Révision 5 (systèmes linéaires, matrices, espaces vectoriels)

1. La base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est $\mathscr{B} = (E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$. où $E_{a,b} = (\delta_{i,a}\delta_{j,b})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ pour $a \in [\![1\,; n]\!]$ et $b \in [\![1\,; p]\!]$.
2. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.
   - $A \times A$ est impossible (le nombre de colonnes de A n'est pas égale au nombre de lignes de A).
   - $A \times B$ est possible (le nombre de colonnes de A est égale au nombre de lignes de B).
   - $B \times A$ est possible (le nombre de colonnes de B est égale au nombre de lignes de A).
   - $B \times B$ est impossible (le nombre de colonnes de B n'est pas égale au nombre de lignes de B).
   - $A^T \times B$ est impossible (le nombre de colonnes de A^T n'est pas égale au nombre de ligne de B)
   - $A^T \times A$ est possible (le nombre de colonnes de A^T est égale au nombre de ligne de A).

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^T A = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$$

3. Si $E_{i,j} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ $E_{k,\ell} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ (matrices élémentaires) alors $E_{i,j} \times E_{k,\ell} \in \mathscr{M}_{n,\ell}(\mathbb{K})$ et $E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell}$
4. $\det(A) = -1 \times 12 - (-3) \times (-4) = -24 \neq 0$. Ainsi, A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{-24}\begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{24} \end{pmatrix}$
5. - Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, alors :

$$Y = BX \iff \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ -x + 2y + 3z \\ y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + 2y + 3z & = a \\ -x + 2y + 3z & = b \\ y + z & = c \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} \begin{cases} x + 2y + 3z & = a \\ 4y + 6z & = a + b \\ y + z & = c \end{cases} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\iff} \begin{cases} x + 2y + 3z & = a \\ y + z & = c \\ 4y + 6z & = a + b \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2}{\iff} \begin{cases} x + 2y + 3z & = a \\ y + z & = c \\ 2z & = a + b - 4c \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L2}{\iff} \begin{cases} x \quad + z & = a - 2c \\ y + z & = c \\ 2z & = a + b - 4c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & = \dfrac{a}{2} - \dfrac{b}{2} \\ y & = -\dfrac{a}{2} - \dfrac{b}{2} + 3c \\ z & = \dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{2} - 2c \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} Y$$

Ainsi, B est inversible et $B^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

- $$\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&2&3\\0&1&1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$
$$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&6\\0&1&1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$
$$L_2 \leftrightarrow L_3$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&4&6\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$
$$\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2}$$
$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&1\\1&1&-4\end{pmatrix}$$
$$\substack{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_3}$$
$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&3\\1&1&-4\end{pmatrix}$$
$$L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3$$
$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&3\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-2\end{pmatrix}$$

  Ainsi, B est inversible et $B^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&3\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-2\end{pmatrix}$.

6. $A^2 = \begin{pmatrix}6&5&5\\5&6&5\\5&5&6\end{pmatrix} = 5A - 4I_3 \in \mathrm{vect}(A, I_3)$. Dès lors $A^2 - 5A = -4I_3$. ainsi, $A(A-5I_3) = -4I_3$ et donc $A \times \left(\frac{5}{4}I_3 - \frac{1}{4}A\right) = I_3$. De même $(A - 5I_3)A = -4I_3$ et donc $\left(\frac{5}{4}I_3 - \frac{1}{4}A\right) \times A = I_3$. Ceci prouve que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{5}{4}I_3 - \frac{1}{4}A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}$.

7. Remarquons que $T = 3I_2 + 2E_{1,2}$, de plus, $(E_{1,2})^2 = 0_2$, en outre, $(3I_2)\times(2E_{1,2}) = 6E_{1,2} = (2E_{1,2})\times(3I_2)$, on peut ainsi appliquer la formule du binôme de Newton :
$$\begin{aligned} T^n &= (3I_2 + 2E_{1,2})^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2E_{1,2})^k \times (3I_2)^{n-k} = \binom{n}{0}\times I_2 \times (3I_2)^n + \binom{n}{1}\times(2E_{1,2})\times(3I_2)^{n-1} + 0_2 \\ &= 3^n I_2 + 2n3^{n-1}E_{1,2} = \begin{pmatrix}3^n & 2n3^{n-1}\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

8. $F = \left\{ \begin{pmatrix}x&y&z&t\\x&z&z&t\\t&x&y&t\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,4}(\mathbb{R}) \mid \left\{\begin{array}{lcl} x+y+2z+t &=& 0\\ 3x+5y-t &=& 0\\ 2x+3y+z-t &=& 0\end{array}\right. \right\}$ Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, résolvons le système li-

néaire :

$$\begin{cases} x+y+2z+t &= 0\\ 3x+5y-t &= 0\\ 2x+3y+z-t &= 0\end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-3L_1\\ L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{\iff} \begin{cases} x+y+2z+t &= 0\\ 2y-6z-4t &= 0\\ y-3z-3t &= 0\end{cases}$$

$$\underset{L_2\leftarrow L_3}{\iff} \begin{cases} x+y+2z+t &= 0\\ y-3z-3t &= 0\\ 2y-6z-4t &= 0\end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_1\leftarrow L_1-L_2\\ L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{\iff} \begin{cases} x+5z+4t &= 0\\ y-3z-3t &= 0\\ 2t &= 0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x &= -5z\\ y &= 3z\\ t &= 0\end{cases}$$

Ainsi,

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} -5z & 3z & z & 0\\ -5z & z & z & 0\\ 0 & -5z & 3z & 0\end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\right\}$$

Posons alors $M = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 0\\ -5 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -5 & 3 & 0\end{pmatrix}$, on a ainsi montré que $F = \{zM \mid z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{vect}(M)$, ainsi F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ et (M) est une famille génératrice de F. De plus, (M) est une famille d'un seul vecteur et ce vecteur est non nul, donc (M) est une famille libre. Dès lors, (M) est une base de F.

9. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrons, par analyse synthèse, qu'il existe un unique couple $(T, A) \in \mathscr{T}_n \times \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = T + A$.
   - **Analyse** : supposons qu'il existe $(T, A) \in \mathscr{T}_n \times \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = T + A$. Soit $(i, j) \in [\![1\,; n]\!]^2$, $M_{i,j} = T_{i,j} + A_{i,j}$. Distinguons les cas :
     — Si $i = j$, alors[1] $A_{i,i} = 0$, ainsi, $T_{i,i} = M_{i,i}$.
     — Si $i > j$, alors $T_{i,j} = 0$ donc $A_{i,j} = M_{i,j}$.
     — Si $i < j$, alors $A_{i,j} = -A_{j,i} = -M_{j,i}$. De plus, $M_{i,j} = T_{i,j} - M_{j,i}$ donc $T_{i,j} = M_{i,j} + M_{j,i}$.
     On a ainsi, montré que s'il existait $(T, A) \in \mathscr{T}_n \times \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = T + A$, alors leurs coefficients étaient complètement déterminés par ceux de M d'une unique façon.
   - **Synthèse** : pour $(i, j) \in [\![1\,; n]\!]^2$, posons
     — $T_{i,i} = M_{i,i}$, $A_{i,i} = 0$,
     — Si $i > j$, $T_{i,j} = 0$ et $A_{i,j} = M_{i,j}$
     — Si $i < j$, $T_{i,j} = M_{i,j} + M_{j,i}$ et $A_{i,j} = -A_{j,i} = M_{j,j}$
     Alors, $T = (T_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathscr{T}_n$, $A = (A_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $(i, j) \in [\![1\,; n]\!]^2$ on a :
     — Si $i = j$, $T_{i,i} + A_{i,i} = M_{i,i} + 0 = M_{i,i}$.
     — Si $i > j$, $T_{i,j} + A_{i,j} = 0 + M_{i,j} = M_{i,j}$.
     — Si $i < j$, $T_{i,j} + A_{i,j} = M_{i,j} + M_{j,i} - M_{j,i} = M_{i,j}$.
     Ainsi, $M = T + A$, avec $T \in \mathscr{T}_n$ et $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

   Ainsi, la synthèse a montré l'existence de $T \in \mathscr{T}_n$ et de $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = T + A$, l'analyse a montré l'unicité d'une telle décomposition. Ainsi, $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{T}_n \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

1. En effet, $A_{i,i} = -A_{i,i}$ donc $2A_{i,i} = 0$ et donc $A_{i,i} = 0$.