Correction de l'exercice 1. 1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.
   - Matrices triangulaires supérieures : Corrigé sur Youtube : https://youtu.be/-1xOOlEgYPI
   - $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ (cas particulier plus simple à comprendre avant) : Corrigé sur Youtube : https://youtu.be/CVt-ryAmokw
   - $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$: Corrigé sur Youtube : https://youtu.be/zWRQ1lyYLsk
   - Pour $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, il suffit de savoir que $\mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, $\dim(\mathscr{A}_n(\mathbb{R})) + \dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{R})) = n^2$. Donc $\dim(\mathscr{A}_n(\mathbb{R})) = n^2 - \dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{R})) = n^2 - \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$. On peut aussi démontrer que $(E_{i,j} - E_{j,i})_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$ est une base de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

Correction de l'exercice 2. 1. Posons $g_1 = (1,0,0)$, $g_2 = (0,1,0)$, $g_3 = (0,0,1)$ et $g_4 = (1/2, 3/2, 5/2)$. Alors, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) = xg_1 + yg_2 + zg_3 + 0g_4$. Ainsi, (g_1, g_2, g_3, g_4) est une famille génératrice[1] de $\mathbb{R}^3$. Cependant, comme $g_4 = \dfrac{1}{2}g_1 + \dfrac{3}{2}g_2 + \dfrac{5}{2}g_3$, la famille (g_1, g_2, g_3, g_4) n'est pas libre[2]

2. Posons $\ell_1 = (1,0,0)$ et $\ell_2 = (0,1,0)$, alors (ℓ_1, ℓ_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ (car il s'agit d'une famille de deux vecteurs non colinéaires) mais $(0,0,1) \notin \operatorname{vect}(\ell_1, \ell_2)$, en effet toute combinaison linéaire de ℓ_1 et ℓ_2 est de la forme $x(1,0,0) + y(0,1,0) = (x,y,0)$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Donc (ℓ_1, ℓ_2) n'est pas une famille génératrice[3] de $\mathbb{R}^3$.

3. Posons $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (1,1,0)$ les vecteurs e_1, e_2 et e_3 ne sont pas deux à deux colinéaires. Cependant comme $e_3 = e_1 + e_2$, la famille (e_1, e_2, e_3) n'est pas libre.

Correction de l'exercice 3. 1. Montrons que H est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:
   - $H \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   - Si $A = 0_n$, alors $\sum_{k=1}^{n} A_{k,k} = \sum_{k=1}^{n} 0 = 0$ donc $0_n \in H$.
   - Soit $(A, B, \lambda) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2 \times \mathbb{R}$, alors

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda A + B)_{k,k} = \sum_{k=1}^{n} (\lambda A_{k,k} + B_{k,k}) = \lambda \sum_{k=1}^{n} A_{k,k} + \sum_{k=1}^{n} B_{k,k} = \lambda 0 + 0 = 0$$

   Ainsi, $\lambda A + B \in H$

Ainsi, H est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Trouvons une base de H. Soit $M \in H$, alors $M_{n,n} = -\sum_{k=1}^{n-1} M_{k,k}$. Ainsi, en décomposant M dans la base canonique et en remplaçant $M_{n,n}$ par sa valeur, il vient :

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}E_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} M_{i,i}E_{i,i} + \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} M_{i,j}E_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1} M_{i,i}E_{i,i} - \sum_{i=1}^{n-1} M_{i,i}E_{n,n} + \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} M_{i,j}E_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} M_{i,i}(E_{i,i} - E_{n,n}) + \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} M_{i,j}E_{i,j} \end{aligned}$$

1. C'est normal, (g_1, g_2, g_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2. On peut aussi dire que le cardinal d'une famille libre est inférieure ou égale à $3 = \dim(R^3)$ donc une famille de quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est nécessairement liée.

3. On peut aussi dire que le cardinal d'une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ est supérieure ou égale à $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ donc une famille de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ ne peut pas être génératrice.

Ainsi, si on note $\mathscr{B} = (E_{i,i} - E_{n,n})_{1 \leqslant i \leqslant n-1} \cup (E_{i,j})_{i \neq j}$, on a montré que $M \in \text{vect}(\mathscr{B})$, ainsi, $H \subset \text{vect}(\mathscr{B})$. Comme toutes les matrices de $\mathscr{B}$ sont dans H et que H est un sous-espace vectoriel, $\text{vect}(\mathscr{B}) \subset H$, ainsi $H = \text{vect}(\mathscr{B})$. Ainsi, $\mathscr{G}$ est une famille génératrice de H.

Montrons que $\mathscr{B}$ est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $(\mu_{i,j})_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} \in \mathbb{R}^{n^2-n}$. Supposons $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (E_{i,i} - E_{n,n}) + \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} \mu_{i,j} E_{i,j}$. Alors

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i E_{i,i} + \left(- \sum_{i=1}^{n-1} \right) E_{n,n} + \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} \mu_{i,j} E_{i,j} = 0_n$$

Or $(E_{i,j})_{i,j}$ est libre (base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$), donc pour tout $i \in [\![1 ; n-1]\!]$, $\lambda_i = 0$ et pour tout (i,j) avec $i \neq j$, $\mu_{i,j} = 0$. Ceci montre que $\mathscr{B}$ est libre.

Ainsi, $\mathscr{B}$ est une base de H.

3. Dès lors, $\dim(H) = |\mathscr{B}| = (n-1) + (n^2 - n) = n^2 - 1$.

Correction de l'exercice 4.

Correction de l'exercice 5. Soit $P \in E$:

$$\begin{aligned} P \in F \quad &\iff \quad P(a) = P(b) = 0 \quad \iff \quad (X-a)(X-b) | P \quad \iff \quad \exists Q \in \mathbb{R}[x] \quad P = (X-a)(X-b)Q \\ &\iff \quad \exists Q \in \mathbb{R}_2[X] \quad P = (X-a)(X-b)Q \quad \iff \quad \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \quad P = (X-a)(X-b)(\alpha X^2 + \beta X + \gamma) \\ &\iff \quad \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \quad P = \alpha X^2 (X-a)(X-b) + \beta X (X-a)(X-b) + \gamma (X-a)(X-b) \\ &\iff \quad P \in \text{vect}(X^2(X-a)(X-2), X(X-a)(X-b), (X-a)(X-b)) \end{aligned}$$

Dès lors, $F = \text{vect}(X^2(X-a)(X-2), X(X-a)(X-b), (X-a)(X-b))$. Ainsi, F est sous-espace vectoriel de E et $\mathscr{B} = (X^2(X-a)(X-2), X(X-a)(X-b), (X-a)(X-b))$ en est une famille génératrice. De plus, $\mathscr{B}$ est une famille de polynômes non nuls dont les degrés sont deux à deux distincts, ainsi, $\mathscr{B}$ est libre. Dès lors, $\mathscr{B}$ est une base de F, et donc $\dim(F) = |\mathscr{B}| = 3$.

Correction de l'exercice 6.

- Montrons que $\mathscr{F}_1$ est libre. soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Supposons que

$$a(1,1,1,1) + b(1,2,3,4) + c(1,0,0,0) = (0,0,0,0)$$

On obtient :

$$\begin{cases} a + b + c &= 0 \\ a + 2b &= 0 \\ a + 3b &= 0 \\ a + 4b &= 0 \end{cases}$$

Alors, si on fait $L_4 - L_3$, on a que $b = 0$, en remplaçant dans L_4, on obtient que $a = 0$, puis en remplaçant dans L_1, on obtient que $c = 0$. Ainsi, $\mathscr{F}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$. D'après le théorème de la base incomplète, on peut donc la compléter en une base en rajoutant des vecteurs de la base canonique (tant que la famille reste libre). Prenons alors $(0,1,0,0)$ et montrons que $\mathscr{B} = \mathscr{F}_1 \cap ((0,1,0,0))$ est libre. Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. Supposons

$$a(1,1,1,1) + b(1,2,3,4) + c(1,0,0,0) + d(0,1,0,0) = (0,0,0,0)$$

alors, on obtient le système :

$$\begin{cases} a + b + c &= 0 \\ a + 2b + d &= 0 \\ a + 3b &= 0 \\ a + 4b &= 0 \end{cases}$$

Alors, si on fait $L_4 - L_3$, on a que $b = 0$, en remplaçant dans L_4, on obtient que $a = 0$, puis en remplaçant dans L_1 et dans L_2, on obtient que $c = 0$ et $d = 0$. Ainsi, $\mathscr{B}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$ et comme $\dim(\mathbb{R}^4) = 4 = |\mathscr{B}|$, $\mathscr{B}$ est une famille base de $\mathbb{R}^4$.

- $\mathscr{F}_2$ est liée, en effet, $3(1,2,3,4)-2(1,1,1,1)=(1,4,7,10)$. Ainsi, on ne peut compléter $\mathscr{F}_2$ en une base, car si on rajoute des vecteurs à $\mathscr{F}_2$, on aura toujours $(1,4,7,10)$ qui s'écrira comme combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

Correction de l'exercice 7.

Correction de l'exercice 8. On sait que $\dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))=n^2$. Donc toute famille de vecteurs de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec n^2+1 est forcément liée. En particulier $(I_n, M, M^2, \dots, M^{n^2})$ est liée.

Correction de l'exercice 9.

Correction de l'exercice 10. Supposons que $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ soit un espace vectoriel de dimension finie. Notons $d=\dim(\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R}))\in\mathbb{N}$. Soit $n\in\mathbb{N}$. Posons, pour $k\in[\![0\,;n]\!]$, $e_k\colon t\mapsto t^k$, alors $\mathscr{F}=(e_0,e_1,\dots,e_n)$ est une famille de vecteurs de $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$. Montrons que $\mathscr{F}$ est libre. Soit $(a_0,a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$. Supposons que $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k e_k=0$ (la fonction nulle de $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$. Cela veut dire que pour tout $x\in I$, $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k e_k(x)=0$. Soit encore que $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k=0$. Considérons $P=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k\in\mathbb{R}[X]$. D'après ce qui précède, tout élément de I est une racine de P. Comme I est un intervalle non réduit à un point et non vide, I est infini. Dès lors, P a une infinité de racines. Donc P est le polynôme nul. Pour tout $k\in[\![0\,;n]\!]$, $a_k=0$. Ainsi, la famille $\mathscr{F}$ est libre.

Dès lors, $|\mathscr{F}|=n+1\leqslant d$. Et ce pour tout $n\in\mathbb{N}$. En particulier, pour $n=d$, on obtient $d+1\leqslant d$ donc $1\leqslant 0$. Ce qui est absurde, ainsi $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ est un espace de dimension infinie.

Si $\mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$ (respectivement $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$) était de dimension finie, alors ses sous-espaces vectoriels seraient de dimension finie. En particulier $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$ (respectivement $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$). Comme $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ est de dimension infinie, on en déduit (par l'absurde) que $\mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$ et $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ sont de dimension infinie.

Correction de l'exercice 11.

Correction de l'exercice 12. Soit $P\in E$, on a :

$$\begin{aligned}
P\in H &\iff P(1)=0\\
&\iff (X-1)|P\\
&\iff \exists Q\in\mathbb{R}_2[X]\qquad P=(X-1)Q\\
&\iff \exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\qquad P=(X-1)(aX^2+bX+c)\\
&\iff \exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\qquad P=aX^2(X-1)+bX(X-1)+c(X-1)\\
&\iff P\in\mathrm{vect}(X^2(X-1),X(X-1),X)
\end{aligned}$$

On a donc montré que $H=\mathrm{vect}(X^2(X-1),X(X-1),X)$. Ainsi H est un espace vectoriel, et $\mathscr{B}=(X^2(X-1),X(X-1),X)$ en est une partie génératrice. Comme $\mathscr{B}$ est échelonnée en degré, $\mathscr{B}$ est libre. Ainsi, $\mathscr{B}$ est une base de H, on en déduit que $\dim(H)=|\mathscr{B}|=3$ (ainsi, $\dim(H)=\dim(E)-1$, donc H est un hyperplan de E).

Correction de l'exercice 13.

1. $E_a\subset\mathbb{R}[X]$, si $P=0$, alors $P(a)=0$ donc $0\in E_a$, soit $(P,Q)\in {E_a}^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, alors $(\lambda P+Q)(a)=\lambda P(a)+Q(a)=\lambda 0+0=0$, ainsi $\lambda P+Q\in E_a$. Dès lors, E_a est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit [4] $P=(X-a)(X-b)$, alors $P(a)=0=P(b)$, ainsi $P\in E_a\cap E_b$ et $P\neq 0$, ainsi E_a et E_b ne sont pas en somme directe.
3. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. Montrons qu'il existe $A\in E_a$ et $B\in E_b$ tel que $P=A+B$. Procédons par analyse-synthèse [5]
   - **Analyse :** Supposons qu'il existe $A\in E_a$ et $B\in E_b$ tel que $P=A+B$, alors $P(b)=A(b)+B(b)=A(b)$ et $A(a)=0$, ainsi A est divisible par $X-a$ et $B=P-A$

4. Au brouillon pour comprendre l'idée. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. Alors, $P\in E_a\cap E_b$ ssi $P(a)=P(b)=0$ ssi a et b sont racines de P ssi $(X-a)(X-b)$ divise P.

5. Ici, on a seulement besoin de l'existence, que va prouver la synthèse, ainsi l'analyse peut se faire seulement au brouillon pour avoir une idée de quoi poser.

- **Synthèse :** posons $A = \dfrac{P(b)}{b-a}(X-a)$ et $B = P - A$. Alors, $A(a) = 0$ donc $A \in E_a$,

$$B(b) = P(b) - A(b) = P(b) - \frac{P(b)}{b-a}(b-a) = 0$$

  donc $B \in E_b$ et $A + B = A + (P - A) = P$. Dès lors, $P \in E_a + E_b$

Pour conclure, $E = E_a + E_b$.

4. Supposons que E_a soit de dimension finie. Notons $n = \dim(E_a)$. Considérons

$$\mathscr{F} = (X-a, (X-a)^2, (X-a)^3, \dots, (X-a)^{n+1})$$

La famille $\mathscr{F}$ est libre (car formée de polynômes non nuls dont les degrés sont deux à deux distincts) de E_a. Ainsi, $\|\mathscr{F}\| \leqslant \dim(E_a)$ soit $n+1 \leqslant n$ donc $1 \leqslant 0$, ce qui est absurde. Ainsi, E_a n'est pas de dimension finie.

Correction de l'exercice 14.

Correction de l'exercice 15. D'après la formule de Grassmann :

$$\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F+G) = 3 + 3 - \dim(F+G) = 6 - \dim(F+G)$$

Or $F + G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$, ainsi $\dim(F+G) \leqslant \dim(\mathbb{R}_4[X]) = 5$, ainsi $6 - \dim(F+G) \geqslant 6 - 5 = 1$. Dès lors, $\dim(F+G) \geqslant 1$. Ainsi, il existe $P \in F \cap G$ et $P \neq 0$.

Correction de l'exercice 16.

Correction de l'exercice 17. La famille $((1,1,1,1),(2,1,-1,0))$ est libre (deux vecteurs non colinéaires). Ainsi d'après le théorème de la base incomplète, on peut la compléter avec des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Montrons que $\mathscr{F} = ((1,1,1,1),(2,1,-1,0),(1,0,0,0),(0,1,0,0))$ est libre. Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. Supposons

$$a(1,1,1,1) + b(2,1,-1,0) + c(1,0,0,0) + d(0,1,0,0) = (0,0,0,0)$$

On obtient alors le système suivant

$$\begin{cases} a + 2b + c &= 0 \\ a + b + d &= 0 \\ a - b &= 0 \\ b &= 0 \end{cases}$$

Ainsi, $b = 0$, en remontant dans L_3, $b = 0$, en remontant dans L_1 et L_2, on obtient $c = d = 0$. Ainsi, $\mathscr{F}$ est libre. Comme $\dim(\mathbb{R}^4) = 4 = |\mathscr{F}|$, $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Ainsi, $\mathrm{vect}((1,0,0,0),(0,1,0,0))$ est un supplémentaire de $\mathrm{vect}((1,1,1,1),(2,1,-1,0))$.

Correction de l'exercice 18.

1. - F étant l'espace engendré par une famille finie de polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ (ici un vecteur $X-1$), on sait, d'après le cours, que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
   - Tout d'abord $G \subset E$. 0_E, le polynôme nul, vérifie bien $0_E(2) = 0$. Donc $0_E \in G$. Soit $(P,Q) \in G^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $(P + \lambda Q)(2) = P(2) + \lambda Q(2) = 0 + \lambda 0 = 0$. Donc $P + \lambda Q \in G$. Donc G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. - $(X-1)$ est une famille génératrice de E. Comme il s'agit d'un vecteur non nul, cette famille est une libre. $(X-1)$ est une base de F. Donc $\dim(F) = 1$.
   - On va d'abord décrire G ; pour tout $P \in E$:

$$\begin{aligned} P \in G &\iff P(2) = 0 \\ &\iff X - 2 | P \\ &\iff \exists Q \in \mathbb{R}_2[X] \quad P = (X-2)Q \\ &\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \qquad P = (X-2)(aX^2 + bX + c) \\ &\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \qquad P = aX^2(X-2) + bX(X-2) + c(X-2) \\ &\iff P \in \mathrm{vect}(X^2(X-2), X(X-2), X-2) \end{aligned}$$

Par équivalence, on a donc montré que $G = \mathrm{vect}(X-2, X(X-2), X^2(X-2))$. On a donc trouvé que $\mathscr{B} = (X-2, X(X-2), X^2(X-2))$ est une partie génératrice de G. De plus, cette famille étant échelonnée en degré, elle est libre. $\mathscr{B}$ est donc une base de G et donc $\dim(G) = |\mathscr{B}| = 3$.

3. Soit $P \in F \cap G$, alors $P \in F$ et $P \in G$. Ainsi, il existe λ tel que $P = \lambda(X-1)$. De plus, $P(2) = 0$, donc $\lambda(2-1) = 0$. Soit $\lambda = 0$ donc $P = 0_E$. On a donc montré que $F \cap G \subset \{0_E\}$. Comme l'inclusion réciproque est toujours vraie, on a $F \cap G = \{0_E\}$. Donc F et G sont en somme directe. De plus, d'après la question précédente, $\dim(F) + \dim(G) = 1 + 3 = 4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$. Donc d'après le cours F et G sont en somme directe.

Correction de l'exercice 19. 1. Notons $g = (1, \cdots, 1) \in \mathbb{R}^n$, alors $A = \mathrm{vect}(g)$ donc (g) est génératrice. De plus comme g est non nul, la famille (g) est libre donc (g) est une base de A ainsi $\dim(A) = |(g)| = 1$.

2.
   - $B \subset E$
   - $0_E = (0, 0, \cdots, 0)$ et $0 + 0 + \cdots + 0 = 0$, donc $0_E \in B$.
   - Soit $(u, v) \in B^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ et $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Notons $w = u + \lambda v = (u_1 + \lambda v_1, u_2 + \lambda v_2, \cdots u_n + \lambda v_n)$. On a :

     $$\sum_{i=1}^{n} u_i + \lambda v_i = \sum_{i=1}^{n} u_i + \lambda \sum_{i=1}^{n} v_i = 0 + \lambda 0 = 0$$

     Ainsi $u + \lambda v \in B$

   Donc B est un sous-espace vectoriel de E.

3. Montrons que A et B sont en somme directe : soit $x \in A \cap B$, alors $x \in A$ et donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = (\lambda, \lambda, \ldots, \lambda)$, d'autre part $x \in B$, donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda = 0$, donc $n\lambda = 0$, comme $n \neq 0$, on a $\lambda = 0$, donc $x = (\lambda, \ldots, \lambda) = (0, \ldots, 0) = 0_E$. Ainsi $A \oplus B$.

4. Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$, notre but est de prouver qu'il existe $a \in A$ et $b \in B$ tel que $x = a + b$. Pour cela raisonnons par analyse-synthèse :
   - Analyse : supposons que $x = a + b$ pour un certain $a \in A$ et $b \in b$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $a = (\lambda, \ldots, \lambda)$ et il existe $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ tel que $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ avec $\sum_{i=1}^{n} b_i = 0$. On a donc

     $$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda, \lambda, \ldots, \lambda) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (b_1 + \lambda, b_2 + \lambda, \ldots, b_n + \lambda)$$

     On a donc $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} (b_i + \lambda) = \sum_{i=1}^{n} b_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda = n\lambda$

     On a donc $\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$. Ainsi $a = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot (1, 1, \ldots, 1)$.
   - Synthèse : Posons $a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i (1, 1, \ldots, 1)$ et $b = x - a$. Et vérifions que a et b conviennent :
     — Tout d'abord $a + b = a + (x - a) = x$
     — De plus, $a = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \ldots, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \in A$.
     — Enfin $b = \left(x_1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, x_2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \ldots, x_n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$. Calculons :

     $$\sum_{k=1}^{n} \left(x_k - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

     Ce qui prouve bien que $b \in B$.

     On a donc montré que pour tout $x \in E$, $x \in A + B$ donc $E \subset A + B$. De plus $A + B \subset E$ (car A et B sont des sous-espaces vectoriels de E. Comme on a montré que la somme était directe, on a $E = A \oplus B$.

5. Comme $E = A \oplus B$, on sait que $\dim(E) = \dim(A) + \dim(B)$, donc $n = 1 + \dim(B)$, $\dim(B) = n - 1$. Donc B est un hyperplan de E.

Correction de l'exercice 20.

Correction de l'exercice 21. 1. Comme $H \subset H + H' \subset E$, on a $\dim(H) \leqslant \dim(H + H') \leqslant \dim(E)$, ainsi $n - 1 \leqslant \dim(H + H') \leqslant n$. Si $\dim(H + H') = n - 1$, alors on a $H \subset H + H'$ et ces deux sous-espaces vectoriels ont même dimension, donc sont égaux. Ainsi, $H = H + H'$, or $H' \subset H + H' = H$, ainsi $H' \subset H$. De même, on montre que $H \subset H'$, ainsi $H = H'$ ce qui contredit le fait que H soit différent de H', ainsi, $\dim(H + H') = n$.

2. Appliquons la formule de Grassmann à H et H', on a $\dim(H + H') = \dim(H) + \dim(H') - \dim(H \cap H')$. Ainsi, $\dim(H \cap H') = 2(n - 1) - n = n - 2$.
3. Soit S un supplémentaire de H, on a $E = S \oplus H$, ainsi $\dim(E) = \dim(S) + \dim(H)$ donc $\dim(S) = \dim(E) - \dim(H) = n - (n - 1) = 1$. Ainsi, un supplémentaire de H a pour dimension 1.
4. Remarquons que H et H' ont même dimension, donc si $H \subset H'$, on aurait $H = H'$, ce qui est absurde. Donc H n'est pas inclus dans H', donc il existe $u \in H$ et $u \notin H'$. De même, H' n'est pas inclus dans H, donc il existe $v \in H'$ et $v \in H$.
5. Supposons que $w \in H \cup H'$, alors $w \in H$ ou $w \in H'$. Supposons $w \in H$. Alors $v = w - u \in H$, ce qui est absurde. De même si $w \in H'$, on obtient une contradiction. Donc $w \notin H \cup H'$.
6. Posons $S = \mathrm{vect}(w)$, w n'est pas nul, car sinon on aurait $w \in H \cup H'$. Ainsi (w) est une famille libre, comme c'est une famille génératrice de S, (w) est une base de S. Ainsi, $\dim(S) = 1$. Montons que S et H sont en somme directe. Soit $x \in H \cap S$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda w$. Si $\lambda \neq 0$, alors $w = \dfrac{1}{\lambda} x \in H$ ce qui est absurde, donc $\lambda = 0$. Ainsi, $x = 0_E$, donc $H \cap S \subset \{0_E\}$. L'inclusion réciproque étant toujours vraie, S et H sont en somme directe. De plus, $\dim(S) + \dim(H) = 1 + (n - 1) = n$. D'après le cours, S et H sont supplémentaires. De même S et H' sont supplémentaires. S est donc un supplémentaire commun à H et à H'.

Correction de l'exercice 22. 1. Soit $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant pour tout $(i, j) \in [\![1 ; n]\!]^2$, $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$. Montrons que cette famille est libre. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Supposons que $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(X) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$. Soit $j \in [\![0 ; n]\!]$, évaluons en a_j. On a donc $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(a_j) = 0$. Soit $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i \delta_{i,j} = 0$. Dans cette somme tous les termes sont nulles sauf celui pour $i = j$, on a donc $\lambda_j = 0$. Et ce pour tout les $j \in [\![0 ; n]\!]$. Prouvant que la famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est libre. De plus $|\,(L_0, L_1, \ldots, L_n)\,| = n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$. Donc la famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Prouvons d'abord l'existence puis l'unicité :
   - Pour $i \in [\![0 ; n]\!]$, posons $P_i(X) = \prod\limits_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} (X - a_k) \in \mathbb{R}_n[X]$. Soit $k \in [\![0 ; n]\!] \backslash \{i\}$. On a $P_i(a_k) = 0$. Alors que $P_i(a_i) = \prod\limits_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} (a_i - a_k)$. Il n'y a donc aucune raison pour que $P_i(a_i) = 1$. Par contre divisons P_i par $P_i(a_i)$ et dans ce cas on aura une chance que ça vaille 1. Pour cela il faudrait que $P_i(a_i) \neq 0$. Or c'est le cas, car pour tout $k \in [\![0 ; n]\!] \backslash \{i\}$, $a_i - a_k \neq 0$ (par hypothèse). Posons donc :

$$\forall i \in [\![0 ; n]\!] \qquad L_i(X) = \frac{\prod\limits_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} (X - a_k)}{\prod\limits_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} (a_i - a_k)} = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{X - a_k}{a_i - a_k} \in \mathbb{R}_n[X]$$

   Alors on a bien pour tout $(i, j) \in [\![0 ; n]\!]^2$, $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$.

- Soit $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ et $(L'_1, L'_2, \dots, L'_n)$ deux familles de polynômes vérifiant pour tout $(i,j) \in [\![0\,; n]\!]^2$, $L_i(a_j) = L'_i(a_j) = \delta_{i,j}$. Soit $i \in [\![0\,; n]\!]$, posons $P = L_i - L'_i$, alors pour tout $j \in [\![0\,; n]\!]$, $P(a_j) = L_i(a_j) - L'_i(a_j) = \delta_{i,j} - \delta_{i,j} = 0$. Ainsi tous les a_j sont racines de P, or $d^\circ P \leqslant n$, avec P qui a $n+1$ racines distinctes. Donc $P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$, prouvant que $L_i = L'_i$. Et donc l'unicité de ces polynômes.

3. Raisonnons par analyse-synthèse :
   - Analyse : Soit P un polynôme tel que $P(a_i) = b_i$. Décomposons ce polynôme dans la base $(L_0, L_1, \dots, L_n)$:
   $$\exists\,(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \qquad P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i$$
   Soit $j \in [\![0\,; n]\!]$, évaluons ce polynôme en a_j, alors $b_j = P(a_j) = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(a_j) = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i \delta_{i,j} = \lambda_j$. Donc si un tel polynôme existe, nécessairement $P = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i L_i$.
   - Synthèse : posons $P = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i L_i$. Alors pour tout $j \in [\![0\,; n]\!]$, $P(a_j) = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i L_i(a_j) = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i \delta_{i,j} = b_j$. Donc ce polynôme P convient.

   Par analyse synthèse un tel polynôme existe et est unique.

   Exemple : fixons $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ et $a_3 = -2$, $b_0 = b_1 = 1$ et $b_2 = b_3 = 2$. Trouver un polynôme de degré au plus 3 valant 1 en 0 et en 2 et valant 2 en 4 et -1 n'est pas a priori un problème facile. Si on pose $P = c_3X^3 + c_2X^2 + c_1X + c_0$, (décomposition de P dans la base canonique), trouver les coefficients c_i pour que ça marche serait compliqué. Alors que si on pose L_0, L_1, L_2 et L_3 comme avant, on sait directement que $P = L_0 + L_1 + 2L_2 + 2L_3$. Et donc on peut dessiner P.

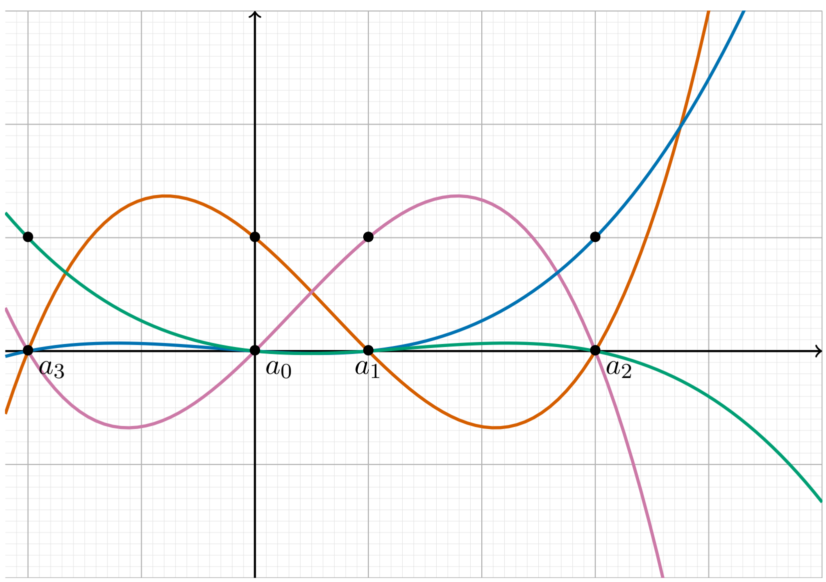

FIGURE 1 – En rouge, on a L_0, en violet, on a L_1, en bleu, on a L_2 et en vert, on a L_3. Ces quatre polynômes forment une base de $\mathbb{R}_3[X]$ (espace vectoriel de dimension 4).

Correction de l'exercice 23.

Correction de l'exercice 24.

Correction de l'exercice 25.

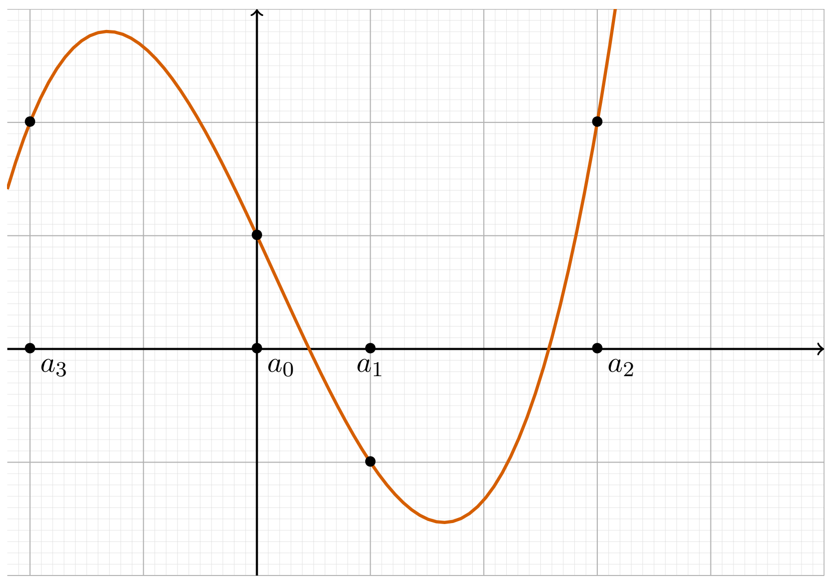

FIGURE 2 – Le polynôme passe par les points prescrits : pour trouver P il suffit de faire une combinaison linéaire des L_i dont les coefficients sont les b_i.