Chapitre 13

Espaces vectoriels de dimension finie

Objectifs :

- Donner une définition consistante de la dimension d'un espace vectoriel.
- Établir des théorèmes simplifiant le travail pour montrer qu'une famille est une base ou pour montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires etc.

Prérequis :

- Ensembles et applications
- Systèmes linéaires
- Matrices
- Polynômes
- Espaces vectoriels

Table des matières

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Pour $\mathscr{F} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs de E, on note $|\mathscr{F}|$ son cardinal : $|\mathscr{F}| = n$.

1 Construction de la théorie de la dimension finie

Remarque 1. La dimension n'est pas égale au nombre d'éléments de E, car E est un ensemble infini (sauf si $E = \{0_E\}$).

Définition d'un espace vectoriel de dimension finie

On dit que E est un espace vectoriel de **dimension finie** si E possède une partie génératrice (finie).
Sinon, on dit que E est un espace vectoriel de **dimension infinie**.

Exemple d'espaces vectoriels de dimension finie ou non

$\mathbb{K}^n$, $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{C}$-EV ou un $\mathbb{R}$-EV, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont de dimension finie, contrairement à $\mathbb{K}[X]$.

Dans toute la suite, on considéra E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie tel que $E \neq \{0_E\}$.

Lemme 1. Soient $\mathscr{L}$ une famille libre de E et $x \in E$. Alors, $\mathscr{L} \cup (x)$ est libre si et seulement si $x \notin \operatorname{vect}(\mathscr{L})$.

Lemme 2. Soient $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E et $\mathscr{G}'$ est une famille finie telle que $\mathscr{G} \subset \operatorname{vect}(\mathscr{G}')$, alors $\mathscr{G}'$ est aussi génératrice de E.

Théorème n° 1 de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{K}$-EV de dimension finie. Soit $\mathscr{L}$ une famille libre de E, il existe $\mathscr{B}$ base de E telle que $\mathscr{L} \subset \mathscr{B}$.

Théorème n° 2 de la base extraite

Soit E un $\mathbb{K}$-EV de dimension finie. Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E, il existe $\mathscr{B}$ base de E telle que $\mathscr{B} \subset \mathscr{G}$.

Démonstration du théorème n° 2 : On va démontrer le théorème de la base extraite et celui de la base incomplète en même temps. Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E. Notons :

$$C = \{|\mathscr{F}| \text{ tel que } \mathscr{L} \subset \mathscr{F} \subset \mathscr{L} \cup \mathscr{G} \text{ et } \mathscr{F} \text{ libre}\}$$

Comme $|\mathscr{L}| \in C$, $C \neq \varnothing$, C est majorée par $|\mathscr{L} \cup \mathscr{G}|$. Elle admet donc un plus grand élément $p \in \mathbb{N}$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une famille libre de E de cardinal p telle que $\mathscr{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{L} \cup \mathscr{G}$. Montrons que $\mathscr{B}$ est une base. Elle est libre. Montrons qu'elle est génératrice : Soit $g \in \mathscr{G}$, supposons que $g \notin \operatorname{vect}(\mathscr{B})$. La famille $\mathscr{B}' = (e_1, \ldots, e_p, g)$ est alors libre d'après le lemme 1. De plus, on a $\mathscr{L} \subset \mathscr{B}' \subset \mathscr{L} \cup \mathscr{G}$. Ainsi $p + 1 \in C$, ce qui est absurde, donc $g \in \operatorname{vect}(\mathscr{B})$. Ainsi, $\mathscr{G} \subset \operatorname{vect}(\mathscr{B})$, par le lemme 2, $\mathscr{B}$ est génératrice de E. Donc c'est une base de E.

Comme $\mathscr{B}$ est une base de E et que $\mathscr{L} \subset \mathscr{B}$ cela démontre le théorème de la base incomplète.

Prenons maintenant $\mathscr{L} = \varnothing$ (famille libre), alors, il existe une base $\mathscr{B}$ de E tel que $\mathscr{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{L} \cup \mathscr{G} = \mathscr{G}$ et donc cela démontre le théorème de la base extraite. ∎

Corollaire : existence de bases en dimension finie

L'espace vectoriel E possède au moins une base (il n'y a pas unicité des bases).

Lemme 3. Si $\mathscr{G}$ est une famille génératrice de E et $\mathscr{L}$ une famille libre, alors $|\mathscr{L}| \leqslant |\mathscr{G}|$.

Démonstration du lemme 3 : Notons $n = |\mathscr{G}|$ et $p = |\mathscr{L}|$. Posons, pour $k \in [\![0 ; p]\!]$:

$$\mathscr{P}(k) : \text{ «}\exists \mathscr{L}_k \subset \mathscr{L} \quad \exists \mathscr{G}_k \subset \mathscr{G} \quad \text{telles que} \quad \mathscr{L}_k \cup \mathscr{G}_k \text{ soit génératrice} \quad \text{et} \quad |\mathscr{L}_k| = k \quad \text{et} \quad |\mathscr{G}_k| = n - k \text{ »}$$

- Initialisation : posons $\mathscr{L}_0 = \varnothing$ et $\mathscr{G}_0 = \mathscr{G}$, alors $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : soit $k \in [\![0 ; p-1]\!]$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie. Soient $\mathscr{L}_k = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ et $\mathscr{G}_k = (g_1, g_2, \dots, g_{n-k})$ vérifiant $\mathscr{P}(k)$. Le but est d'ajouter un élément à $\mathscr{L}_k$ et d'en retirer un $\mathscr{G}_k$. Comme $|\mathscr{L}_k| = k < p = |\mathscr{L}|$, il existe un élément $v_{k+1} \in \mathscr{L} \backslash \mathscr{L}_k$, alors $v_{k+1} \in E = \text{vect}(\mathscr{L}_k \cup \mathscr{G}_k)$:

$$\exists (\mu_i)_{1 \leqslant i \leqslant k} \in \mathbb{K}^k \quad \exists (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n-k} \in \mathbb{K}^{n-k} \qquad v_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i + \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i g_i$$

  Or, il existe un $\lambda_i \neq 0$ (par l'absurde : $\mathscr{L}$ est libre), prouvant que $n - k \geqslant 1$. Quitte à changer la numérotation, on suppose que $\lambda_{n-k} \neq 0$, alors

$$g_{n-k} = \frac{1}{\lambda_{n-k}} \left(v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i - \sum_{i=1}^{n-k-1} \lambda_i g_i \right) \in \text{vect}((v_1, v_2, \dots, v_{k+1}) \cup (g_1, g_2, \dots, g_{n-k-1}))$$

  Posons $\mathscr{L}_{k+1} = (v_1, v_2, \dots, v_{k+1})$ et $\mathscr{G}_{k+1} = (g_1, g_2, \dots, g_{n-k-1})$, alors $\mathscr{L}_k \cup \mathscr{G}_k \subset \text{vect}(\mathscr{L}_{k+1} \cup \mathscr{G}_{k+1})$, en appliquant le lemme 2, $\mathscr{L}_{k+1} \cup \mathscr{G}_{k+1}$ engendre E. Ainsi $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.
- Conclusion : par principe de récurrence, $\mathscr{P}(k)$ est vraie pour $k \in [\![0 ; p]\!]$.

Alors, on a $\mathscr{P}(p)$ vraie, et donc $|\mathscr{G}_p| = n - p \geqslant 0$. ■

Théorème n° 3 : toutes les bases ont le même cardinal

Si E est un $\mathbb{K}$-EV de dimension finie, toutes les bases de E ont le même cardinal.

Démonstration du théorème n° 3 : Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Alors $\mathscr{B}$ est libre et $\mathscr{B}'$ est une famille génératrice, donc d'après le lemme 3, $|\mathscr{B}| \leqslant |\mathscr{B}'|$. De plus, $\mathscr{B}'$ est libre et $\mathscr{B}$ est une famille génératrice, en utilisant encore une fois le lemme 3, il s'ensuit que $|\mathscr{B}'| \leqslant |\mathscr{B}|$. Par double inégalité, $|\mathscr{B}| = |\mathscr{B}'|$. ■

Définition de la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{B}$ une base quelconque de E. On définit la **dimension** de E, par $\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim(E) = |\mathscr{B}|$.

Remarque 2. La dimension d'un espace vectoriel E s'interprète comme le nombre de degrés de liberté de E.
Si $E = \{0_E\}$, on pose $\dim(E) = 0$, si E n'est pas de dimension finie, on dit que la dimension de E est infinie.

Exemples de dimensions importantes à connaître

$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) =$ $\quad \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) =$ $\quad \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) =$ $\quad \dim_{\mathbb{K}}(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})) =$ $\quad \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X]) =$
La dimension de l'ensemble des solutions d'une EQDL homogène d'ordre 1 est
La dimension de l'espace des solutions d'une EQDL homogène d'ordre 2 à coefficients constants est
La dimension de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants est

Attention à la dimension de deux espaces vectoriels

La dimension de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est n^2 (et non n), de même attention à la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exemple 1. Soit $F = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \left\{ \begin{array}{lcl} x + 2y + z & = & 0 \\ 2x - t & = & 0 \end{array} \right. \right\}$. Déterminer une base de F et en déduire $\dim(F)$.

Proposition n° 1 : caractérisation des bases avec le cardinal et comparaison entre les cardinaux

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, soit $\mathscr{F}$ une famille de E à n éléments. Alors,

$\mathscr{F}$ est une base de E ssi $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E ssi $\mathscr{F}$ est une famille libre.

De plus, pour toutes familles $\mathscr{L}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{G}$ respectivement libre, base, et génératrice : $\quad |\mathscr{L}| \leqslant |\mathscr{B}| \leqslant |\mathscr{G}|$

Démonstration de la proposition n° 1 :

- Si $\mathscr{F}$ est une base alors elle est libre et génératrice.
- Si $\mathscr{F}$ est une famille génératrice, d'après le théorème de la base extraite, il existe $\mathscr{B}$ base de E incluse dans $\mathscr{F}$. Donc $\mathscr{B} \subset \mathscr{F}$ et $|\mathscr{B}| = |\mathscr{F}|$ donc $\mathscr{F} = \mathscr{B}$ est une base de E.
- Si $\mathscr{F}$ est une famille libre, alors d'après le théorème de la base incomplète, il existe une base $\mathscr{B}$ telle que $\mathscr{F} \subset \mathscr{B}$ et $|\mathscr{F}| = n = |\mathscr{B}|$. Donc $\mathscr{F} = \mathscr{B}$ est une base de E. ■

De plus, soient $\mathscr{L}$ une famille libre, $\mathscr{B}$ une base et $\mathscr{G}$ une famille génératrice. Alors $\mathscr{B}$ est une famille génératrice, donc $|\mathscr{L}| \leqslant |\mathscr{B}|$ d'après le lemme 3. De plus, $\mathscr{B}$ est une famille libre, donc $|\mathscr{B}| \leqslant |\mathscr{G}|$ d'après le lemme 3. Ainsi, $|\mathscr{L}| \leqslant |\mathscr{B}| \leqslant |\mathscr{G}|$.

Exemple 2. Soit $((1,1,1),(2,1,3),(3,2,4),(-1,0,3))$ extraire de cette famille une base de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 3. Soit $\left(I_2, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, compléter cette famille libre en une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exemple 4. Montrer que $\mathscr{B} = ((1,1,0),(2,1,0),(5,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 5. Si E est de dimension n, alors toute famille de $n+1$ vecteurs (ou plus) est liée.

Proposition n° 2 : bases de $\mathbb{K}_n[X]$

Si $\mathscr{B} = (P_0, P_1, \ldots, P_n) \in \mathbb{K}[X]^{n+1}$ telle que pour tout $i \in [\![0\,; n]\!]$, $d^\circ P_i = i$, alors $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Démonstration de la proposition n° 2 : Soit $\mathscr{B}$ une telle famille, alors $\mathscr{B}$ ne contient pas le vecteur nul et les degrés sont deux à deux distincts ainsi $\mathscr{B}$ est libre. De plus, $|\mathscr{B}| = n+1 = \dim(\mathbb{K}_n[X])$. Par conséquent, $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. ■

Théorème n° 4 : formule de Taylor pour les polynômes

Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k X^k \in \mathbb{K}_n[X]$ et $a \in \mathbb{K}$, alors $P = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$

En particulier, pour $a = 0$, pour tout $k \in [\![0\,; n]\!]$, $c_k = P^{(k)}(0)/k!$.

Démonstration du théorème n° 4 : On remarque $\mathscr{B} = (1, (X-a), \ldots, (X-a)^n)$ est une famille de polynômes non nuls de degré deux à deux distincts, donc elle est libre, de plus $|\mathscr{B}| = n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$. Ainsi, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k (X-a)^k$. Il reste à calculer les λ_k. Pour cela, on se fixe $j \in [\![0\,; n]\!]$ et on dérive j fois l'expression précédente. Donc $P^{(j)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k ((X-a)^k)^{(j)}$ En séparant la somme suivant que $k < j$, $k = j$ et $k > j$, on obtient :

$$P^{(j)} = \sum_{k=0}^{j-1} \lambda_k ((X-a)^k)^{(j)} + \lambda_j ((X-a)^j)^{(j)} + \sum_{k=j+1}^{n} \lambda_k ((X-a)^k)^{(j)} = 0 + \lambda_j \times j! + \sum_{k=j+1}^{n} \lambda_k \frac{j!}{(k-j)!}(X-a)^{k-j}$$

En remplaçant X par a, on obtient $P^{(j)}(a) = \lambda_j \times j! + \sum\limits_{k=j+1}^{n} \lambda_k \dfrac{j!}{(k-j)!}(a-a)^{k-j} = j!\lambda_j$. On a donc $\lambda_j = \dfrac{P^{(j)}(a)}{j!}$. Ainsi,

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

Si $a = 0$, on obtient $P = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k X^k = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$. Par unicité des coefficients d'un polynôme, pour tout $k \in [\![0\,; n]\!]$, $c_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$.
■

2 Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie

2.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel et supplémentaires

Proposition n° 3 : dimension d'un sous-espace vectoriel

Soient E un EV de dimension finie et F un SEV de E, alors :

1. F est de dimension finie
2. $\dim(F) \leqslant \dim(E)$
3. $E = F \iff \dim(E) = \dim(F)$

Démonstration de la proposition n° 3 :

- Si $F = \{0_E\}$, il n'y a rien à faire. Sinon, on note $C = \{|\mathscr{F}|, \quad \mathscr{F} \text{ famille libre de } F\}$, C est non vide, et si $\mathscr{F}$ est une famille libre de F, alors $\mathscr{F}$ est une famille libre de E, donc $|\mathscr{F}| \leqslant \dim(E)$ prouvant que C est majorée. Soit $\mathscr{F}$ une famille libre de F tel que $|\mathscr{F}| = \max C$. Montrons que $\mathscr{F}$ est génératrice de F. Soit $f \in F$, supposons $f \notin \mathrm{vect}(\mathscr{F})$, alors en vertu du lemme 1, $\mathscr{F} \cup \{f\}$ est une famille libre. Contredisant le maximum de C, donc $f \in \mathrm{vect}(\mathscr{F})$. Donc $F \subset \mathrm{vect}(\mathscr{F})$. De plus, $\mathrm{vect}(\mathscr{F}) \subset F$. Donc $\mathrm{vect}(\mathscr{F}) = F$, ainsi $\mathscr{F}$ est une base de F.
- Comme F est de dimension finie, il existe $\mathscr{B} = (f_1, f_2, \ldots, f_p)$ une base de F, comme c'est une famille libre de F et donc de E. Ainsi $\dim(F) = |\mathscr{B}| \leqslant \dim(E)$ en vertu de la proposition 1.
- Si $E = F$, alors $\dim(E) = \dim(F)$. Réciproquement, supposons $\dim(E) = \dim(F)$. Soit $\mathscr{B} = (f_1, f_2, \ldots, f_p)$ une base de F, c'est une famille libre de F et donc de E. De plus, $|\mathscr{B}| = \dim(F) = \dim(E)$. Donc d'après la proposition 1, $\mathscr{B}$ est une base de E. Donc $E = \mathrm{vect}(\mathscr{B}) = F$. Donc $E = F$. ■

Exemples de sous-espaces particuliers

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soit F un sous-espace vectoriel de E :

- Si $\dim(F) = 1$, alors on appelle F une **droite** (vectorielle) de E.
- Si $\dim(F) = 2$, alors on appelle F un **plan** (vectoriel) de E.
- Si $\dim(F) = n - 1$, alors on appelle F un **hyperplan** de E.

Exemple 6. Si $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y - 2z = 0\}$, donner $\dim(F)$.

Exemple 7. Montrer que $\mathscr{C}^\infty([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$ est de dimension infinie, puis en déduire qu'il en est de même pour $\mathscr{C}^0([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$ et pour $\mathscr{F}([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$ pour $a < b$.

Proposition n° 4 : en dimension finie, les supplémentaires existent

Soit F un SEV de E (un $\mathbb{K}$-EV de dimension finie), alors il existe un supplémentaire de F dans E.

Démonstration de la proposition n° 4 : Comme F est un SEV de E et que E est un $\mathbb{K}$-EV de dimension finie, on sait que F est aussi de dimension finie. Ainsi, on considère $\mathscr{L} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de F. Ainsi, $\mathscr{L}$ est une famille libre de E, que l'on complète en une base de E notée $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p) \cup (e_{p+1}, \ldots, e_n)$. Posons $G = \mathrm{vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$. Montrons que G est un supplémentaire de F. Soit $x \in E$, alors, il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k}_{\in F} + \underbrace{\sum_{k=p+1}^{n} \lambda_k e_k}_{\in G} \in F + G$$

Ainsi, $E = F + G$. Soit $x \in F \cap G$. Comme $x \in F$ et $x \in G$ il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ et $(\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n-p}$ tels que

$$x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k = \sum_{k=p+1}^{n} \lambda_k e_k$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k + \sum_{k=p+1}^{n} (-\lambda_k e_k) = 0_E$$

Comme $\mathscr{B}$ est libre, on en conclut que pour tout $k \in [\![\,1\,;p\,]\!]$, $\lambda_k = 0$ et pour tout $k \in [\![\,p+1\,;n\,]\!]$, $-\lambda_k = 0$. Ainsi, $x = 0_E$. Dès lors, la somme de F et de G est directe. En conclusion, on a montré que G est un supplémentaire de F. ■

Péril imminent : risque de confusion sur les supplémentaires

Existence d'un supplémentaire pas unicité, on dit donc «**un** supplémentaire» et non «**le** supplémentaire».
Ne pas confondre complémentaire et supplémentaire, si F est un SEV, alors $E \backslash F$ n'est jamais un SEV.

Proposition n° 5 : dimension de la somme directe

Soient F et G deux SEV de dimension finie de E en somme directe, alors $F \oplus G$ est de dimension finie et $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$

Démonstration de la proposition n° 5 : Soient $\mathscr{B} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ une base de F, $\mathscr{B}' = (g_1, g_2, \dots, g_p)$ une base de G. Alors, par propriété des bases adaptées, $\mathscr{B} \cup \mathscr{B}' = (f_1, f_2, \dots, f_n, g_1, g_2, \dots g_p)$ est une base de $F \oplus G$. Ainsi, $F \oplus G$ est bien un espace vectoriel de dimension finie et $\dim(F \oplus G) = |\mathscr{B}'| = n + p = \dim(E) + \dim(F)$. ■

Exemple 8. Si $F = \text{vect}((1, 2))$ et $G = \text{vect}((1, 3))$ que vaut $F + G$?

Théorème n° 5 : formule de Grassmann

Soient F et G deux SEVs de dimension finie de E, alors $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$

Démonstration du théorème n° 5 : Posons $H = F + G$. Remarquons que $F \cap G$ est SEV de F, ainsi $F \cap G$ admet un supplémentaire dans F noté K : $F = (F \cap G) \oplus K$. Montrons que $H = K \oplus G$:

- Montrons que K et G sont en somme directe. Soit $x \in K \cap G$. Alors $x \in K$ donc $x \in F$. De plus $x \in G$ donc $x \in F \cap G$. Or, $K \cap (F \cap G) = \{0_E\}$, ainsi $x = 0_E$. Donc $K \cap G \subset \{0_E\}$. D'où $K \cap G = \{0_E\}$. Ainsi, H et G sont en somme directe
- Montrons que $H \subset K + G$. Soit $x \in H$, il existe $f \in F$ et $g \in G$ tel que $x = f + g$, de plus $f \in F = (F \cap G) \oplus K$. Donc il existe $h \in F \cap G$ et $k \in K$ tel que $f = h + k$. Ainsi $x = h + k + g$. Or $k \in K$ et $h + g \in G$ (car $h \in G$ et $g \in G$). Donc $x = k + (h + g) \in K + G$. Par conséquent, $H \subset H + G$.
- Montrons $K + G \subset H$. Soit $x \in K + G$. Alors $x = k + g$ avec $k \in K$ et $g \in G$. Or $K \subset F$. Donc $k \in F$ et $g \in G$. Donc $x \in F + G = H$. Dès lors, $K + G \subset H$.

Donc K et G sont supplémentaires dans H. Donc d'après la proposition 5. On a

$$\dim(F + G) = \dim(H) = \dim(K) + \dim(G) \tag{1}$$

De plus K et $F \cap G$ sont supplémentaires dans F. En utilisant encore la proposition 5, on a

$$\dim(F) = \dim(K) + \dim(F \cap G) \tag{2}$$

En faisant la différence entre (1) et (2), on obtient le résultat. ■

Exemple 9. Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, si $F = \text{vect}(I_2 + E_{2,2}, E_{1,1})$ et $G = \text{vect}(I_2, E_{1,2})$ que vaut $\dim(F + G)$?

Péril imminent : la somme pas l'union

Ne pas écrire $\dim(F \bigcup G) = \dots$, car $F \cup G$ **n'est pas**, en général, un espace vectoriel.

Théorème n° 6 : caractérisation des supplémentaires avec la dimension

Soient F et G deux SEV de E, un EV de dimension finie, alors :

1. Si $F \oplus G$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ alors $E = F \oplus G$ (le plus souvent utilisé dans la pratique)
2. Si $E = F + G$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ alors $E = F \oplus G$

Démonstration du théorème n° 6 :

1. Supposons $F \oplus G$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ alors $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$, ainsi $F \oplus G$ est un SEV de E de même dimension, donc $F \oplus G = E$ et F et G sont supplémentaires dans E.
2. Supposons $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $E = F + G$, alors d'après la formule de Grassmann,

$$\dim(F \cap G) = \dim(F + G) - \dim(F) - \dim(G) = \dim(E) - \dim(E) = 0$$

Par conséquent, $F \cap G = \{0_E\}$. Dès lors, $F \oplus G$ et $E = F + G$ donc F et G sont supplémentaires. ■

Exemple 10. Proposer des supplémentaires de $F = \text{vect}((1, 1))$ dans $E = \mathbb{R}^2$. Idem pour $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \text{vect}((1, 0, 0))$.

2.2 Rang d'une famille de vecteurs

Définition du rang d'une famille finie de vecteurs

Soit $\mathscr{F}$ une famille finie de vecteurs de E, on appelle **rang** de $\mathscr{F}$: $\text{rg}(\mathscr{F}) = \dim(\text{vect}(\mathscr{F}))$

Attention à ne pas confondre dimension, rang et cardinaux

La dimension c'est pour les EV. Le rang et les cardinaux sont pour les familles finies de vecteurs.

Exemple 11. Soit $E = \mathbb{R}^3$, notons $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (2,1,1)$ et $e_3 = (4,3,3)$. Former des phrases justes utilisant les mots dimension, rang et cardinaux et (e_1, e_2, e_3).

Proposition n° 6 : propriétés du rang

Soient E un EV de dimension finie n et $\mathscr{F} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une famille de vecteurs de E. Alors :

1. $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) \leqslant \min(p, n)$.
2. $\mathscr{F}$ engendre E SSI $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = n$.
3. $\mathscr{F}$ est libre SSI $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = p$.
4. Soit $i \in [\![1\,; p]\!]$, si $e_i \in \mathrm{vect}(\mathscr{F} \backslash (e_i))$ alors $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{rg}(\mathscr{F} \backslash (e_i))$.
5. $\mathrm{rg}(\mathscr{F})$ est le nombre maximum de vecteurs de $\mathscr{F}$ linéairement indépendants.

Démonstration de la proposition n° 6 : Posons $F = \mathrm{vect}(\mathscr{F}) = \mathrm{vect}\,(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ de sorte que $\dim(F) = \mathrm{rg}(\mathscr{F})$.

1. Comme $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de F, on a $\dim(F) \leqslant |\mathscr{F}|$, soit $\mathrm{rg}\,(e_1, e_2, \ldots, e_p) \leqslant p$. Comme $F = \mathrm{vect}(\mathscr{F})$ est un SEV de E, on a $\dim(F) \leqslant \dim(E)$ soit $\mathrm{rg}\,(\leqslant_1, \leqslant_2, \ldots, \leqslant_p)\, n$. Ainsi, $\mathrm{rg}\,(\leqslant_1, \leqslant_2, \ldots, \leqslant_p) \min(p, n)$.
2. Si $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E, alors $\mathrm{vect}(\mathscr{F}) = E$ donc $\dim(\mathrm{vect}(\mathscr{F})) = \dim(E) = n$ donc $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = n$. Si $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = n$, alors $\dim(F) = n = \dim(E)$ avec F SEV de E donc $F = E$, ainsi, $\mathrm{vect}(\mathscr{F}) = E$ donc $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E.
3. Si $\mathscr{F}$ est libre, alors $\mathscr{F}$ est une base de $F = \mathrm{vect}(\mathscr{F})$, dès lors $|\mathscr{F}| = \dim(F)$ soit $p = \mathrm{rg}(\mathscr{F})$. Si $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = p$, alors $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de $\mathrm{vect}(\mathscr{F})$ avec $|\mathscr{F}| = p = \mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \dim(\mathrm{vect}(\mathscr{F}))$ ainsi, $\mathscr{F}$ est une base de $\mathrm{vect}(\mathscr{F})$ par conséquent, $\mathscr{F}$ est libre.
4. Posons $\mathscr{F}' = \mathscr{F} \backslash (e_i) = (e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_n)$. Si $e_i \in \mathrm{vect}(\mathscr{F}')$, alors comme $\mathscr{F} \subset \mathrm{vect}(\mathscr{F}')$, en appliquant le lemme 2, la famille $\mathscr{F}'$ engendre F, ainsi, $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \dim(F) = \dim(\mathrm{vect}(\mathscr{F}')) = \mathrm{rg}(\mathscr{F}')$.
5. Soit $\mathscr{L}$ une famille libre incluse dans $\mathscr{F}$, alors $|\mathscr{L}| \leqslant \dim(\mathrm{vect}(\mathscr{F})) = \mathrm{rg}(\mathscr{F})$. Comme $\mathscr{F}$ est une famille génératrice, d'après le théorème de la base extraite, il existe $\mathscr{B} \subset \mathscr{F}$ une base de $\mathscr{F}$, alors $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \dim(\mathrm{vect}(\mathscr{F})) = |\mathscr{B}|$. ■

Exemple 12. Calculer le rang de $(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$, avec $P_1 = X^2$, $P_2 = X^2 + 1$, $P_3 = 5X^2 + 1$, $P_4 = P_1$, $P_5 = 2P_1$

3 Espace vectoriel produit

Définition du produit d'espaces vectoriels

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Considérons l'ensemble $G = E \times F$ muni des deux opérations :

$$+ : \begin{cases} G \times G & \longrightarrow G \\ ((e,f),(e',f')) & \longmapsto (e+e', f+f') \end{cases} \quad \text{et} \quad \cdot : \begin{cases} \mathbb{K} \times G & \longrightarrow G \\ (\lambda,(e,f)) & \longmapsto (\lambda e, \lambda f) \end{cases}$$

On vérifie que $G = E \times F$ est un espace vectoriel appelé **espace vectoriel produit** de E et F.

Exemple 13. Prenons $G = \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}[X]$. Soient $x = (M, P) \in G$ où $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, $y = (N, Q) \in G$, alors $x + y = (M + N, P + Q)$.

Proposition n° 7 : dimension du produit d'espaces vectoriels

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-EV de dimension finie, alors $E \times F$ est aussi un EV de dimension finie et

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$$

Démonstration de la proposition n° 7 :

- Si $E = \{0_E\}$ et $F = \{0_F\}$. Alors, $E \times F = \{(0_E, 0_F)\}$ est de dimension 0 donc $\dim(E \times F) = 0 = 0 + 0 = \dim(E) + \dim(F)$.
- Si $E = \{0_E\}$ et si $F \neq \{0_E\}$, alors en considérant $\mathscr{B}_F = (p_1, p_2, \dots, p_n)\, f$ une base de F, on montre que $((0_E, f_i))_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est une base de $E \times F$, ainsi, $\dim(E \times F) = p = 0 + p = \dim(E) + \times F$.
- Si $E \neq \{0_E\}$ et $F = \{0_E\}$, alors de même, le résultat annoncé est vraie.
- Plaçons nous donc dans le cas où $\dim(E) \geqslant 1$ et $\dim(F) \geqslant 1$. Comme E est de dimension finie, il existe $\mathscr{B}_E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E. De même, il existe $\mathscr{B}_F = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de F. Soit $x \in E \times F$, alors il existe $e \in E$ et $f \in F$ tel que $x = (e, f)$. De plus, il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $e = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. De même, il existe $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $f = \sum_{i=1}^{p} \mu_i f_i$. On a alors :

$$\begin{aligned} x &= (e, f) = (e, 0_F) + (0_E, f) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, 0_F\right) + \left(0_E, \sum_{i=1}^{p} \mu_i f_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (e_i, 0_F) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i (0_E, f_i) \\ x &\in \operatorname{vect}\left((e_i, 0_F)_{1 \leqslant i \leqslant n} \bigcup (0_E, f_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}\right) \end{aligned}$$

On a donc montré que $\mathscr{B} = ((e_i, 0_F)_{1 \leqslant i \leqslant n} \bigcup (0_E, f_i)_{1 \leqslant i \leqslant p})$ est une famille génératrice de $E \times F$. Montrons qu'elle est libre. Considérons $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p) \in \mathbb{K}^p$. Supposons :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (e_i, 0_F) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i (0_E, f_i) = 0_{E \times F}$$

Réécrivons cette somme, on a :

$$(0_E, 0_F) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (e_i, 0_F) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i (0_E, f_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, 0_F\right) + \left(0_E, \sum_{1=1}^{p} \mu_i f_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \sum_{1=1}^{p} \mu_i f_i\right)$$

Par identification de couples, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E \qquad \text{et} \qquad \sum_{1=1}^{p} \mu_i f_i = 0_F$$

Or, comme $\mathscr{B}_E$ est une base de E donc est libre : pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $\lambda_i = 0$. De même, pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $\mu_i = 0$. Ainsi, $\mathscr{B}$ est une famille libre de $E \times F$. Donc $\mathscr{B}$ est une base de $E \times F$. Par conséquent, $\dim(E \times F) = |\mathscr{B}| = n + p = \dim(E) + \dim(F)$.

■

4 Méthodes

Comment montrer qu'un espace vectoriel est de dimension finie ?

M1 On trouve une famille génératrice.

M2 On montre qu'il est inclus dans un autre espace vectoriel de dim finie.

Comment montrer que F et G sont supplémentaire en dimension finie ?

Souvent, on montre que $F \cap G = \{0_E\}$ et que $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

Comment montrer que F et G deux sous-espaces vectoriels sont égaux ?

Montrer $\dim(F) = \dim(G)$ et $F \subset G$.

Comment calculer la dimension d'un espace vectoriel ?

M1 Compter le nombre d'éléments dans une de ses bases.

M2 Formule de Grassmann (si ça parle de $F \cap G$ ou $F + G$)

Comment montrer que $\mathscr{B}$ est une base de E en dimension finie ?

Souvent en dimension finie, on montre que $\mathscr{B}$ est libre, puis on vérifie que $|\mathscr{B}| = \dim(E)$.

Comment construire une base de E ?

M1 Si on a une famille libre, rajouter petit-à-petit des vecteurs de façon à rester libre. Dès que la famille a $\dim(E)$ d'éléments, on a une base.

M2 Si on a une famille génératrice, retirer petit-à-petit des vecteurs de façon à rester génératrice. Dès que la famille a $\dim(E)$ d'éléments, on a une base.

Comment trouver une base de $F + G$?

Prendre une base de F une base de G, alors l'union des deux est génératrice, puis extraire de cette famille génératrice une base.

Comment calculer le rang d'une famille de vecteurs ?

Pour calculer $\text{rg}\,(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ retirer un vecteur de la famille s'il est combinaison linéaire des autres. Puis continuer tant qu'on trouve des vecteurs que l'on peut exprimer comme combinaison linéaire des autres. S'arrêter, dès qu'on obtient une famille libre, le rang est alors égal au nombre de vecteurs qui restent.