\tilde{c}) = 0$.

Correction de l'exercice 17.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{cases}$ est continue sur $[\,n\,;n+1\,]$, dérivable sur $]\,n\,;n+1\,[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]\,n\,;n+1\,[$ tel que

   $$f'(c) = \frac{f(n+1)-f(n)}{(n+1)-n} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

De plus, pour tout $x \in]\,0\,;+\infty\,[$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Ainsi, f' est décroissante sur $[\,n\,;n+1\,]$ donc

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{c}} = f'(c) \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Donc,

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

2. Soit un entier $n \geqslant 2$. En faisant un décalage d'indice dans la question 1, on obtient :

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{n} - \sqrt{n-1} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n-1}} \tag{1}$$

De plus, on a d'après la question précédente on a pour tout $n \geqslant 2$

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}} \tag{2}$$

En réunissant les inéquations (1) et (2), on obtient l'égalité voulue pour $n \geqslant 2$. Pour $n = 1$, il suffit de remplacer par $n = 1$ pour voir que la série d'inégalités démandées tient.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sommons les inégalités précédentes pour $k \in [\![\,1\,;n\,]\!]$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{k+1} - \sqrt{k} &\leqslant \frac{1}{2\sqrt{k}} \leqslant \sqrt{k} - \sqrt{k-1} \\
\sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right) \\
2\sqrt{n+1} - 2 &\leqslant S_n \leqslant 2\sqrt{n}
\end{aligned}$$

Où on a reconnu des sommes télescopiques [6].

4. On repart de l'encadrement précédent et on divise par $2\sqrt{n}$.

$$\frac{2\sqrt{n+1} - 2}{2\sqrt{n}} \quad \leqslant \quad \frac{S_n}{2\sqrt{n}} \leqslant 1$$

Or [7], $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2\sqrt{n+1}-2}{2\sqrt{n}} = 1$. Par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{S_n}{2\sqrt{n}} = 1$ c'est-à-dire que $S_n \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$. Enfin, puisque des suites équivalentes ont la même limite, on obtient que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.

Correction de l'exercice 18. Procédons par analyse-synthèse :

- Analyse : supposons que g existe, alors pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, $g(y) = g((\sqrt{y})^2) = f(\sqrt{y})$.
- Synthèse : posons $g\colon \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(\sqrt{x}) \end{cases}$ et on va montrer que ce g là convient :
  - — Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x^2) = f(\sqrt{x^2}) = f(|x|) = f(x)$.
  - — $\sqrt{}\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est continue et $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est continue, donc par composition, g est continue.
  - — $\sqrt{}\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par composition, g est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus,

$$\forall x > 0 \qquad g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} f'(\sqrt{x})$$

6. Si vous avez oublié le calcul des sommes télescopiques, c'est le moment d'aller le réviser.
7. Au fait pourquoi la limite annoncée est-elle vraie ? Si vous ne vous êtes pas posé la question, c'est le signe donc que je pouvais vous escroquer sans problème. Ne vous laissez jamais avoir...

— Comme, f' est dérivable en 0, on a $\lim_{y\to a}\dfrac{f'(y)-f'(0)}{y-0}=f''(0)$ soit $\lim_{y\to a}\dfrac{f'(y)}{y}=f''(0)$. Donc par composition de limites avec $y=\sqrt{x}$, on a $\lim_{x\to 0}\dfrac{f'(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}=f''(0)$. Ceci montre que g' admet une limite en 0^+ et que $\lim_{x\to 0^+} g'(x)=\dfrac{1}{2}f''(0)$. Ainsi, g est continue sur $\mathbb{R}_+$, $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $\lim_{x\to 0^+} g'(x)=\dfrac{1}{2}f''(0)$. Ainsi, le théorème de la limite de la dérivée s'applique : g est dérivable en 0 et $g'(0)=\dfrac{1}{2}f''(0)$. Donc g' est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi, le g que l'on a posé est bien $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x\geqslant 0$, $g(x^2)=f(x)$.

Correction de l'exercice 19.

Correction de l'exercice 20. 1. Fixons $t\in\,]\,0\,;a\,]$. Posons $h\colon\begin{cases}]\,0\,;a\,[\longrightarrow\mathbb{R}\\ x\longmapsto f(x)g(t)-f(t)g(x)\end{cases}$.

- Alors $h(0)=f(0)g(t)-f(t)g(0)=0$ et $h(t)=f(t)g(t)-f(t)g(t)=0$. Donc $h(t)=h(0)$
- h est continue sur $[\,0\,;t\,]$ (comme différence de fonctions qui le sont)
- h est dérivable sur $]\,0\,;t\,[$ (idem)

On peut donc appliquer le théorème de Rolle, il existe $c_t\in\,]\,0\,;t\,[$, tel que[8] [9] $h'(c_t)=0$. En dérivant h, on obtient donc $f(c_t)g(t)-f(t)g(c_t)=0$.

2. Soit $t\in\,]\,0\,;a\,[$, comme $t>0$, on a $g(t)\neq 0$. De même $c_t\in\,]\,0\,;t\,[$, donc $g(c_t)\neq 0$. On a donc, par division par des quantités non nulles, $\dfrac{f(t)}{g(t)}=\dfrac{f'(c_t)}{g'(c_t)}$. Or comme $0<c_t<t$, par encadrement, on en déduit que $\lim_{t\to 0} c_t=0$. Comme on a supposé que $\lim_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\ell$. On peut en déduire, par composition de limite, que $\lim_{x\to 0}\dfrac{f'(c_t)}{g'(c_t)}=\ell$. Nous avons donc démontré que $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\ell$. Autrement dit, nous avons levé l'indéterminée dans la limite de $\dfrac{f}{g}$ en 0.

Correction de l'exercice 21.

Correction de l'exercice 22.

Correction de l'exercice 23.

Correction de l'exercice 24. 1. $d^\circ Q_n=2n$, donc en dérivant n fois, $d^\circ L_n=2n-n=n$.

2. $Q_n=(1-X)^n(1+X)^n$. Ainsi, 1 et -1 sont racines de Q_n avec multiplicité n. Par caractérisation de la multiplicité, pour tout $k\in[\![\,0\,;n_1\,]\!]$, ${Q_n}^{(k)}(1)=0$ et ${Q_n}^{(k)}(-1)=0$.
3. Posons l'hypothèse de récurrence, $\mathscr{P}(k)$: «${Q_n}^(k)$ admet au moins k racines réelles distinctes dans $]\,-1\,;1\,[$.»
   - Pour $k=0$, il n'y a rien à montrer, «avoir au moins 0 racines»...
   - Pour $k=1$. Comme $Q_n(-1)=Q_n(1)=0$. Et que $x\mapsto Q(x)$ est continue sur $[\,-1\,;1\,]$ et dérivable sur $]\,-1\,;1\,[$. D'après le théorème de Rolle, il existe $x_1\in\,]\,-1\,;1\,[$ tel que $Q'(x_1)=0$. Dès lors, $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
   - Soit $k\in[\![\,0\,;n-1\,]\!]$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie. Alors, il existe $(x_1,x_2,\ldots,x_k)\in\mathbb{R}^k$ tel que
   $$-1<x_1<x_2<\ldots<x_k<1$$
   et pour tout $i\in[\![\,1\,;k\,]\!]$, x_i est racine de ${Q_n}^{(k)}$. De plus, comme $k\leqslant n-1$, -1 et 1 sont racines de ${Q_n}^{(k)}$ d'après la question 2. Posons $x_0=-1$ et $x_{k+1}=1$. Ainsi, $x_0<x_1<x_2\ldots<x_k<x_{k+1}$ avec pour

8. On le note c_t et non c car il dépend du t fixé.
9. A priori, c_t n'est pas unique, il faut donc en choisir un parmi tous les choix possibles. Et comme, on a besoin de faire ce choix pour une infinité de t différents, on a en fait, très subtilement utilisé un axiome controversé pour ça : l'axiome du choix. Controversé car cet axiome mène à des résultats surprenants. Mais rassurez-vous, rien ne tout ça n'est à connaître.

tout $i \in [\![0\,;k+1]\!]$, $Q(x_i) = 0$. Soit $i \in [\![0\,;k]\!]$, comme ${Q_n}^{(k)}(x_i) = {Q_n}^{(k)}(x_{i+1}) = 0$, $x \mapsto Q(x)$ est continue sur $[\, x_i\,; x_{i+1}\,]$ dérivable sur $]\, x_i\,; x_{i+1}\,[$, d'après le théorème de Rolle, il existe $y_i \in\,]\, x_i\,; x_{i+1}\,[$ tel que ${Q_n}^{(k+1)} = 0$. Ainsi,

$$0 = x_0 < y_0 < x_1 < y_1 < x_2 < \ldots < x_k < y_k < x_{k+1} = 1$$

Ainsi, y_0, y_1, …, y_k sont $k+1$ racines distinctes de ${Q_n}^{(k+1)}$ dans $]\, 0\,;1\, [$. Ceci montre que $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.

- Par récurrence finie[10], pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, $\mathscr{P}(n)$ vraie. En particulier pour $k = n$, $L_n = {Q_n}^{(n)}$ admet n racines distinctes dans $]\, -1\,;1\, [$.

Correction de l'exercice 25.

Correction de l'exercice 26.

Correction de l'exercice 27. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $t \in [\, 0\,;1\,]$. Montrons que[11]

$$(g \circ f)(ta + (1-t)b) \leqslant t(g \circ f)(a) + (1-t)(g \circ f)(b)$$

Tout d'abord comme f est convexe, on a :

$$f(ta + (1-t)b) \leqslant tf(a) + (1-t)f(b)$$

De plus, comme g est croissante, on a :

$$g(f(ta + (1-t)b)) \leqslant g(tf(a) + (1-t)f(b))$$

Si on pose $\alpha = f(b)$ et $\beta = f(b)$, on peut alors utiliser la convexité de g et obtenir :

$$(g \circ f)(ta + (1-t)b)) \leqslant g(t\alpha + (1-t)\beta) \leqslant tg(\alpha) + (1-t)g(\beta) = t(g \circ f)(a) + (1-t)(g \circ f)(b)$$

On a ainsi montré que $g \circ f$ est une fonction convexe.

Correction de l'exercice 28.

Correction de l'exercice 29. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Montrons que $f(a) = f(b)$. Supposons par l'absurde que $f(a) \neq f(b)$.

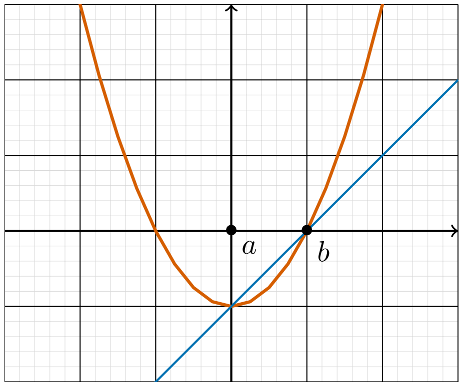
- Supposons que $f(a) < f(b)$. Considérons g, la fonction affine qui coupe f en a et en b, alors $g\colon x \mapsto \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$. Comme f est convexe (voir figure 2), f est au-dessus de g en dehors de $[\, a\,;b\,]$. En particulier, pour $x \geqslant b$, $f(x) \geqslant g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Par minoration, on en déduit que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Ceci contredit le fait que f soit bornée. Dès lors, $f(a) < f(b)$ n'est pas possible.
- De même, supposons alors $f(a) > f(b)$. Considérons toujours g, la fonction affine qui coupe f en a et en b, alors $g\colon x \mapsto \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$ Comme f est convexe (voir toujours figure 2), f est au-dessus de g en dehors de $[\, a\,;b\,]$. En particulier, pour $x \leqslant a$, $f(x) \geqslant g(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$. Par minoration, on en déduit que $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$. Ceci contredit le fait que f soit bornée. Dès lors, $f(a) > f(b)$ n'est pas possible.

Ainsi, $f(a) = f(b)$. Et ce pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$. Ceci démontre que f est une fonction constante.

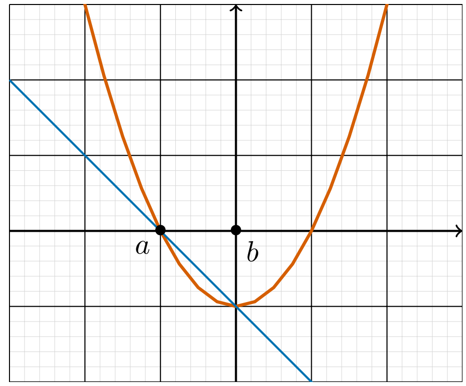
Correction de l'exercice 30. 1. Raisonnons par récurrence avec l'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}(n)$: «pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in I^n$, pour tout $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in [\, 0\,;1\,]^n$, si $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, $f\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$»

10. Il faut bien comprendre ici que l'on doit faire une récurrence fini, car il faut que $k \leqslant n-1$ pour pouvoir affirmer que 1 et -1 sont racines de ${Q_n}^{(k)}$ car après $n-1$ ce n'est plus le cas.

11. Attention à bien lire l'énoncé, on ne dit pas que f et g sont dérivables (que ce soit une ou deux fois), ainsi il est hors de questions de dériver $g \circ f$.



(a) Cas où $f(a) < f(b)$



(b) Cas où $f(a) > f(b)$

FIGURE 2 – En rouge la fonction f et en bleu la fonction affine g.

- Pour $n = 2$. Soit $(x_1, x_2) \in I^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in [\,0\,;1\,]$ tels que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, alors par convexité de f

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = f(\lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1)x_2) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + (1-\lambda_1) f(x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

Ainsi, $\mathscr{P}(2)$ est vraie.

- Soit un entier $n \geqslant 2$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in I^{n+1}$ soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}) \in [\,0\,;1\,]^{n+1}$. Supposons $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$.

— Si $\lambda_{n+1} = 1$, alors $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 0$ or, tous les λ_k sont positifs, donc, pour tout $k \in [\![\,1\,;n\,]\!]$, $\lambda_k = 0$. Ainsi,

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) = f(x_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(x_k)$$

Ainsi, l'inégalité demandée est bien vérifiée.

— Si $\lambda_{n+1} < 1$. Alors :

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) = f\left(\lambda_{n+1} x_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = f\left(\lambda_{n+1} x_{n+1} + (1-\lambda_{n+1}) \times \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} x_k\right)\right)$$

Comme f est convexe, on obtient :

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) \leqslant \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) + (1-\lambda_{n+1}) f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} x_k\right)$$

Posons, pour tout $k \in [\![\,1\,;n\,]\!]$, $\mu_k = \dfrac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} = \dfrac{\lambda_k}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} \in [\,0\,;1\,]$. Remarquons que

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_j} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_j} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$$

Ainsi, on peut appliquer $\mathscr{P}(n)$ au μ_k :

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} x_k\right) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \mu_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu_k f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} f(x_k)$$

Dès lors,

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) \leqslant \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(x_k)$$

Ceci prouve que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie dans tous les cas.

- Par récurrence, la propriété est vraie pour tout entier $n \geqslant 2$.

2. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in {\mathbb{R}_+^*}^n$. La fonction $-\ln$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ (sa dérivée seconde est positive). Pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $\lambda_k = 1/n$, de sorte que $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$. Alors, on peut appliquer la question précédente :

$$-\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(-\ln(x_k)\right)$$

Multiplions par -1 cette inégalité :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(x_k) \leqslant \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$$

Comme exponentielle est croissante, on en déduit que :

$$\exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

En reconnaissant une puissance en $1/n$ (et donc une racine n-ième), on peut en conclure que :

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

En appliquant ce qui précède non pas à x_k mais à $1/x_k$, on obtient :

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$$

En appliquant la fonction inverse qui est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient :

$$\frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{x_k}} \leqslant \frac{1}{\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{x_k}}} = \sqrt[n]{\frac{1}{\dfrac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} x_k}}} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}$$

3. La moyenne géométrique est plus faible que la moyenne arithmétique cela va faire baisser votre note. En plus cette inégalité devient particulièrement intéressante pour moi si jamais vous avez obtenu un 0 à l'une de vos interrogations.

Correction de l'exercice 31. 1. Soient $a > 0$ et $b > 0$. La fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, en effet sa dérivée est $x \mapsto 1/x$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi,

$$\forall (x, x') \in {\mathbb{R}_+^*}^2 \quad \forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad \ln(tx + (1-t)x') \geqslant t\ln(x) + (1-t)\ln(x') = \ln(x^t {x'}^{1-t})$$

Par croissance de la fonction exponentielle, on obtient :

$$x^t {x'}^{1-t} \leqslant tx + (1-t)x'$$

Posons alors $x = a^p > 0$, $x' = b^q > 0$ et $t = 1/p \in \,]\,0\,;1\,[$. Ainsi, $1 - t = 1 - 1/p = 1/q$ par conséquent :

$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

2. Commençons par remarquer que l'inégalité démontrée à la première question est encore vraie si $a = 0$ ou $b = 0$. Soient $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p = \sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|^q = 1$, alors, d'après la question précédente
$$\forall i \in [\![1\,;n]\!] \qquad |x_i y_i| = |x_i| \times |y_i| \leqslant \frac{|x_i|^p}{p} + \frac{|y_i|^q}{q}$$
Par somme, on a donc
$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|}{p} + \sum_{i=1}^{n} \frac{|y_i|}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|x\|_p \|y\|_q$$
On a donc démontré ce qu'il fallait dans le cas où $\|x\|_p = 1$ et $\|y\|_q = 1$. Dans le cas général, remarquons déjà $\|\lambda x\|_p = |\lambda| \times \|x\|_p$. Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ si $x = (0, 0, \dots, 0)$ ou $y = (0, 0, \dots, 0)$ il n'y rien à faire. Supposons $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Dans ce cas on pose $\tilde{x} = x/\|x\|_p$ et $\tilde{y} = y/\|y\|_q$, alors $\|\tilde{x}\|_p = 1$ et $\|\tilde{y}\|_q = 1$. On peut donc appliquer ce qui précède à $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$.
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\|x\|_p} \times \frac{y_i}{\|y\|_p} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|}{\|x\|_p} \times \frac{|y_i|}{\|y\|_p} \leqslant 1$$
En multipliant par $\|x\|_p \times \|y\|_q$ on obtient le résultat.
3. Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, en appliquant l'inégalité précédente, il vient
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p &\leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i||x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i||x_i + y_i|^{p-1} \\
&\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant \left[\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \times \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{q}} \\
\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1-\frac{1}{q}} &\leqslant \|x\|_p + \|y\|_p \\
\|x + y\|_p &\leqslant \|x\|_p + \|y\|_p
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 32.

Correction de l'exercice 33.

Correction de l'exercice 34. 1. Notons $f \colon x \mapsto x^{2n}$.

- En connaissant les dérivées k-ième des fonctions de la forme $x \mapsto x^p$ on peut dire que pour $k \leqslant 2n$, $f^{(k)} \colon x \mapsto \dfrac{(2n)!}{(2n-k)!} x^{2n-k}$.
- De plus, en notant $g \colon x \mapsto x^n$, on a $f = g \times g$, appliquons la formule de Leibniz. Pour $k \leqslant n$:

$$\begin{aligned}
f^{(k)}(x) &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} g^{(i)}(x) \times g^{(k-i)}(x) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{n!}{(n-i)!} x^{n-i} \times \frac{n!}{(n-(k-i))!} x^{n-(k-i)} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{(n!)^2}{(n-i)!(n-k+i)!} x^{2n-k}
\end{aligned}$$

On a donc montré que pour tout $k \leqslant n$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(k)}(x) = \frac{(2n)!}{(2n-k)!}x^{2n-k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{(n!)^2}{(n-i)!(n-k+i)!}x^{2n-k}$$

2. Prenons $k = n$ et prenons $x = 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{(2n)!}{(2n-n)!} &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{(n!)^2}{(n-i)!(n-n+i)!} \\
\frac{(2n)!}{n!} &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 \times n! \\
\frac{(2n)!}{(n!)^2} &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 \\
\binom{2n}{n} &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2
\end{aligned}$$

On a donc le résultat voulu [12]

Correction de l'exercice 35.

Correction de l'exercice 36. Pour cela, raisonnons par récurrence, on va poser dans l'hypothèse de récurrence que $f \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on va aussi supputer la forme de la dérivée n-ième pouvoir la dériver. Pour, $n \in \mathbb{N}$, posons donc l'hypothèse de récurrence suivante :

$$\mathscr{P}(n) \colon \text{«} f \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \exists (P_n, Q_n) \in \mathbb{R}[X]^2 \text{ tel que } \forall x > 0 \quad Q_n(x) \neq 0 \text{ et } f^{(n)} \colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{P_n(x)}{Q_n(x)} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases} \end{cases} \text{»}$$

- Initialisation : Il faut montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et trouver P_0 et Q_0 tel que

$$f^{(0)} = f =\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{P_0(x)}{Q_0(x)} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases} \end{cases}$$

  Tout d'abord f est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ en tant que fonction nulle, elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par composition de fonctions continues. Il reste à étudier le problème en 0. Pour cela, par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$, de plus, $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = 0$, or $f(0) = 0$. Ainsi, $f(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$, ainsi f est continue en 0. Donc $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Enfin, posons $Q_0 = P_0 = 1 \in \mathbb{R}[X]$ et ces polynômes conviennent au vu de f.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, montrons $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons donc $\mathscr{P}(n)$ vraie. Ainsi

$$f \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \ \exists (P_n, Q_n) \in \mathbb{R}[X]^2 \text{ tel que } \forall x > 0 \quad Q_n(x) \neq 0 \text{ et}$$

  — $f^{(n)}$ est clairement de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et de dérivée nulle
  — $f^{(n)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par composition et produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.

12. On peut donner une interprétation de ce résultat : imaginons un groupe de $2n$ personnes composé de n hommes et n femmes. Combien peut-on former de sous-groupes à n personnes dans ce groupe ? $\binom{2n}{n}$ bien sûr. Mais aussi, on peut imaginer, que dans un tel groupe, on a appelle i le nombre de femmes, ainsi il y a $\binom{n}{i}$ choix possibles pour les femmes. Dans ce cas il reste à choisir $n - i$ hommes parmi n hommes, soit $\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}$ possibilités. On a ainsi $\binom{n}{i}^2$ groupes à i fixé. Maintenant i peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et n, on obtient donc $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$ possibilités. D'où l'égalité.

— Mettons provisoirement de côté, le problème du caractère $\mathscr{C}^1$ en 0. Dérivons $f^{(n)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\begin{aligned} \forall x > 0 \qquad \left(f^{(n)}\right)'(x) &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2}\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} + \frac{P_n'(x)Q_n(x) - P_n(x)Q_n'(x)}{(Q_n(x))^2}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{P_n(x)Q_n(x) + x^2P_n'(x)Q_n(x) - x^2P_n(x)Q_n'(x)}{x^2Q_n(x)^2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi on pose les deux polynômes suivants :

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= P_n(X)Q_n(X) + X^2P_n'(X)Q_n(X) - X^2P_n(X)Q_n'(X) \in \mathbb{R}[X] \\ Q_{n+1} &= X^2Q_n(X)^2 \in \mathbb{R}[X] \end{aligned}$$

Alors Q_{n+1} ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a bien, pour tout $x > 0$, $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.

— Revenons maintenant au problème en 0, $f^{(n)}$ est continue (par hypothèse de récurrence), on a $\lim\limits_{x\to0^-}(f^{(n)})'(x) = 0$ et par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to0^+}(f^{(n)})'(x) = 0$. D'après le théorème de la limite de la dérivée, $f^{(n)}$ est dérivable en 0 et $(f^{(n)})'(0) = 0$, de plus, on a $\lim\limits_{x\to0}(f^{(n)})'(x) = 0 = (f^{(n)})'(0)$, on a donc la continuité en 0 de $(f^{(n)})'$.

On a donc montré que $f^{(n)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, autrement dit, $f \in \mathscr{C}^{n+1}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et que

$$f^{(n+1)} : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{P_{n+1}(x)}{Q_{n+1}(x)}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases} \end{cases}$$

On a donc montré que $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$.

- Par principe de récurrence, on a donc montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Donc $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Correction de l'exercice 37.