

Correction de l'exercice 1. a) $x^2 e^x \underset{0}{=} x^2 \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^3) \right) \underset{0}{=} x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{6} + \mathcal{O}(x^5)$

b) $\frac{\sin(x) - x}{x^3} \underset{0}{=} \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \mathcal{O}(x^8) - x}{x^3} \underset{0}{=} -\frac{1}{6} + \frac{x^2}{120} - \frac{x^4}{5040} + \mathcal{O}(x^5)$

c) $\ln\left(\frac{1+x^2}{1-x}\right) \underset{0}{=} x + \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \mathcal{O}(x^5)$

d) $DL_3(0)$ de $x \mapsto \sqrt{\text{ch}(\sin(x))}$. On pose $u = \sin(x)$, alors

- $u \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^3)$
- $u^2 \underset{0}{=} x^2 + \mathcal{O}(x^3)$
- $u^3 \underset{0}{=} x^3 + \mathcal{O}(x^3)$, donc $u^3 \underset{0}{\sim} x^3$, donc $\mathcal{O}(u^3) = \mathcal{O}(x^3)$

Ainsi, on effectue un $DL_3(0)$ de $\text{ch}(u)$:

$$\text{ch}(u) \underset{0}{=} 1 + \frac{u^2}{2} + 0u^3 + \mathcal{O}(u^3) = 1 + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3) + \mathcal{O}(x^3) = 1 + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)$$

On pose alors $v = \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^2)$, alors $v^2 = \mathcal{O}(x^3)$, ainsi, on effectue un développement limité de $\sqrt{1+v}$ en 0 à l'ordre 2 : $\sqrt{1+v} = 1 + \frac{1}{2}v - \frac{1}{8}v^2 + \mathcal{O}(v^2)$. Comme $v^2 = \mathcal{O}(x^3)$, on a $\mathcal{O}(v^2) = \mathcal{O}(x^3)$, ainsi

$$\sqrt{\text{ch}(\sin(x))} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3) \right) + \mathcal{O}(x^3) = 1 + \frac{x^2}{4} + \mathcal{O}(x^3)$$

e) $DL_6(0)$ de $x \mapsto (\cos(x))^3$: $(\cos(x))^3 \underset{0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^6) \right)^3$.

- On pose alors $u \underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^6)$
- $u^2 \underset{0}{=} \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} + \mathcal{O}(x^6)$
- $u^3 \underset{0}{=} -\frac{x^6}{8} + \mathcal{O}(x^6)$
- $u^3 \underset{0}{\sim} -\frac{x^6}{8}$, donc $\mathcal{O}(u^3) = \mathcal{O}(x^6)$

Ainsi, d'après le $DL_3(0)$ de $(1+u)^3$:

$$\begin{aligned} \cos^3(x) \underset{0}{=} (1+u)^3 \underset{0}{=} 1 + 3u + 3u^2 + u^3 + \mathcal{O}(u^3) \\ \underset{0}{=} 1 + 3 \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^6) \right) + 3 \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} + \mathcal{O}(x^6) \right) + \left(-\frac{x^6}{8} + \mathcal{O}(x^6) \right) + \mathcal{O}(x^6) \\ \underset{0}{=} 1 - \frac{3x^2}{2} + \frac{7x^4}{8} - \frac{61x^6}{240} + \mathcal{O}(x^6) \end{aligned}$$

f) $DL_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ de \sin , proposons deux méthodes :

- On pose $h = x - \frac{\pi}{4} \xrightarrow{x \rightarrow \pi/4} 0$, alors :

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sin\left(h + \frac{\pi}{4}\right) = \sin(h) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos(h) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} [\sin(h) + \cos(h)] \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} \left[1 + h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + \mathcal{O}(h^3) \right] \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{4}}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\sqrt{2}}{4} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{12} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)^3 + \mathcal{O}\left(\left(x - \frac{\pi}{4} \right)^3 \right)$$

- Comme \sin est de classe \mathcal{C}^3 sur \mathbb{R} , on peut appliquer la formule de Taylor-Young en $\pi/4$ à l'ordre 3 :

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{4}}{=} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sin'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sin''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\sin'''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{3!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \mathcal{O}\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right)$$

Comme $\sin' = \cos$, que $\sin'' = -\sin$ et que $\sin''' = -\cos$ que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ on en déduit que

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{4}}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{12} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \mathcal{O}\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right)$$

- g) Comme on fait un DL en 1, on pose $h = x - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$. Ainsi,

$$e^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{1+h}} \underset{h \rightarrow 0}{=} \exp\left(1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \mathcal{O}(h)\right) = e \times \exp\left(\frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \mathcal{O}(h^2)\right)$$

- Posons $u = \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \mathcal{O}(h^2)$
- $u^2 = \frac{1}{4}h^2 + \mathcal{O}(h^2)$
- $u^2 \underset{0}{\sim} \frac{1}{4}h^2$, ainsi $\mathcal{O}(u^2) = \mathcal{O}(h^2)$.

On effectue alors un $DL_2(0)$ de exponentielle :

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \mathcal{O}(h^2)} &\underset{h \rightarrow 0}{=} e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \mathcal{O}(u^2) = 1 + \left(\frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \mathcal{O}(h^2)\right) + \frac{\frac{1}{4}h^2 + \mathcal{O}(h^2)}{2} + \mathcal{O}(h^2) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}h + 0 \times h^2 + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$e^{\sqrt{x}} \underset{x \rightarrow 1}{=} e + \frac{e}{2}(x - 1) + \mathcal{O}((x - 1)^2)$$

h) $\ln(1 + \sqrt{x}) \underset{1}{=} \ln(2) + \frac{1}{4}(x - 1) - \frac{3}{32}(x - 1)^2 + \mathcal{O}((x - 1)^2)$

i) $e^{\sqrt{1+x^2}} \underset{0}{=} e + \frac{ex^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)$

j) $DL_6(0)$ de $x \mapsto \sin(x)^4$:

$$(\sin(x))^4 \underset{0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4)\right)^4 \underset{0}{=} \left[x \left(1 - \frac{x^2}{6} + \mathcal{O}(x^3)\right)\right]^4 \underset{0}{=} x^4 \left(1 - \frac{x^2}{6} + \mathcal{O}(x^3)\right)^4$$

On cherche à faire un $DL_2(0)$ de $\left(1 - \frac{x^2}{6} + \mathcal{O}(x^3)\right)^4$. On pose $u \underset{0}{=} -\frac{x^2}{6} + \mathcal{O}(x^3)$, ainsi $u \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{6}$, donc $\mathcal{O}(u) = \mathcal{O}(x^2)$. Ainsi,

$$\sin(x)^4 \underset{0}{=} x^4(1 + 4u + \mathcal{O}(u)) \underset{0}{=} x^4 \left(1 + 4 \left(-\frac{x^2}{6} + \mathcal{O}(x^3)\right) + \mathcal{O}(x^2)\right) \underset{0}{=} x^4 - \frac{2x^6}{3} + \mathcal{O}(x^6)$$

k) $DL_3(0)$ de $x \mapsto (1 + x)^{\frac{1}{x}}$:

$$\begin{aligned} (1 + x)^{\frac{1}{x}} &\underset{0}{=} \exp\left(\frac{1}{x} \ln(1 + x)\right) = \exp\left(\frac{1}{x} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \mathcal{O}(x^4)\right)\right) \\ &\underset{0}{=} \exp\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \mathcal{O}(x^3)\right) \underset{0}{=} e \times \exp\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \mathcal{O}(x^3)\right) \end{aligned}$$

On pose $u = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \mathcal{O}(x^3) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Alors

- $u^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^3)$
- $u^3 = -\frac{x^3}{8} + \mathcal{O}(x^3)$
- $\mathcal{O}(u^3) = \mathcal{O}(x^3)$

Ainsi, on effectue un $DL_3(0)$ de $u \mapsto \exp(u)$:

$$\begin{aligned} (1+x)^{\frac{1}{x}} &= e \times \exp(u) = e \left(1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \mathcal{O}(u^3) \right) \\ &= e \left(1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \mathcal{O}(x^3) \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^3) \right) + \frac{1}{6} \left(-\frac{x^3}{8} + \mathcal{O}(x^3) \right) + \mathcal{O}(x^3) \right) \\ &= e - \frac{ex}{2} + \frac{11ex^2}{24} - \frac{7ex^3}{16} + \mathcal{O}(x^3) \end{aligned}$$

l) $\frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{(x-2)^2}{8} - \frac{(x-2)^3}{16} + \mathcal{O}((x-2)^3)$

m) Posons $u = x + x^2$, alors :

- $u^2 = x^2 + 2x^3 + x^4$
- $u^3 = x^3 + 3x^4 + \mathcal{O}(x^4)$
- $u^4 = x^4 + \mathcal{O}(x^4)$
- Comme $u^4 \sim x^4$, $\mathcal{O}(u^4) = \mathcal{O}(x^4)$.

Ainsi, on effectue le $DL_4(0)$ de $\frac{1}{1+u}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x+x^2} &= \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + \mathcal{O}(u^4) \\ &= 1 - (x^2 + x^3) + (x^2 + 2x^3 + x^4) + (x^3 + 3x^4 + \mathcal{O}(x^4)) - (x^4 + \mathcal{O}(x^4)) + \mathcal{O}(x^4) \\ &= 1 - x + x^3 - x^4 + \mathcal{O}(x^4) \end{aligned}$$

n) $e^{\sin(x)} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \mathcal{O}(x^4)$

o) $\frac{\sin(x) - 1}{\cos(x) + 1} = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \mathcal{O}(x^2)$

p) $e^x \arctan(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{6} + \frac{3x^5}{40} + \mathcal{O}(x^5)$

q) $DL_3(0)$ de $x \mapsto \text{ch}(x)^{\text{sh}(x)}$. Tout d'abord ch est une fonction strictement positive.

$$\begin{aligned} \text{ch}(x)^{\text{sh}(x)} &= \exp(\text{sh}(x) \ln(\text{ch}(x))) \\ &= \exp \left(\left(x + \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^3) \right) \ln \left(1 + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3) \right) \right) \end{aligned}$$

En posant $u = \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)$, on applique le développement limité de $\ln(1+u)$ à l'ordre 2 : $\ln(1+u) = u - u^2 + \mathcal{O}(u^2)$. Comme $u \sim \frac{x^2}{2}$, $u^2 \sim \frac{x^4}{4}$ et donc $\mathcal{O}(u^2) = \mathcal{O}(x^4)$. Ainsi,

$$\ln \left(1 + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3) \right) = \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3) + \mathcal{O}(x^4) = \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)$$

Ainsi, $\text{sh}(x) \ln(\text{ch}(x)) = \left(x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^3) \right) \left(\frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3) \right) = \frac{x^3}{2} + \mathcal{O}(x^3)$. Donc $\text{ch}(x)^{\text{sh}(x)} = \exp \left(\frac{x^3}{2} + \mathcal{O}(x^3) \right)$.

En posant $v = \frac{x^3}{2} + \mathcal{O}(x^3)$, on a que $v \sim \frac{x^3}{2}$, donc $\mathcal{O}(v) = \mathcal{O}(x^3)$. Ainsi, on effectue le $DL_1(0)$ de $\exp(v)$:

$$\exp(v) = 1 + v + \mathcal{O}(v). \text{ Ainsi, } \text{ch}(x)^{\text{sh}(x)} = 1 + \left(\frac{x^3}{2} + \mathcal{O}(x^3) \right) + \mathcal{O}(x^3) = 1 + \frac{x^3}{2} + \mathcal{O}(x^3).$$

$$r) \frac{\ln(x)}{x} \underset{3}{=} \frac{\ln(3)}{3} + \frac{1 - \ln(3)}{9} \times (x - 3) + \left(-\frac{1}{18} + \frac{\ln(3)}{27} \right) \times (x - 3)^2 + \mathcal{O}((x - 3)^2)$$

$$s) (1 + \sin(x)) \underset{0}{=} e - \frac{ex}{2} + \frac{7ex^2}{24} - \frac{3ex^3}{16} + \mathcal{O}(x^3)$$

$$t) \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^2)}, \text{ on pose } u = -\frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^2) \sim \frac{-x^2}{2}, \text{ alors } \mathcal{O}(u) = \mathcal{O}(x^2), \text{ ainsi, Dès lors,}$$

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1 + u} \underset{0}{=} 1 - u + \mathcal{O}(u) \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^2)$$

$$\text{en multipliant par } x, \text{ on obtient : } \frac{x}{\cos(x)} \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{2} + \mathcal{O}(x^3)$$

u) On pose $u = \sin(x)$, alors :

- $u \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^3)$
- $u^2 \underset{0}{=} x^2 + \mathcal{O}(x^3)$
- $u^3 \underset{0}{=} x^3 + \mathcal{O}(x^3)$
- Comme $u^3 \underset{0}{\sim} x^3, \mathcal{O}(u^3) \underset{0}{=} \mathcal{O}(x^3)$.

Ainsi, on effectue un $DL_3(0)$ de $(1 + u)^{1/2}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \sin(x)} &= (1 + u)^{1/2} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 + \mathcal{O}(u^3) \\ &\underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^3) \right) - \frac{1}{8} (x^2 + \mathcal{O}(x^3)) + \frac{1}{16} (x^3 + \mathcal{O}(x^3)) + \mathcal{O}(x^3) \\ &\underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + \mathcal{O}(x^3) \end{aligned}$$

$$v) \frac{e^x}{\sqrt{1+x}} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + \mathcal{O}(x^3)$$

$$w) \ln(1 + \sin(x)) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^3)$$

$$x) (\sqrt{1+x})^x \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4} + \mathcal{O}(x^3)$$

$$y) \frac{x^2}{\ln(1+x^2)} \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \mathcal{O}(x^4)$$

$$z) \frac{\tan(x) - x}{1+x} \underset{0}{=} \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^3)$$

Correction de l'exercice 2. On remarque que $f \in \mathcal{C}^5(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de plus, $f'(x) = e^{x^2}(1+2x^2) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, f est strictement croissante et continue. De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Dès lors, d'après le théorème de la bijection monotone, f réalise une bijection de \mathbb{R} vers $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. De plus, f est \mathcal{C}^5 et f' ne s'annule pas sur \mathbb{R} , d'après le théorème de cours sur les bijections de classe \mathcal{C}^k , f^{-1} est aussi de classe \mathcal{C}^5 sur \mathbb{R} . D'après la formule de Taylor-Young, f^{-1} admet donc un $DL_5(0)$. Ainsi, $f^{-1}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \mathcal{O}(x^5)$. Où (a_0, a_1, \dots, a_5) sont à déterminer. Remarquons que f est impaire donc f^{-1} aussi¹. D'où $a_0 = a_2 = a_4 = 0$. De plus, $a_1 = (f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(0)} = 1$. Dès lors $f^{-1}(x) = x + a_3x^3 + a_5x^5 + \mathcal{O}(x^5)$. De plus, pour

1. En effet, soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $a = f^{-1}(x)$ et $b = -f^{-1}(-x)$, alors $f(a) = x$ et comme f est impaire $f(b) = f(-f^{-1}(-x)) = -f(f^{-1}(-x)) = -(-x) = x$. Donc $f(a) = f(b)$. Comme f est injective, $a = b$ donc $f^{-1}(x) = -f^{-1}(-x)$, f^{-1} est bien impaire.

tout $x \in \mathbb{R}$, $f \circ f^{-1}(x) = x$. Le but est alors de calculer un $DL_5(0)$ de $f \circ f^{-1}$ par composition de développements limités :

$$\begin{aligned} x &= f(f^{-1}(x)) \\ &= f^{-1}(x) \exp\left((f^{-1}(x))^2\right) \\ &= \left(x + a_3x^3 + a_5x^5 + \mathcal{O}(x^5)\right) \exp\left(\left(x + a_3x^3 + a_5x^5 + \mathcal{O}(x^5)\right)^2\right) \end{aligned} \quad (1)$$

Comme $x + a_3x^3 + a_5x^5 + \mathcal{O}(x^5)$ commence par x , on va effectuer un $DL_4(0)$ de \exp . Posons $u = x + a_3x^3 + a_5x^5 + \mathcal{O}(x^5) = x + a_3x^3 + \mathcal{O}(x^4)$. Alors $u^2 = x^2 + 2a_3x^4 + \mathcal{O}(x^4)$. Posons $v = x^2 + 2a_3x^4 + \mathcal{O}(x^4)$, alors $v^2 = x^4 + \mathcal{O}(x^4)$, $v^2 \sim x^4$, alors $\mathcal{O}(v^2) = \mathcal{O}(x^4)$. Ainsi,

$$\exp(x^2 + 2a_3x^4 + \mathcal{O}(x^4)) = \exp(v) = 1 + v + \frac{v^2}{2} + \mathcal{O}(v^2) = 1 + x^2 + \left(2a_3 + \frac{1}{2}\right)x^4 + \mathcal{O}(x^4)$$

En revenant à (1), on obtient

$$\begin{aligned} x &= \left(x + a_3x^3 + a_5x^5 + \mathcal{O}(x^5)\right) \left(1 + x^2 + \left(2a_3 + \frac{1}{2}\right)x^4 + \mathcal{O}(x^4)\right) \\ &= x + x^3(a_3 + 1) + x^5\left(a_5 + a_3 + \left(2a_3 + \frac{1}{2}\right)\right) + \mathcal{O}(x^5) \end{aligned}$$

Par unicité, d'un DL, on trouve que $a_3 + 1 = 0$ et $a_5 + a_3 + \left(2a_3 + \frac{1}{2}\right) = 0$. En résolvant ce système, on trouve $a_3 = -1$ et $a_5 = \frac{5}{2}$. Ainsi, $f^{-1}(x) = x - x^3 + \frac{5}{2}x^5 + \mathcal{O}(x^5)$. D'après la formule de Taylor-Young,

$$f^{-1}(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^5 \frac{(f^{-1})^{(k)}(0)}{k!} x^k + \mathcal{O}(x^5)$$

Par unicité des coefficients d'un développement limité en 0, on obtient

- $(f^{-1})^{(0)}(0) = 0$
- $(f^{-1})^{(1)}(0) = 1$
- $(f^{-1})^{(2)}(0) = 0$
- $(f^{-1})^{(3)}(0) = 3!a_3 = -6$
- $(f^{-1})^{(4)}(0) = 0$.
- $(f^{-1})^{(5)}(0) = 5!a_5 = 5! \times \frac{5}{2} = 300$.

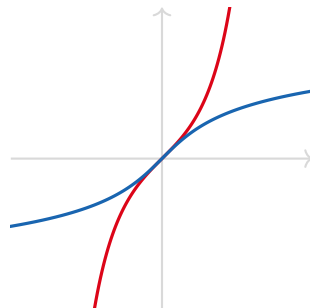


FIGURE 1 – En rouge la courbe de f , en bleu, la courbe de f^{-1} .

Correction de l'exercice 3.

Correction de l'exercice 4. D'après le $DL_n(0)$ usuel de $x \mapsto (1+x)^\alpha$, avec $\alpha = -1/2$, On obtient $(1+x)^{-1/2} = 1 + \sum_{k=1}^n \alpha_k x^k + \mathcal{O}(x^n)$. Pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a

$$\alpha_k = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} \left(-\frac{1}{2} - i\right)}{k!} = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} -\frac{1+2i}{2}}{k!} = \frac{(-1)^k \prod_{i=0}^{k-1} (1+2i)}{2^k k!} = \frac{(-1)^k \prod_{i=0}^{k-1} (1+2i) \prod_{i=1}^k (2i)}{2^k k! \prod_{i=1}^k (2i)} = \frac{(-1)^k (2k)!}{2^k k! 2^k \prod_{i=1}^k i} = \frac{(-1)^k \binom{2k}{k}}{4^k}$$

On remarque que pour $k = 0$, $\frac{(-1)^k \binom{2k}{k}}{4^k} = 1$. Ainsi, on a prouvé que

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \binom{2k}{k}}{4^k} x^k + \mathcal{O}(x^n)$$

En remplaçant x par $-x^2$, on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^{2k} + \mathcal{O}(x^{2n})$$

Appliquons maintenant le théorème d'intégration d'un développement limité, on obtient donc ²

$$\arcsin(x) \underset{0}{=} \arcsin(0) + \sum_{k=0}^n \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \mathcal{O}(x^{2n+1}) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \mathcal{O}(x^{2n+1})$$

Correction de l'exercice 5.

Correction de l'exercice 6. 1.

2.

3.

4. On pose $u = \sin(x)$. Calculons les puissances de u :

- $u \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^5)$
- $u^2 \underset{0}{=} x^2 - \frac{x^4}{3} + \mathcal{O}(x^5)$
- $u^3 \underset{0}{=} x^3 - \frac{x^5}{2} + \mathcal{O}(x^5)$
- $u^4 \underset{0}{=} x^4 + \mathcal{O}(x^5)$
- $u^5 \underset{0}{=} x^5 + \mathcal{O}(x^5)$
- Ainsi, $u^5 \underset{0}{\sim} x^5$, ainsi $\mathcal{O}(u^5) \underset{0}{=} \mathcal{O}(x^5)$

On applique donc un développement limité de $\text{sh}(u)$ à l'ordre 5 :

$$\begin{aligned} \text{sh}(\sin(x)) = \text{sh}(u) \underset{0}{=} u + \frac{u^3}{6} + \frac{u^5}{120} + \mathcal{O}(u^5) \\ \underset{0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^5)\right) + \frac{x^3 - \frac{x^5}{2} + \mathcal{O}(x^5)}{6} + \frac{x^5 + \mathcal{O}(x^5)}{120} + \mathcal{O}(x^5) \underset{0}{=} x - \frac{x^5}{15} + \mathcal{O}(x^5) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \text{sh}(\sin(x)) - x \underset{0}{=} -\frac{x^5}{15} + \mathcal{O}(x^5), \text{ dès lors } \text{sh}(\sin(x)) \underset{0}{\sim} -\frac{x^5}{15}.$$

2. On obtient un développement limité dont tous les coefficients d'indices pairs sont nuls, c'est normal, arcsin est impaire.

Correction de l'exercice 7. 1. Si $a = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = 1$, si $a > 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = +\infty$, si $a < 0$ alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = -\infty^3.$$

2. Distinguons plusieurs cas :

- Si $b = 0$, alors $\frac{x^a}{x^b + 1} = \frac{x^a}{2}$, donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^a}{2}$.
- Si $b > 0$, alors $x^b + 1 \underset{+\infty}{\sim} x^b$ (passer par le quotient pour le vérifier). Alors par quotient d'équivalents, $\frac{x^a}{x^b + 1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$. Ainsi, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x^{a-b}$.
- Si $b < 0$, alors $x^b + 1 \sim 1$, donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x^a$.

Correction de l'exercice 8. Pour $x > 0$ en connaissant le développement limité de $\arctan(u)$ quand $u = \frac{1}{x} \rightarrow 0$, on a :

$$\begin{aligned} \arctan(x) &\underset{+\infty}{=} \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^3}\right) \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 9. Tout d'abord

$$\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^{x \ln x} = \exp\left(x \ln x \ln\left[\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right]\right)$$

Effectuons un développement asymptotique quand x tend vers $+\infty$:

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln x} = \frac{\ln(x(1+1/x))}{\ln(x)} = \frac{\ln x + \ln(1 + \underbrace{1/x}_u)}{\ln x}$$

Or $u \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, on a $\ln(1+u) \underset{0}{=} u + \mathcal{O}(u)$ donc

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln x} = 1 + \frac{\frac{1}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = 1 + \underbrace{\frac{1}{x \ln x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x \ln x}\right)}_v$$

Or $v \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, on a $\ln(1+v) \underset{0}{=} v + \mathcal{O}(v)$, comme $v \sim \frac{1}{x \ln(x)}$, on a $\mathcal{O}(v) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x \ln(x)}\right)$. Dès lors :

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right) &= \ln(1+v) = v + \mathcal{O}(v) = \frac{1}{x \ln x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x \ln x}\right) \\ \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^{x \ln x} &= \exp\left(x \ln x \ln\left[\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right]\right) = \exp(1 + \mathcal{O}(1)) \end{aligned}$$

Ainsi, $\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^{x \ln x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e$.

Correction de l'exercice 10.

3. Rappelons qu'en cas de doute il suffit d'écrire $x^a = e^{a \ln(x)}$ et de composer les limites.

Correction de l'exercice 11. Notons $f: x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$. Tout d'abord f est définie et \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* (quotients de fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} dont le dénominateur ne s'annule pas). Effectuons un développement limité à l'ordre 1 de f :

$$f(x) = \frac{x}{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^2)\right) - 1} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x)}$$

Posons $u = \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x)$, alors $\mathcal{O}(u) = \mathcal{O}(x)$, or $\frac{1}{1+u} = 1 - u + \mathcal{O}(u)$. Ainsi $f(x) = 1 - \left(\frac{x}{2} + \mathcal{O}(x)\right) + \mathcal{O}(x) = 1 - \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x)$. Ainsi, f est prolongeable par continuité sur \mathbb{R} , notons \tilde{f} ce prolongement. D'après ce qui précède, $\tilde{f}(0) = 1$ et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

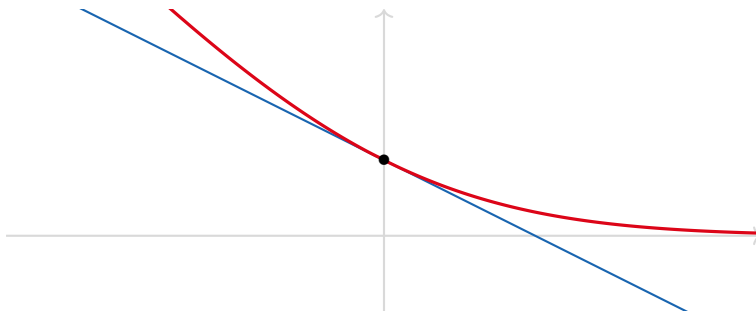


FIGURE 2 – La fonction $x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$ et sa tangente en 0.

Correction de l'exercice 12. 1. f est dérivable sur \mathbb{R} comme composée de fonctions dérivables et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$$

2. Trouvons un $DL_2(0)$ de f' .

$$\begin{aligned} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} &= \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^2)}{1 + 1 + 2x + 2x^2 + \mathcal{O}(x^2)} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^2)}{\underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^2)}_u} \\ &= \frac{1}{2} \times \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^2)\right) \times (1 - u + u^2 + \mathcal{O}(u^2)) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^2)\right) \times (1 - (x + x^2 + \mathcal{O}(x^2)) + (x^2 + \mathcal{O}(x^2)) + \mathcal{O}(x^2)) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^2)\right) \times (1 - x + \mathcal{O}(x^2)) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(1 + x^2\left(\frac{1}{2} - 1\right) + \mathcal{O}(x^2)\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4} + \mathcal{O}(x^2) \end{aligned}$$

Par intégration d'un développement limité⁴ :

$$\arctan(e^x) = \arctan(e^0) + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + \mathcal{O}(x^3) = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + \mathcal{O}(x^3)$$

4. Oubliez la constante et vous êtes foutus.

3. L'équation de la tangente en 0 est donc $y = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}$. De plus, $-\frac{x^3}{12}$ change de signe autour de 0, on reconnaît donc un point d'inflexion en 0. La courbe de f est en dessus de la tangente en 0^- et en dessous en 0^+ . Voir figure 3.

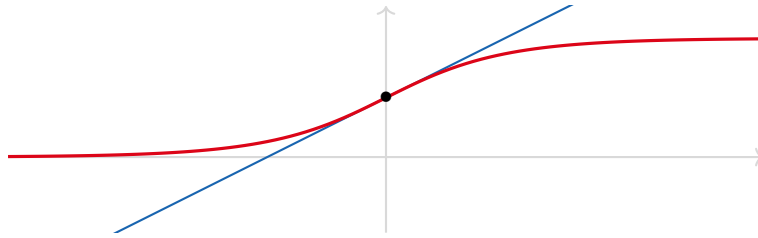


FIGURE 3 – La fonction $x \mapsto \arctan(e^x)$ et sa tangente en 0.

Correction de l'exercice 13. Corrigé sur Youtube : <https://youtu.be/Pak0dIAc5u8> Quand $x \rightarrow 0$, le terme dominant dans le \ln est 2, donc on factorise par 2 : $f(x) = \ln\left(2\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)\right) = \ln(2) + \ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$

On va effectuer un $DL_2(0)$ de f : posons $u = x + \frac{x^2}{2}$, alors $u^2 = x^2 + \mathcal{O}(x^2)$, ainsi $u^2 \sim x^2$ et $\mathcal{O}(u^2) = \mathcal{O}(x^2)$, alors $\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \mathcal{O}(u)$. Ainsi, $\ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) = x + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x^2)$. Ainsi, $f(x) = \ln(2) + x + \mathcal{O}(x^2)$. Donc $x \mapsto \ln(2) + x$ est la tangente de f en 0. Malheureusement le $\mathcal{O}(x^2)$ ne nous donne pas le signe de $f(x) - (\ln(2) + x)$. Il aurait donc fallu faire un développement limité à un ordre supérieure. On va donc effectuer

un $DL_3(0)$ ⁵ Posons $u = x + \frac{x^2}{2}$

- $u^2 = x^2 + x^3 + \mathcal{O}(x^3)$
- $u^3 = x^3 + \mathcal{O}(x^3)$
- Ainsi, $u^3 \sim x^3$ et donc $\mathcal{O}(u^3) = \mathcal{O}(x^3)$.

Effectuons donc un $DL_3(0)$ de $\ln(1 + u)$:

$$\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \mathcal{O}(u^3) = \left(x + \frac{x^2}{2}\right) - \frac{x^2 + x^3 + \mathcal{O}(x^3)}{2} + \frac{x^3 + \mathcal{O}(x^3)}{3} + \mathcal{O}(x^3) = x - \frac{1}{6}x^3 + \mathcal{O}(x^3)$$

Ainsi, $f(x) - (x + \ln(2)) \sim -1/6x^3$. Ainsi, dans un voisinage de 0, la fonction f est en dessus de sa tangente pour $x < 0$ et au dessus de sa tangente pour $x > 0$.

Correction de l'exercice 14. 1. Quand $x \rightarrow +\infty$, $u = \frac{1}{x} \rightarrow 0$, on peut donc effectuer un développement limité de e^u en 0 :

$$f(x) = (x + 1)e^{\frac{1}{x}} = (x + 1) \left[1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] = x + 2 + \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$$

On en déduit donc que $f(x) - (x + 2) \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{2x}$, en particulier $f(x) - (x + 2) \rightarrow 0$, donc $x \mapsto x + 2$ est une asymptote à f . De plus, $\frac{3}{2x} > 0$, donc $f(x) - (x + 2) > 0$ au voisinage de $+\infty$ ⁶. Donc f est au-dessus de son asymptote.

2. Pour $x > 0$, d'après l'exercice 8

$$\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

5. Du coup au propre, on partira directement d'un $DL_3(0)$ et non d'un $DL_2(0)$.

6. Rappelons que deux fonctions équivalentes au voisinage de a ont même signe au voisinage de a .

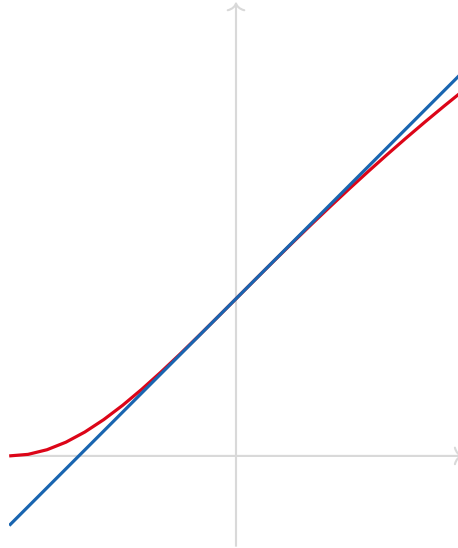


FIGURE 4 – La fonction $x \mapsto \ln(2 + x + x^2)$ au voisinage de 0 et sa tangente.

De plus, en simplifiant par x et en faisant un développement limité de $\frac{1}{1+u}$ avec $u = \frac{1}{x}$, on a :

$$\frac{x^2}{x+1} = \frac{x}{1+\frac{1}{x}} = x \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = x - 1 + \frac{1}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$$

En effectuant le produit des développements limités on a :

$$\frac{x^2}{x+1} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}x + \left(-\frac{\pi}{2} - 1\right) + \frac{\pi}{2x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ainsi $x \mapsto \frac{\pi}{2}x + \left(-\frac{\pi}{2} - 1\right)$ est une asymptote à f et f est au-dessus de son asymptote.

Correction de l'exercice 15.

Correction de l'exercice 16.

Correction de l'exercice 17. 1. $\ln(n+1) = \ln(n(1+1/n)) = \ln(n) + \ln(1+1/n)$. Ainsi, $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} =$

$$1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1. \text{ Ainsi, } \ln(n+1) \sim \ln(n).$$

2. En appliquant un $DL_3(0)$ de \sin avec $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Ainsi,

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\text{Ainsi, } \sin(1/n) - 1/n = -\frac{1}{3!n^3} + \mathcal{O}(1/n^3) \text{ D'où } \sin(1/n) - 1/n \sim -\frac{1}{6n^3}$$

3. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right)$ Or par un $DL_1(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+x}$, on obtient $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.

D'où $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 = \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$. Par conséquent $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{2n}$. Par produit d'équivalents : Ainsi,

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \sim \frac{\sqrt{n}}{2n} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

4. Remarquons que $u = e^{-n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Ainsi, on peut appliquer un développement limité de \exp en 0, à l'ordre 1. $\exp(u) = 1 + u + \mathcal{O}(u)$. D'où $\exp(e^{-n}) = 1 + e^{-n} + \mathcal{O}(e^{-n})$. Dès lors

$$\exp(\exp(e^{-n})) = \exp(1 + e^{-n} + \mathcal{O}(e^{-n})) = e \times \exp(e^{-n} + \mathcal{O}(e^{-n})) \quad (2)$$

On pose alors $v = e^{-n} + \mathcal{O}(e^{-n}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Et on applique le $DL_1(0)$ de \exp : $\exp(v) = 1 + v + \mathcal{O}(v)$. Remarquons que $v \sim e^{-n}$, donc $\mathcal{O}(v) = \mathcal{O}(e^{-n})$. D'où

$$\exp(e^{-n} + \mathcal{O}(e^{-n})) = 1 + (e^{-n} + \mathcal{O}(e^{-n})) + \mathcal{O}(e^{-n}) = 1 + e^{-n} + \mathcal{O}(e^{-n})$$

En revenant à (2), on obtient $\exp(\exp(e^{-n})) = e + e^{1-n} + \mathcal{O}(e^{-n})$. D'où $e^{e^{-n}} - e \sim e^{1-n}$.

5.

Correction de l'exercice 18. Corrigé sur Youtube : https://youtu.be/DjSVP9H_BEI

Correction de l'exercice 19.

Correction de l'exercice 20. 1. La fonction sinus est strictement croissante sur $]0; \pi/2[$ et continue donc réalise une bijection de $]0; \pi/2[$ vers $\left] \lim_{x \rightarrow 0} \sin(x); \lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin(x) \right[=]0; 1[\subset]0; \pi/2[$. Ainsi, $]0; \pi/2[$ est un intervalle stable par sinus. Comme $u_0 \in]0; \pi/2[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0; \pi/2[$.

2. Posons $f: x \mapsto x - \sin(x)$, alors f est dérivable sur $[0; \pi/2]$, et pour tout $x \in [0; \pi/2]$, $f'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0$. De plus, sur $[0; \pi/2]$, $f'(x) = 0$ ssi $x = 0$, ainsi f' ne s'annule qu'une seule fois. Ainsi, f est strictement croissante sur $[0; \pi/2]$. En particulier, pour $x \in]0; \pi/2[$, $f(x) > f(0) = 0$, donc $x > \sin(x)$. Ainsi, comme $u_n \in]0; \pi/2[$, $u_n > \sin(u_n) = u_{n+1}$. Ainsi, la suite $(u_n)_n$ est strictement décroissante⁷.

La suite $(u_n)_n$ étant minorée par 0 et décroissante, d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$. Comme $0 \leq u_n \leq \pi/2$ et que les inégalités larges sont conservées par passage à la limite, $0 \leq \ell \leq \pi/2$. De plus, comme $u_{n+1} = \sin(u_n)$ et que \sin est continue en ℓ , nécessairement par passage à la limite, $\ell = \sin(\ell)$. Or, pour $x \in]0; \pi/2[$, $\sin(x) < x$ donc $\sin(x) \neq x$. Par conséquent, $\ell = 0$. Ainsi, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, en effectuant un développement limité de \sin à l'ordre 3 :

$$\begin{aligned} u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha &= \sin(u_n)^\alpha - u_n^\alpha = \left(u_n - \frac{u_n^3}{6} + \mathcal{O}(u_n^3) \right)^\alpha - u_n^\alpha \\ &= \left(u_n \left(1 - \frac{u_n^2}{6} + \mathcal{O}(u_n^2) \right) \right)^\alpha - u_n^\alpha \\ &= u_n^\alpha \left(1 - \frac{u_n^2}{6} + \mathcal{O}(u_n^2) \right)^\alpha - u_n^\alpha \end{aligned}$$

On pose $v = -\frac{u_n^2}{6} + \mathcal{O}(u_n^2) \sim \frac{-u_n^2}{6}$. Alors, $\mathcal{O}(v) = \mathcal{O}(u_n^2)$. Ainsi, on effectue, le $DL_1(0)$ de $(1+v)^\alpha = 1 + \alpha v + \mathcal{O}(v)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha &= u_n^\alpha \left(1 - \alpha \frac{u_n^2}{6} + \mathcal{O}(u_n^2) \right) - u_n^\alpha \\ &= \frac{-\alpha}{6} u_n^{2+\alpha} + \mathcal{O}(u_n^{2+\alpha}) \end{aligned}$$

Prenons $\alpha = -2$, ainsi $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{3} + \mathcal{O}(1)$. Ainsi, $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{3}$.

7. Par un argument de convexité, on aurait pu affirmer que pour tout $x \in [0; \pi/2]$, $\sin(x) \leq x$ car \sin est concave sur cette intervalle donc en dessous de sa tangente en 0. Cependant, cela ne nous permet pas de montrer que 0 est le seul point fixe de \sin . De la notion de stricte convexité, on peut en déduire que $\sin(x) < x$ pour $x \in]0; \pi/2[$, mais la notion de stricte convexité n'est pas au programme.

4. On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_k = \frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}$, alors $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3}$. D'après le théorème de Cesàro, $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} v_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3}$. Donc $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} v_k \sim \frac{1}{3}$, puis $\sum_{k=0}^{n-1} v_k \sim \frac{n}{3}$. Par somme télescopique,

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \sim \frac{n}{3}$$

Or, comme $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $\frac{1}{u_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, ainsi, $\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \sim \frac{1}{u_n^2}$. Dès lors, $\frac{1}{u_n^2} \sim \frac{n}{3}$. Comme les équivalents passent à la puissance, il s'ensuit que $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.

Correction de l'exercice 21.

Correction de l'exercice 22.