Correction de l'exercice 1. a) Notons $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ et $F = \{f \in E,\ f \text{ continue en } 0\}$.

- $F \subset E$
- La fonction nulle : $0_E\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 0 \end{cases}$ est bien continue en 0. Donc $0_E \in F$
- Soit $(f,g) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f + \lambda g$ est continue en 0, donc $f + \lambda g \in F$

Conclusion : F est un sous-espace vectoriel de E.

b) Notons $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ et $F = \{f \in E, f \text{ monotone sur } \mathbb{R}\}$. On va montrer que F n'est pas un sous-espace vectoriel de E. Prenons $f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 \end{cases}$ et $g\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto -3x \end{cases}$, alors f et g sont monotones donc $f \in F$ et $g \in F$, pourtant $h = f + g\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 - 3x \end{cases}$ n'est pas monotone, car $h(0) > h(1) < h(2)$. Donc $f + g \notin F$, prouvant que F n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

c) Notons $E = \mathscr{F}([\,1\,;2\,],\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{[\,1\,;2\,]}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles définies sur $[\,1\,;2\,]$ et $F = \{f \in E,\ f(1) = 1\}$. Alors la fonction nulle $0_E\colon \begin{cases} [\,1\,;2\,] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 0 \end{cases}$ n'est pas dans F, car $0_E(1) = 0 \neq 1$. Donc F n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

d) Notons $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles. Et $F = \{(u_n) \in E,\ (u_n) \text{ converge}\}$.

- $F \subset E$
- La suite nulle $0_E = (0)_{n\in\mathbb{N}}$ converge bien (vers 0), donc $0_E \in F$.
- Soit $(u_n)_n \in F$ et $(v_n)_n \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors d'après le cours $(u_n + \lambda v_n)_n$ est une suite convergente. Donc $(u_n + \lambda v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$.

Donc F est un sous-espace vectoriel de E.

e) Notons $E = \mathbb{R}^{N}$ l'espace vectoriel des suites réelles et $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ (u_n) \text{ bornée}\}$.

- $F \subset E$
- La suite nulle $0_E = (0)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien bornée. Donc $0_E \in F$.
- Soit $(u_n)_n \in F$ et $(v_n)_n \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $(w_n)_n = (u_n)_n + \lambda(v_n)_n$. Il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$. De même, il existe $M' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leqslant M'$. Alors, d'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |w_n| = |u_n + \lambda v_n| \leqslant |u_n| + |\lambda v_n| \leqslant |u_n| + |\lambda| \times |v_n| \leqslant M + |\lambda| M'$$

Ce qui prouve que la suite $(w_n)_n \in F$.

f) Notons $F = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6 = 0\}$, posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$, $(u_n)_n$ est la suite nulle, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6 = 6 \neq 0$, donc la suite nulle n'est pas dans F, donc F n'est pas un SEV de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

g) Notons

$$F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\quad (u_n)_n \text{ est arithmétique}\} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad \exists r \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n + r\}$$

Alors, $F \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$, $(u_n)_n$ est la suite nulle, posons $r = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0 = u_n + r$. Donc la suite nulle est dans F. Soient (u_n) et $(v_n) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Notons r la raison de $(u_n)_n$ et r' la raison de $(v_n)_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda u_{n+1} + v_{n+1} = \lambda(u_n + r) + v_n + r' = (\lambda u_n + v_n) + (\lambda r + r')$. Ainsi, la suite $(\lambda u_n + v_n)_n$ est une suite arithmétique de raison $\lambda r + r'$. Dès lors, $(\lambda u_n + v_n)_n \in F$.

h) Notons $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles. Notons $F = \{(u_n)_n,\ u_n \text{ soit géométrique}\}$. $F \subset E$. Prenons $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1^n$ et $v_n = 2^n$, alors $(u_n)_n \in F$ et $(v_n)_n \in F$. Notons $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 1 + 2^n$. Remarquons que $w_0 = 2$ et $w_1 = 3$ ne sont pas nuls, on peut donc calculer $\dfrac{w_1}{w_0} = \dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{w_2}{w_1} = \dfrac{5}{3}$, donc $\dfrac{w_1}{w_0} \neq \dfrac{w_2}{w_1}$, ainsi la suite $(w_n)_n$ n'est pas géométrique. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin F$. F n'est donc pas un sous-espace vectoriel de E.

i)

j) Posons $E = \mathscr{F}([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles définies sur $[\,a\,;b\,]$. Et $F = \{f \in \mathscr{C}([\,a\,;b\,],\mathbb{R}),\ \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$:

- $F \subset E$.
- La fonction nulle 0_E: $\begin{cases}[\,a\,;b\,] \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \quad\longmapsto 0\end{cases}$ est continue sur $[\,a\,;b\,]$ et $\int_a^b 0\,\mathrm{d}t = 0$. Donc $0_E \in F$.
- Soit $(f,g) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f + \lambda g$ est continue sur $[\,a\,;b\,]$ (opérations sur les fonctions continues), donc $f + \lambda g \in \mathscr{C}([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$. De plus

$$\int_a^b (f+\lambda g)(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t) + \lambda g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \lambda\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = 0 + \lambda 0 = 0$$

  Donc $f + \lambda g \in F$.

Donc F est un sous-espace vectoriel de E.

k)

l) Notons le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $F = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ M \text{ est inversible}\}$. La matrice nulle 0_n n'est pas inversible. Donc F n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

m) Notons le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $F = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ M = M^2\}$. Comme ${I_n}^2 = I_n$, on a que $I_n \in F$. Pourtant $(2I_n)^2 = 4I_n \neq 2I_n$, donc $2I_n \notin F$. F n'est donc pas un sous-espace vectoriel de E.

n) Notons $E = \mathbb{R}^2$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y = 0\}$.

- $F \subset E$.
- $0_E = (0,0)$, or $0 + 0 = 0$, donc $0_E \in F$.
- Soit $u \in F$ et $v \in F$, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ tel que $u = (x,y)$ avec $x + y = 0$. De même il existe $x' \in \mathbb{R}$ et $y' \in \mathbb{R}$ tel que $v = (x',y')$ avec $x' + y' = 0$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Notons $w = u + \lambda v = (x + \lambda x', y + \lambda y')$. Calculons $(x + \lambda x') + (y + \lambda y') = (x + y) + \lambda(x' + y') = 0 + \lambda 0$. Donc $w = u + \lambda v \in F$.

F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

o) Notons l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y = 1\}$. Remarquons que $0_E = (0,0) \notin F$, car $0 + 0 \neq 1$. Donc F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

p) Notons $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy = 0\}$, remarquons que $(1,0) \in F$ et $(0,1) \in F$, mais $(1,0) + (0,1) = (1,1)$ avec $1 \times 1 \neq 0$, donc $(1,0) + (0,1) \notin F$. Ainsi, F n'est pas un SEV de $\mathbb{R}^2$.

q) Notons l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy \geqslant 0\}$. Remarquons que $u = (10,1) \in F$ (car $10 \times 1 \geqslant 0$) que $v = (-1,-10) \in F$, car $(-1) \times (-10) \in F$, pourtant $u + v = (9,-9)$ et $9 \times -9 < 0$, donc $u + v \notin F$. F n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

r) Notons l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leqslant y\}$. Prenons le vecteur $u = (1,2)$, alors comme $1 \leqslant 2$, on a que $u \in F$. Considérons $v = (-1)u = (-1,-2)$, alors comme $-1 > -2$, $v \notin F$, donc F n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

s)

Correction de l'exercice 2.

Correction de l'exercice 3. Tout d'abord si $F \subset G$, alors $F \cup G = G$ est bien un sous-espace vectoriel de E. De même si $G \subset F$, donc l'implication réciproque est vérifiée.

Pour l'implication directe, supposons que $F \cup G$ soit un espace vectoriel et procédons par l'absurde. Supposons donc que F ne soit pas inclus dans G et que G ne soit pas inclus dans F [1]. Cela veut dire qu'il existe $f \in F$ avec $f \notin G$. De même, cela veut dire qu'il existe $g \in G$ avec $g \notin F$. Dans tous les cas, $f \in F \cup G$ et $g \in F \cup G$. Donc $f + g \in F \cup G$ car $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E. Donc $f + g \in F$ ou $f + g \in G$.

- Dans le premier cas $f + g = f' \in F$ et donc $g = f' - f \in F$ (car F est un sous-espace vectoriel de E), donc $g \in F$ ce qui est absurde.

1. De l'intérêt de savoir nier les ou.

- Dans le second cas, $f + g = g' \in G$ et donc $f = g' - g \in G$ (car G est un sous-espace vectoriel de E), donc $f \in G$ ce qui est absurde.

On obtient donc une contradiction dans tous les cas. Donc notre hypothèse était fausse. Ainsi $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Correction de l'exercice 4. Soit $P \in E$, on a :

$$\begin{aligned} P \in H &\iff P(1) = 0 \\ &\iff (X-1)|P \\ &\iff \exists Q \in \mathbb{R}_2[X] \qquad P = (X-1)Q \\ &\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \qquad P = (X-1)(aX^2 + bX + c) \\ &\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \qquad P = aX^2(X-1) + bX(X-1) + c(X-1) \\ &\iff P \in \operatorname{vect}(X^2(X-1), X(X-1), X) \end{aligned}$$

On a donc montré que $H = \operatorname{vect}(X^2(X-1), X(X-1), X)$. Ainsi H est un espace vectoriel, et $(X^2(X-1), X(X-1), X)$ en est une partie génératrice.

Correction de l'exercice 5.

Correction de l'exercice 6.

Correction de l'exercice 7. On montre facilement que F est un SEV de $\mathbb{R}_2[X]$ [2]. Soit $P \in F \cap G$, alors $P \in F$ et $P \in G$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P = \lambda(X+3)$. Ainsi

$$0 = P(1) + P(2) = \lambda(2+3) + \lambda(1+3) = 9\lambda$$

Et comme $9 \neq 0$, on en déduit que $\lambda = 0$. Donc $P = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$. Prouvant que $F \cap G \subset \{0_{\mathbb{R}_3[X]}\}$. Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2[X]$, l'inclusion réciproque est automatiquement vérifiée. Donc $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}_3[X]}\}$. Ceci prouve que $F \oplus G$.

Correction de l'exercice 8.

Correction de l'exercice 9.

1. - Soit $e_1 = (1,0,0)$. Procédons par analyse synthèse :
     Analyse : si $f \in F$ et $g \in G$ tel que $e_1 = f + g$. Si $f \in F$, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f = a(1,0,-1) + b(1,1,1)$, de même $g = c(0,1,1) + d(0,1,0)$. On a alors $e_1 = (a+b, b+c+d, -a+b+c)$. Par identification on doit avoir $a+b = 1$, $b+c+d = 0$ et $-a+b+c = 0$. Alors $b = 1-a$, $c = a-b = 2a-1$ et $d = -a$.
     Synthèse : $(1,0,0) = \underbrace{(1,0,-1)}_{\in F} + \underbrace{(0,1,1) - (0,1,0)}_{\in G} \in F + G$
   - $e_2 = (0,1,0) \in G \subset F + G$
   - $e_3 = (0,0,1) = (0,1,1) - (0,1,0) \in G \subset F + G$
2. Pour tout $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$ est une combinaison linéaire de e_1, e_2 et e_3 et ces trois vecteurs sont dans $F + G$. Comme $F + G$ est un SEV de $\mathbb{R}^3$, on a que $u \in F + G$. Donc $\mathbb{R}^3 \subset F + G$. De plus, $F + G \subset \mathbb{R}^3$. Donc $F + G = \mathbb{R}^3$.

   Posons $x = (1,1,1) - (1,0,-1) = (0,1,2) \in F$, alors $x = (0,1,1) + (0,1,0) \in G$. Donc $x \in F \cap G$ avec $x \neq 0_E$ Donc F et G ne sont pas en somme directe.

Correction de l'exercice 10.

Correction de l'exercice 11. Corrigé sur Youtube : https://youtu.be/NAaCvM-DUHE

Correction de l'exercice 12.

Correction de l'exercice 13. Soit $g \in E \backslash F$ (par exemple $g\colon t \mapsto 1$). Posons $G = \operatorname{vect}(g)$. Montrons que G est un supplémentaire de F :

2. G l'est automatiquement car c'est l'espace vectoriel engendré par un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$.

- Soit $f \in F \cap G$. Alors $f \in F$ et $f \in G$, ainsi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda g$. Alors
$$0 = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \lambda g(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$$
Or $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$. Donc $\lambda = 0$, alors $f = 0g = 0_E$. Ainsi on a montré que $F \cap G \subset \{0_E\}$. Comme F et G sont des espaces vectoriels, on a $F \cap G = \{0_E\}$.

- Soit $e \in E$, montrons que $e \in F + G$. Posons[3] $\lambda = \dfrac{\int_0^1 e}{\int_0^1 g} \in \mathbb{R}$, $\tilde{g} = \lambda g$ et $f = e - \tilde{g} \in E$
  — $\tilde{g} \in G$
  — $f = e + \tilde{g}$.
  — Est-ce que $f \in F$? Pour le savoir calculons $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$?
$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (e - \tilde{g})(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 e(t)\,\mathrm{d}t - \lambda \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 e(t) - \frac{\int_0^1 e(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t} \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = 0$$
  Donc $f \in F$

  On a donc montré que $e = f + \tilde{g}$ avec $f \in F$ et $\tilde{g} \in G$. Donc $E \subset F + G$. De plus, $F + G \subset E$. Donc $E = F + G$.

Ainsi G est un supplémentaire de F.

Correction de l'exercice 14.

Correction de l'exercice 15.

Correction de l'exercice 16.

Correction de l'exercice 17.

Correction de l'exercice 18.
- Soient $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$, posons $f_i \colon x \mapsto |x - \alpha_i|$. Supposons la liée. D'après le cours, on sait donc qu'il existe $j \in [\![1\,;n]\!]$ tel que f_j s'écrit comme une combinaison linéaire des autres :
$$\exists (\lambda_i)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq j}} \in \mathbb{K}^{n-1} \qquad f_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \lambda_i f_i$$
Alors f_j est dérivable en α_j, (car $x \mapsto |x - \alpha_i|$ est dérivable en α_j si $j \neq i$ puis par combinaison linéaire de fonctions dérivables en α_j). Ce qui est absurde. La famille $(f_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ est donc libre.
- Posons $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Soient $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$, posons $f_i \colon x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha_i x} \in E$. Soit $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0_E$. On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{e}^{\alpha_i x} = 0_E$. Montrons que tous les λ_i sont nuls.
Proposons pour cela trois méthodes plus ou moins courtes, plus ou moins rigoureuses.

Méthode 1 Divisons par la plus grande exponentielle, on a
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lambda_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \mathrm{e}^{(\alpha_i - \alpha_n)x} = 0$$
Comme $\alpha_i - \alpha_n < 0$ pour $i \in [\![1\,;n-1]\!]$, par passage à la limite quand $x \to +\infty$, on en déduit que $\lambda_n = 0$, puis on recommence avec λ_{n-1} etc.[4]

3. Ce λ et ce $\tilde{g}$ ont été trouvé lors d'une phase d'analyse.
4. Court mais pas très rigoureux.

Méthode 2 Posons pour $k \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$, $(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ est libre.

— Initialisation : pour $n = 1$, si on a $\lambda_1 f_1 = 0$, alors comme f_1 n'est pas la fonction nulle, on a $\lambda_1 = 0$: $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

— Hérédité : soit $k \in [\![1\,;n-1]\!]$, supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie et montrons $\mathscr{P}(k+1)$ vraie. Soit $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant k+1} \in \mathbb{R}^{k+1}$ tel que

$$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i f_i = 0_E \tag{1}$$

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{i=1}^{k+1} \lambda_i \mathrm{e}^{\alpha_i x} = 0$. Montrons que tous les λ_i sont nuls. Divisons par la plus grande exponentielle, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lambda_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathrm{e}^{(\alpha_i - \alpha_{k+1})x} = 0$$

Comme $\alpha_i - \alpha_{k+1} < 0$ pour $i \in [\![1\,;k]\!]$, par passage à la limite quand $x \to +\infty$, on en déduit que $\lambda_{k+1} = 0$, en reportant cette information dans (1), on a donc $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0$, en appliquant l'hypothèse de récurrence, on a donc, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\lambda_i = 0$. De plus, $\lambda_{k+1} = 0$. Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

— Conclusion : pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie. Donc $\mathscr{P}(n)$ est vraie ainsi, la famille est libre [5].

Méthode 3 Soit $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0$. Supposons qu'il existe $i \in [\![1\,;n]\!]$ tel que $\lambda_i \neq 0$, notons $p = \max\{i \in [\![1\,;n]\!],\ \lambda_i \neq 0\}$, p est bien défini car on a pris le maximum d'un ensemble fini non vide d'entiers. Alors $\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i f_i = 0$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i \mathrm{e}^{\alpha_i x} = 0_E$. Divisons par la plus grande exponentielle, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \lambda_p + \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i \mathrm{e}^{(\alpha_i - \alpha_p)x} = 0$$

Comme $\alpha_i - \alpha_p < 0$ pour $i \in [\![1\,;p-1]\!]$, par passage à la limite quand $x \to +\infty$, on en déduit que $\lambda_p = 0$, ce qui est absurde. Donc pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\lambda_i = 0$, la famille $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre [6].

Correction de l'exercice 19. Corrigé sur Youtube : https://youtu.be/nokX87JcxlQ

Correction de l'exercice 20. Corrigé sur Youtube : https://youtu.be/lyCsBIAZMJ0 Notons $u = (1)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $w = (3^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Supposons que $au + bv + cw = 0$ (suite nulle), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a1 + b2^n + w3^n = 0$. Ainsi, pour $n \in \{0, 1, 2\}$, on obtient

$$\begin{cases} a + b + c & = & 0 \\ a + 2b + 3c & = & 0 \\ a + 4b + 9c & = & 0 \end{cases}$$

Ce système [7] de trois équations à trois inconnus se résout en faisant des opérations sur les équations et après résolution, on obtient $a = b = c = 0$.

Ainsi, (u, v, w) est une famille libre.

5. Plus rigoureux, mais beaucoup trop trop long.

6. Plus courte que la méthode 2, mais plus rigoureuse que la méthode 1. De plus, c'est la même méthode qu'on avait utilisé pour montré qu'une famille de polynômes échelonnées en degré était libre.

7. Les élèves de seconde année remarqueront directement que la matrice associée à ce système est $A = \begin{pmatrix} 1^0 & 2^0 & 3^0 \\ 1^1 & 2^1 & 3^1 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 \end{pmatrix}$, une matrice de Vandermonde, donc $\det(A) = (3-2)(3-1)(2-1) \neq 0$. Donc A est inversible, et $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ et donc $a = b = c = 0$.

Correction de l'exercice 21.

Correction de l'exercice 22. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Supposons que $af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 = 0_E$ (la fonction nulle). On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad a\cos(x) + b\sin(x) + cx\cos(x) + dx\sin(x) = 0$$

Si on prend $x = 0$, on obtient $af_1(0) + bf_2(0) + cf_3(0) + df_4(0) = 0$ soit $a + 0 + 0 + 0 = 0$. Donc $a = 0$. En prenant $x = \pi$, on obtient, $c \times (-\pi) = 0$. Donc $c = 0$. En considérant $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient, $b + d\frac{\pi}{2} = 0$, en prenant $x = 3\frac{\pi}{2}$, on obtient $-b - d\frac{3\pi}{2} = 0$. En résolvant ce système de deux équations à deux inconnues, il vient $c = b = 0$. Ainsi $a = b = c = d = 0$. La famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est donc libre.

Correction de l'exercice 23. Corrigé sur Youtube : https://youtu.be/FTBwAY1ObMg

Correction de l'exercice 24.

Correction de l'exercice 25. Corrigé sur Youtube : https://youtu.be/M8Jpf6bvw-Y

Correction de l'exercice 26.

Correction de l'exercice 27.