Exercice

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\det(M(x)) = (1+x)\times(1-6x) - (2x)\times(-3x) = 1 + x - 6x - 6x^2 + 6x^2 = 1 - 5x$$

La matrice $M(x)$ est inversible ssi $\det(M(x)) \neq 0$ ssi $x \neq \dfrac{1}{5}$.

2. Pour $x \neq \dfrac{1}{5}$, $M(x)^{-1} = \dfrac{1}{1-5x}\begin{pmatrix} 1-6x & -2x \\ 3x & 1+x \end{pmatrix}$

3. Soit $(x, x') \in \mathbb{R}^2$. Supposons $\Phi(x) = \Phi(x')$, c'est-à-dire, $\begin{pmatrix} 1+x & 2x \\ -3x & 1-6x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x' & 2x' \\ -3x' & 1-6x' \end{pmatrix}$. Or, si deux matrices sont égales, elles ont les mêmes coefficients. En particulier, on en déduit que $1+x = 1+x'$ donc que $x = x'$. Par conséquent, Φ est injective.

4. Présentons deux méthodes [1]
   - Par produit matriciel,

$$\begin{aligned} M(x)M(y) &= \begin{pmatrix} 1+x & 2x \\ -3x & 1-6x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+y & 2y \\ -3y & 1-6y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1+x)\times(1+y) + 2x\times(-3y) & (1+x)\times(2y) + (2x)\times(1-6y) \\ (-3x)\times(1+y) + (1-6x)\times(-3y) & (-3x)\times(2y) + (1-6x)\times(1-6y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+x+y-5xy & 2(x+y-5xy) \\ -3(x+y-5xy) & 1-6(x+y-5xy) \end{pmatrix} = M(x+y-5xy) \end{aligned}$$

   Ainsi, on pose $z = x + y - 5xy \in \mathbb{R}$, on a donc montré l'existence de z tel que $M(x)M(y) = M(z)$.
   - Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$, alors $M(x)M(y) = (I_2 + xA)(I_2 + yA) = I_2 + xA + yA + xyA^2$. De plus, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 15 & 30 \end{pmatrix} = -5A$. Dès lors,

$$M(x)M(y) = I_2 + xA + yA - 5xyA = I_2 + (x+y-5xy)A = M(x+y-5xy)$$

5. Soit $y \in \mathbb{R}$, alors $x + y - 5xy = 0$ ssi $y(1-5x) = -x$ ssi $y = \dfrac{-x}{1-5x}$ (possible car $1 - 5x \neq 0$). Ainsi, d'après le résultat de la question précédente, $M(x)M\left(\dfrac{-x}{1-5x}\right) = M(0) = I_2$. Ceci prouve que $M(x)$ est inversible et que

$$M(x)^{-1} = M\left(\frac{-x}{1-5x}\right) = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{-x}{1-5x} & 2\dfrac{-x}{1-5x} \\ -3\dfrac{-x}{1-5x} & 1 - 6\dfrac{-x}{1-5x} \end{pmatrix} = \frac{1}{1-5x}\begin{pmatrix} 1-6x & -2x \\ 3x & 1+x \end{pmatrix}$$

6. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: «il existe $u_n \in \mathbb{R}$ tel que $M(x_0)^n = M(u_n)$».
   - Pour $n = 0$, $M(x_0)^n = I_2$ et $M(0) = I_2$. Posons alors $u_0 = 0$ de sorte que $M(x_0)^0 = M(u_0)$, ainsi $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Considérons alors $u_n \in \mathbb{R}$ tel que $M(x_0)^n = M(u_n)$. Ainsi,

$$M(x_0)^{n+1} = M(x_0)M(x_0)^n = M(x_0)M(u_n) \underset{\text{Question 4}}{=} M(x_0 + u_n - 5x_0u_n)$$

   On pose alors $u_{n+1} = x_0 + u_n(1 - 5x_0) \in \mathbb{R}$, on a ainsi montré l'existence de $u_{n+1} \in \mathbb{R}$ tel que $M(x_0)^{n+1} = M(u_{n+1})$, ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   - Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe u_n tel que $M(x_0)^n = M(u_n)$, De plus, $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n(1 - 5x_0) + x_0$

7. - Si $x_0 = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$. Ainsi, $(u_n)_n$ est une suite constante, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 = 0$. De plus, $M(x_0)^n = M(0)^n = I_2{}^n = I_2$.

1. Qui reviennent au même, mais la seconde est moins lourde en calculs

- Si $x_0 \neq 0$, la question précédente, montre que $(u_n)_n$ est une suite arithmético-géométrique. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, $\ell = (1-5x_0)\ell + x_0$ ssi $5x_0\ell = x_0$ ssi $\ell = 1/5$ (car $x_0 \neq 0$). Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & (1-5x_0)u_n + x_0 \\ \ell & = & (1-5x_0)\ell + x_0 \end{array}\right.$$
Par différence, $u_{n+1} - \ell = (1-5x_0)(u_n - \ell)$. Ainsi, $\left(u_n - \dfrac{1}{5}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $1-5x_0$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - \dfrac{1}{5} = (1-5x_0)^n\left(u_0 - \dfrac{1}{5}\right)$. Comme $u_0 = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1-(1-5x_0)^n}{5}$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} M(x_0)^n &= M(u_n) = M\left(\frac{1-(1-5x_0)^n}{5}\right) = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{1-(1-5x_0)^n}{5} & 2\dfrac{1-(1-5x_0)^n}{5} \\ -3\dfrac{1-(1-5x_0)^n}{5} & 1-6\dfrac{1-(1-5x_0)^n}{5} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6-(1-5x_0)^n & 2-2(1-5x_0)^n \\ -3+3(1-5x_0)^n & -1+6(1-5x_0)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

8. $\det(P) = 6-1 = 5 \neq 0$, ainsi P est inversible et $P^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
9. En effectuant les deux produits matriciels :
$$\begin{aligned} D &= P^{-1}M(x_0)P = P^{-1}\begin{pmatrix} 1+x_0 & 2x_0 \\ -3x_0 & 1-6x_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 5x_0-1 \\ -1 & 3-15x_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5x_0-1 \\ -1 & 3-15x_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5-25x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-5x_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $D = P^{-1}M(x_0)P$, on a $M(x_0) = PDP^{-1}$, ainsi [2]
$$\begin{aligned} M(x_0)^n &= PD^nP^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-5x_0)^n \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-5x_0)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -(1-5x_0)^n \\ -1 & 3(1-5x_0)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6-(1-5x_0)^n & 2-2(1-5x_0)^n \\ -3+3(1-5x_0)^n & -1+6(1-5x_0)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$
11. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$. Alors, $I_2 + x_0A = \begin{pmatrix} 1+x_0 & 2x_0 \\ -3x_0 & 1-6x_0 \end{pmatrix} = M(x_0)$
12. - $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 15 & 30 \end{pmatrix} = -5A$
    - $A^3 = A^2A = (-5A)(A) = -5A^2 = 25A$.
    - Posons, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(k)$: «$A^k = (-5)^{k-1}A$».
    - Pour $k = 1$, $(-5)^{k-1}A = A = A^1$, donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
    - Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie. Alors,
    $$A^{k+1} = A^k \times A = (-5)^{k-1}A \times A = (-5)^{k-1}(-5A) = -5^kA$$
    Ainsi, $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.
    - Par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = (-5)^{k-1}A$ et $A^0 = I_2$.
13. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme I_2 et x_0A commutent, appliquons la formule du binôme de Newton, on sépare le cas $k = 0$ car la formule de A^k trouvée à la question précédente ne fonctionne pas par $k = 0$:
$$M(x_0)^n = (I_2 + x_0A)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x_0A)^k{I_2}^{n-k} = I_2 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}{x_0}^k(-5)^{k-1}A$$
De plus, $\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}{x_0}^k(-5)^{k-1} = -\dfrac{1}{5}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-5x_0)^k1^{n-k} - 1\right) = \dfrac{1}{5}\left(1-(1-5x_0)^n\right)$
Ceci prouve que $M(x_0)^n = I_2 + \dfrac{1}{5}\left(1-(1-5x_0)^n\right)A = M\left(\dfrac{1}{5}\left(1-(1-5x_0)^n\right)\right)$

2. Par une récurrence classique.

Problème

1. Proposons trois méthodes[3] :
   - $X^2+X+1=\left(X+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=\left(X+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^2=\left(X+\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)\left(X+\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)$
   - Le discriminant vaut $1-4=-3=\left(i\sqrt{3}\right)^2$. Les racines sont donc $\frac{-1\pm\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$. Ainsi, le polynôme se factorise par $\left(X-\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)\left(X-\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)$
   - Remarquons que 1 n'est pas racine. Soit $x\in\mathbb{C}\backslash\{1\}$, par somme des termes d'une suite géométrique, $x^2+x+1=\frac{1-x^3}{1-x}$, ainsi x est racine ssi $1-x^3=0$ ssi $x^3=1$ ssi $x=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ ou $x=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ ($x=1$ est exclus). Dès lors, le polynôme se factorise en $(X-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}})(X-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}})$

On pose, pour $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{1+x+x^2}$

2. $x\mapsto 1+x+x^2$ est une fonction polynomiale donc est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas. Par inverse, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
3.
```python
def f(x:float)->float:
    return 1/(1+x+x**2)
```
4. Comme on a l'inverse d'un polynôme du second degré qui n'admet pas de racines réelles, on utilise la forme canonique :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\right]_0^1\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan(\sqrt{3})-\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\end{aligned}$$

5. Dérivons f en tant qu'inverse d'une fonction dérivable qui ne s'annule pas : $f'\colon x\mapsto\frac{-(2x+1)}{(1+x+x^2)^2}$. Dérivons f' comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}f''(x) &= \frac{-2(1+x+x^2)^2+(2x+1)2(1+2x)(1+x+x^2)}{(1+x+x^2)^4}\\ &= \frac{2(1+2x)^2-2(1+x+x^2)}{(1+x+^2)^3}=\frac{6x(x+1)}{(1+x+x^2)^3}\end{aligned}$$

   Pour tout $x\geqslant -\frac{1}{2}$, $f'(x)\geqslant 0$ et f' ne s'annule qu'en $-1/2$, donc f est strictement décroissante sur $[-1/2\,;+\infty[$. Pour tout $x\leqslant -\frac{1}{2}$, $f'(x)\leqslant 0$ et f' ne s'annule qu'en $-1/2$, donc f est strictement croissante sur $]-\infty\,;-1/2]$.
6. L'équation est $y=f'(0)(x-0)+f(0)=1-x$. Remarquons que pour $x\geqslant 0$, $f''(x)\geqslant 0$, Donc $f_{|[0\,;+\infty[}$ est convexe, ainsi $f_{|[0\,;+\infty[}$ est au-dessus de sa tangente en 0. Pour $x\in[-1\,;0]$, $f''(x)\leqslant 0$, donc $f_{[-1\,;0]}$ est en dessous de sa tangente en 0. Ainsi, f est au dessus de sa tangente sur $\mathbb{R}_+$ et en dessous sur $[-1\,;0]$.
7. Soit $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=x$ ssi $1=x(1+x+x+^2)$ ssi $x^3+x^2+x-1=0$, on pose $g\colon x\mapsto x^3+x^2+x-1$, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car polynômiale), $g'\colon x\mapsto 3x^2+2x+1$. Or, le discriminant du polynôme $3X^2+2X+1$ vaut -8. Dès lors, g' est une fonction strictement positive. Ainsi, g est strictement croissante et continue (car dérivable), ainsi, g est une bijection de $\mathbb{R}$ vers

$$g(\mathbb{R})=\left]\lim_{x\to-\infty}g(x)\,;\lim_{x\to+\infty}g(x)\right[=]-\infty\,;+\infty[=\mathbb{R}$$

   Ainsi, 0 admet un et seul antécédent par g, il existe un unique $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $g(\alpha)=0$. Comme, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=x$ ssi $g(x)=0$, on en déduit que f admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}$.

3. La première servira pour le calcul de l'intégrale.

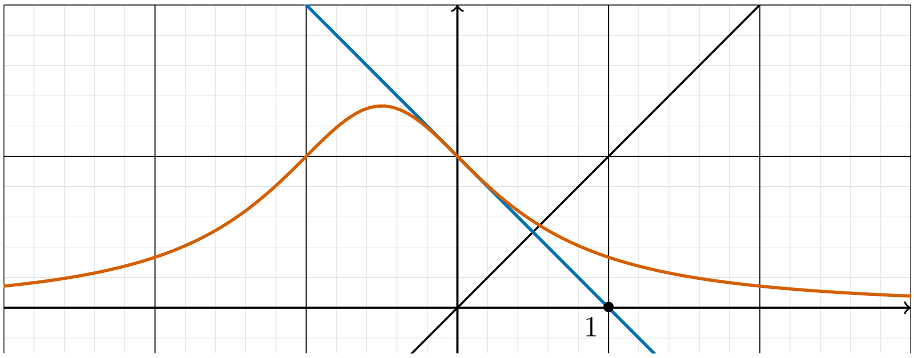

FIGURE 1 – En rouge la courbe de f, en bleu la tangente de f en 0. En noir, la courbe de $x \mapsto x$, à l'intersection de la courbe de f et de $x \mapsto x$, on trouve le point fixe.

.

8. La fonction g est continue sur $[\,1/3\,;1\,]$, $g(1/3) = \dfrac{1}{27} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{3} - 1 = \dfrac{1+3+9-27}{27} = \dfrac{-14}{27} < 0$ et $g(1) = 2$. Donc $g(1/3) \leqslant 0 \leqslant g(1)$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [\,1/3\,;1\,]$ tel que $g(x) = 0$, par unicité $\alpha = x \in [\,1/3\,;1\,]$
9. La fonction f est strictement décroissante et continue sur $[\,1/3\,;1\,]$, donc

$$f([\,1/3\,;1\,]) = [\,f(1)\,;f(1/3)\,] = \left[\frac{1}{3}\,;\frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}}\right] = \left[\frac{1}{3}\,;\frac{9}{13}\right] \subset [\,1/3\,;1\,]$$

Dès lors, l'intervalle $[\,1/3\,;1\,]$ est stable par f. Comme $u_0 \in [\,1/3\,;1\,]$, par propriété du cours, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [\,1/3\,;1\,]$.
10. La fonction f' est croissante sur $[\,1/3\,;1\,]$, ainsi, pour tout $x \in [\,1/3\,;1\,]$, $f'(1/3) \leqslant f'(x) \leqslant f'(1)$. Or, $f'(1) = \dfrac{-3}{9} = \dfrac{-1}{3}$ et

$$f'(1/3) = \frac{-5/3}{(1+1/3+1/9)^2} = \frac{-5/3}{(13/9)^2} = \frac{-5 \times 27}{169} = \frac{-135}{169}$$

Ainsi, pour tout $x \in [\,1/3\,;1\,]$, $-135/169 \leqslant f'(x) \leqslant -1/3$. La fonction valeur absolue étant décroissante sur $\mathbb{R}_-$, Donc, $|-1/3| \leqslant |f'(x)| \leqslant |-135/169|$. On pose alors $C = 135/169 \in \,]\,0\,;1\,[$, de sorte que, pour tout $x \in [\,1/3\,;1\,]$, $|f'(x)| \leqslant C$.
11. La fonction f est continue sur $\left[\dfrac{1}{3}\,;1\right]$ dérivable sur $\left]\dfrac{1}{3}\,;1\right[$, pour tout $x \in \left]\dfrac{1}{3}\,;1\right[$, $|f'(x)| \leqslant C$. Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis, f est C-lipschitzienne. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: «$|u_n - \alpha| \leqslant C^n$». Pour $n = 0$, $|u_0 - \alpha| = 1 - \alpha \leqslant 1 = C^0$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, alors

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \underset{f \text{ est } C\text{-lipschitzienne}}{\leqslant} C|u_n - \alpha| \underset{\mathscr{P}(n)}{\leqslant} C \times C^n = C^{n+1}$$

Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant C^n$. Comme $|C| = C < 1$, par propriété des suites géométriques, $C^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, d'après le théorème d'encadrement, $u_n - \alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, ainsi, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$
12. Il suffit de calculer les termes de la suite $(u_n)_n$ jusqu'à trouver n tel que $C^n < \varepsilon$, alors u_n sera une approximation de α à ε près :

```
C=135/169
n=0#indice pour la suite
u=0#valeur de u_n
while C**n>epsilon:
        n=n+1#on prend l'indice d'après
        u=f(u)#la fonction f a déjà été définie à la question 2
        #à chaque étape de la boucle, u=u_n
#lorsque la boucle a terminé, u est une approximation de alpha à epsilon près
```

Il y a un défaut : calculer C^n demande $n-1$ multiplications à chaque itération de la boucle while, c'est trop. À la place, on va retenir la valeur de C^n, pour calculer C^{n+1} à l'itération suivante :

```
C=135/169
n=0#indice pour la suite
u=0#valeur de u_n
E=1#majoration de l'erreur: E=C^n
while E>epsilon:
        n=n+1#on prend l'indice d'après
        u=f(u)#la fonction f a déjà été définie à la question 2
        E=E*C#la suite (C^n) est géométrique de raison C
#lorsque la boucle a terminé, u est une approximation de alpha à epsilon près
```

13. On sait que α vérifie $g(\alpha)=0$, on approxime donc un antécédent de 0 pour la fonction g par dichotomie :

```
def g(x):
        return x**3+x**2+x-1

a=1/3#g(a)<=0
b=1#g(b)>=0
while b-a>epsilon:
        c=(a+b)/2
        if g(c)<0:
                a=c# de sorte qu'on ait encore g(a)<=0<=g(b)
        else:
                b=c# de sorte qu'on ait encore g(a)<=0<=g(b)
#À la fin de la boucle while, a est une approximation de alpha à epsilon près.
```

14. Proposons deux méthodes : la première montre qu'on a compris l'idée et est déjà très bien :
   - Sans rentrer dans les détails techniques, à chaque itération, la dichotomie multiplie la longueur de l'intervalle où est α par $1/2$ alors que la première méthode multiplie la longueur de l'intervalle où est α par $135/169 \simeq 4/5$. Donc la dichotomie est plus rapide.
   - Soit $\varepsilon \in \,]0\,;1[$. La première méthode va s'arrêter dès qu'on a trouvé n tel que $C^n \leqslant \varepsilon$ donc pour le premier n tel que $n \geqslant \dfrac{\ln(\varepsilon)}{\ln(C)}$ ($\ln(C)<0$ car $C \in \,]0\,;1[$). Ainsi, l'algorithme s'arrête au bout de $n_1 = E\left(\dfrac{\ln(\varepsilon)}{\ln(C)}\right)+1$ itérations. La méthode par dichotomie va s'arrêter dès que l'on a trouvé n tel que $\dfrac{2}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \leqslant \varepsilon$ donc pour le premier n tel que $n \geqslant \dfrac{\ln(\varepsilon)+\ln(3/2)}{\ln(1/2)}$. Donc l'algorithme s'arrête au bout de $n_2 = E\left(\dfrac{\ln(\varepsilon)+\ln(3/2)}{\ln(1/2)})\right)+1$ itérations. Or, $\dfrac{\ln(\varepsilon)+\ln(3/2)}{\ln(1/2)} \leqslant \dfrac{\ln(\varepsilon)}{\ln(1/2)} < \dfrac{\ln(\varepsilon)}{\ln(C)}$ (en effet, $C>1/2$). Donc $n_2 \leqslant n_1$. La seconde méthode est plus rapide.

15. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $\mathscr{P}(n)$: «il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x+x^2)^{n+1}}$».

Posons $P_0 = 1 \in \mathbb{R}[X]$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(0)}(x) = f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2} = \dfrac{P_0(x)}{1+x+x^2}$. Dès lors, $\mathscr{P}(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$, considérons $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $f^{(n)}\colon x \mapsto \dfrac{P_n(x)}{(1+x+x^2)^n}$ alors, on peut dériver $f^{(n)}$ comme un quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
(f^{(n)})'(x) &= \frac{P_n'(x)(1+x+x^2)^{n+1} - P_n(x)(n+1)(1+2x)(1+x+x+^2)^n}{((1+x+x^2)^{n+1})^2} \\
f^{(n+1)}(x) &= \frac{P_n'(x)(1+x+x^2) - P_n(x)(n+1)(1+2x)}{(1+x+x^2)^{n+2}}
\end{aligned}$$

On pose alors $P_{n+1} = (1+X+X^2)P_n' - (n+1)(2X+1)P_n \in \mathbb{R}[X]$ de sorte que $f^{(n+1)}\colon x \mapsto \dfrac{P_{n+1}(x)}{(1+x+x^2)^{n+2}}$. On a donc montré que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

16. Soit $n \in \mathbb{N}$, soit Q_n un autre polynôme tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{Q_n(x)}{(1+x+x^2)^{n+1}}$, en chassant les dénominateurs, on a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_n(x) = Q_n(x)$, ainsi, les fonctions polynomiales de P_n et Q_n coïncident sur une infinité de réels, donc $P_n = Q_n$. On a donc montré l'unicité de P_n.
17. Déterminer P_2, P_3 et P_4.
18. Soit $n \in \mathbb{N}$, posons $\mathscr{P}(n)$: «$d^\circ P_n = n$ et le coefficient dominant de P_n est $(-1)^n(n+1)!$». Comme $P_0 = 1$, $d^\circ P_0 = 0$ et son coefficient dominant vaut $1 = (-1)^0(0+1)!$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Alors, (en isolant le terme de plus haut degré), $P_n = (-1)^n(n+1)!X^n + R$ avec $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Dès lors, $P_n' = (-1)^n(n+1)!nX^{n-1} + R'$ Donc en regroupant les termes de plus haut degré

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= (1+X+X^2)((-1)^n(n+1)!nX^{n-1} + R') - (n+1)(2X+1)((-1)^n(n+1)!X^n + R) \\ &= X^{n+1}((-1)^n(n+1)n! - 2(n+1)(-1)^n(n+1)!) + S \end{aligned}$$

où $S \in \mathbb{R}_n[X]$. De plus,

$$\begin{aligned} (-1)^n(n+1)n! - 2(n+1)(-1)^n(n+1)! &= (-1)^n(n+1)!(n-2(n+1)) = (-1)^n(n+1)!(-n-2) \\ &= (-1)^{n+1}(n+2)! \neq 0 \end{aligned}$$

Ceci prouve que P_{n+1} est de degré $n+1$ et que son coefficient dominant est $(-1)^{n+1}(n+2)!$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
19. Soit $(f,g) \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})^2$, alors $fg \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$ et $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$
20. Soit un entier $n \geqslant 2$, posons $g\colon x \mapsto 1+x+x^2$, alors $(f,g) \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{R})^2$. Remarquons que pour tout entier $k \geqslant 3$, $g^{(k)}\colon x \mapsto 0$. D'après la formule de Leibniz, $fg\colon x \mapsto 1 \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)} f^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} g^{(k)} f^{(n-k)} = g^{(0)} f^{(n)} + n g^{(1)} f^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2} g^{(2)} f^{(n-2)}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$(1+x+x^2)\frac{P_n(x)}{(1+x+x^2)^{n+1}} + n(1+2x)\frac{P_{n-1}(x)}{(1+x+x^2)^n} + \frac{n(n-1)}{2} 2 \frac{P_{n-2}(x)}{(1+x+x^2)^{n-1}} = 0$$

En multipliant par $(1+x+x^2)^n$ on obtient

$$P_n(x) + n(1+2x)P_{n-1}(x) + n(n-1)(1+x+x^2)P_{n-2}(x) = 0$$

Ainsi, le polynôme $P_n + n(2X+1)P_{n-1} + n(n-1)(1+X+X^2)P_{n-2}$ admet une infinité de racines (tous les réels) c'est donc le polynôme nul. Par conséquent, $P_n + n(2X+1)P_{n-1} + n(n-1)(1+X+X^2)P_{n-2} = 0$
21. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la question précédente à $n+1 \geqslant 2$, on obtient

$$P_{n+1} = -(n+1)(2X+1)P_n - (n+1)n(1+X+X^2)P_{n-1}$$

Mais d'après la question 15, on a également $P_{n+1} = (1+X+X^2)P_n' - (n+1)(2X+1)P_n$. On en déduit que

$$-(n+1)(2X+1)P_n + (n+1)n(1+X+X^2)P_{n-1} = (1+X+X^2)P_n' - (n+1)(2X+1)P_n$$

Donc $(1+X+X^2)P_n' = -(n+1)n(1+X+X^2)P_{n-1}$ Donc $(1+X+X^2)\left(P_n' + n(n+1)P_{n-1}\right) = 0$, or $1+X+X^2 \neq 0$, par intégrité de $\mathbb{R}[X]$, on en déduit que $P_n' + n(n+1)P_{n-1} = 0$, donc $P_n' = -n(n+1)P_{n-1}$
22. D'après la question 20

$$P_n(x) + n(2x+1)P_{n-1}(x) + n(n-1)(1+x+x^2)P_{n-2}(x) = 0$$

Or, $P_n(x) = P_{n-1}(x) = 0$, donc $n(n-1)(1+x+x^2)P_{n-2}(x) = 0$, or $n(n-1) \neq 0$ et $1+x+x^2 \neq 0$, donc $P_{n-2}(x) = 0$. Ainsi, x est aussi racine de P_{n-2}.

23. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: «P_n et P_{n+1} n'ont pas de racine commune». Comme $P_0 = 1$ n'a pas de racine, P_0 et P_1 n'ont pas de racine commune. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Supposons que P_{n+2} et P_{n+1} aient une racine commune x, alors d'après la question 22, x est une racine commune P_n et P_{n+1} ce qui est absurde. Dès lors, P_{n+2} et P_{n+1} n'ont pas de racines communes. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n et P_{n+1} n'ont pas de racines communes.
24. Soit x une racine réelle de P_n. Supposons que x soit une racine de multiplicité au moins deux. Alors $P_n(x) = P_n'(x) = 0$, donc d'après la question 21, $-(n+1)nP_{n-1}(x) = 0$ donc $P_{n-1}(x) = 0$. Ceci prouve que x est une racine commune à P_{n-1} et P_n. Ceci est absurde d'après la question précédente. Ainsi, x est une racine simple de P_n. Les racines réelles de P_n sont toutes simples.