Révision 5 (systèmes linéaires, matrices, espaces vectoriels)

1. La base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est : $\mathscr{B} =$
2. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Indiquer si les produits matriciels suivants sont possibles ou non et effectuer-les si c'est possible : $A \times A$, $A \times B$, $B \times A$, $B \times B$, $A^T \times B$, $A^T \times A$
3. Si $E_{i,j} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ $E_{k,\ell} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ (matrices élémentaires) alors $E_{i,j} \times E_{k,\ell} \in$ et $E_{i,j} \times E_{k,\ell} =$
4. Inverser (si c'est possible) la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$.
   On n'utilisera ni les systèmes linéaires ni les opérations sur les lignes/colonnes.
5. Inverser (si c'est possible) la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ par les deux méthodes : en résolvant le système linéaire puis en effectuant les opérations sur les lignes.
   Assurez-vous d'avoir les mêmes résultats.
6. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Démontrer que $A^2 \in \text{vect}(A, I_3)$, puis en déduire (sans calcul) que A est inversible et déterminer son inverse.
7. Soit $T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ calculer T^n en explicitant les quatre coefficients de T^n sans somme.
8. Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ x & z & z & t \\ t & x & y & t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,4}(\mathbb{R}) \mid \left\{ \begin{array}{lcl} x + y + 2z + t & = & 0 \\ 3x + 5y - t & = & 0 \\ 2x + 3y + z - t & = & 0 \end{array} \right. \right\}$. À l'aide d'une famille génératrice, démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ et trouver une base de F.
9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathscr{T}_n$ le SEV de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ constituée des matrices triangulaires supérieures et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ le SEV de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ constituée des matrices antisymétriques, démontrer que $\mathscr{T}_n$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires.