Exercice

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $M(x) = \begin{pmatrix} 1+x & 2x \\ -3x & 1-6x \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur x pour que $M(x)$ soit inversible.
2. Si $M(x)$ est inversible, calculer $M(x)^{-1}$.
3. Montrer que l'application suivante est injective :

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ x \longmapsto M(x) \end{cases}$$

4. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Démontrer qu'il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que $M(x)M(y) = M(z)$.
5. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{5}\}$. En utilisant la question précédente, en déduire un second calcul de $M(x)^{-1}$.

On fixe $x_0 \in \mathbb{R}$.

6. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n \in \mathbb{R}$ tel que $M(x_0)^n = M(u_n)$.
   On démontrera que $u_{n+1} = (1 - 5x_0)u_n + x_0$.
7. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de u_n en déduire celle de $M(x_0)^n$.
8. On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
9. Calculer $D = P^{-1}M(x_0)P$.
10. En déduire un deuxième calcul de $M(x_0)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
11. Déterminer une matrice A telle que $M(x_0) = I_2 + x_0A$.
12. Calculer A^2, puis en déduire la valeur de A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
13. En déduire un troisième calcul de $M(x_0)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Vérifier la cohérence de vos réponses aux questions 7, 10 et 13 de même pour les questions 2 et 5.

Problème

1. Dans $\mathbb{C}[X]$, écrire sous forme scindé le polynôme $X^2 + X + 1$.

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1 + x + x^2}$

2. Justifier que f est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
3. Écrire une fonction Python, nommée `f`, qui à $x \in \mathbb{R}$, renvoie $f(x)$.
4. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
5. Calculer, f', f'' puis donner les variations de f.
6. Quelle est l'équation de la tangente de la courbe de f en 0 et quelle est la position de la courbe f par rapport à cette tangente sur un voisinage de 0 ?
7. Démontrer que f admet un unique point fixe α sur $\mathbb{R}$.
   On pourra s'aider de la fonction $x \mapsto x^3 + x^2 + x - 1$.
8. Démontrer que $\alpha \in \left[\dfrac{1}{3}\,;1\right]$.

On définit une suite, par $u_0 = 1$ et par pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{3} \leqslant u_n \leqslant 1$.
10. Déterminer une constante $C \in \left]0\,;1\right[$ telle que pour tout $x \in \left[\dfrac{1}{3}\,;1\right]$, $|f'(x)| \leqslant C$.
11. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant C^n$. Étudier alors la convergence de la suite $(u_n)_n$.

12. En utilisant la question précédente, écrire un script complet en Python permettant d'obtenir une approximation de α à $\varepsilon > 0$ près.
13. En utilisant la méthode de dichotomie, écrire un second script complet en Python permettant également d'obtenir une approximation de α à $\varepsilon > 0$ près.
14. En justifiant votre réponse, indiquez laquelle des deux méthodes vous semblent la plus rapide pour donner la valeur de α.
15. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $f^{(n)} : x \mapsto \dfrac{P_n(x)}{(1+x+x^2)^{n+1}}$.
    On établira que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = (1+X+X^2)P_n' - (n+1)(2X+1)P_n$.
16. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, un tel P_n est unique.
17. Déterminer P_2, P_3 et P_4.
18. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d^\circ P_n = n$ et que coefficient dominant de P_n est $(-1)^n(n+1)!$.
19. Énoncer la formule de Leibniz pour les fonctions (hypothèses incluses).
20. En utilisant $x \mapsto (1+x+x^2)f(x)$, démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$:
$$P_n + n(2X+1)P_{n-1} + n(n-1)(1+X+X^2)P_{n-2} = 0$$
21. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $P_n' = -(n+1)nP_{n-1}$.
22. Soit $x \in \mathbb{R}$ et n un entier $n \geqslant 2$, montrer que si x est racine de P_n et de P_{n-1}, alors x est aussi racine de P_{n-2}.
23. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n et P_{n+1} n'ont pas de racine commune.
24. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les racines réelles de P_n sont toutes simples.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et g continue sur $[\, a\,;+\infty\,[$ et dérivable sur $]\, a\,;+\infty\,[$ telle que $g(a) = 0$ et $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

25. On pose, pour $x \in \left]\arctan(a)\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ $\varphi(x) = g(\tan(x))$. Montrer que φ est prolongeable par continuité en a et donner l'expression de son prolongement par continuité que l'on appellera encore φ.
26. Montrer qu'il existe $c \in \left]\arctan(a)\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $\varphi'(c) = 0$.
27. En déduire l'existence de $d \in\,]\, a\,;+\infty\,[$ tel que $g'(d) = 0$.
28. Montrer que P_1 et P_2 sont scindés à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$.
29. Soit un entier $n \geqslant 2$. On suppose que P_n est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$ et on note α_k, pour $k \in [\![\, 1\,;n\,]\!]$, ses racines classées par $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$.
    (a) Montrer que pour tout $k \in [\![\, 1\,;n\,]\!]$, $f^{(n)}(\alpha_k) = 0$
    (b) Déterminer les limites de $f^{(n)}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
    (c) Montrer que $f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur $]\,\alpha_n\,;+\infty\,[$.
    On montrerait de même que $f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur $]\,-\infty\,;\alpha_1\,[$, mais on on demande pas une telle preuve.
    (d) Montrer que P_{n+1} admet au moins $n+1$ racines réelles.

    En conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est scindé à racines simples.