Correction de l'exercice 1. a) $x^2 \mathrm{e}^x \underset{0}{=} x^2 \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^3)\right) \underset{0}{=} x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{6} + \mathcal{O}(x^5)$

b) $\frac{\sin(x) - x}{x^3} \underset{0}{=} \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \mathcal{O}(x^8) - x}{x^3} \underset{0}{=} -\frac{1}{6} + \frac{x^2}{120} - \frac{x^4}{5040} + \mathcal{O}(x^5)$

c) $\ln\left(\frac{1 + x^2}{1 - x}\right) \underset{0}{=} x + \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \mathcal{O}(x^5)$

d) $DL_3(0)$ de $x \mapsto \sqrt{\mathrm{ch}(\sin(x))}$. On pose $u = \sin(x)$, alors

- $u \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^3)$
- $u^2 \underset{0}{=} x^2 + \mathcal{O}(x^3)$
- $u^3 \underset{0}{=} x^3 + \mathcal{O}(x^3)$, donc $u^3 \underset{0}{\sim} x^3$, donc $\mathcal{O}(u^3) \underset{0}{=} \mathcal{O}(x^3)$

Ainsi, on effectue un $DL_3(0)$ de $\mathrm{ch}(u)$:

$$\mathrm{ch}(u) \underset{0}{=} 1 + \frac{u^2}{2} + 0u^3 + \mathcal{O}(u^3) = 1 + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3) + \mathcal{O}(x^3) = 1 + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)$$

On pose alors $v = \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^2)$, alors $v^2 = \mathcal{O}(x^3)$, ainsi, on effectue un développement limité de $\sqrt{1+v}$ en 0 à l'ordre 2 : $\sqrt{1+v} = 1 + \frac{1}{2}v - \frac{1}{8}v^2 + \mathcal{O}(v^2)$. Comme $v^2 = \mathcal{O}(x^3)$, on a $\mathcal{O}(v^2) = \mathcal{O}(x^3)$, ainsi

$$\sqrt{\mathrm{ch}(\sin(x))} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)\right) + \mathcal{O}(x^3) = 1 + \frac{x^2}{4} + \mathcal{O}(x^3)$$

e) $DL_6(0)$ de $x \mapsto (\cos(x))^3$: $(\cos(x))^3 \underset{0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^6)\right)^3$.

- On pose alors $u \underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^6)$
- $u^2 \underset{0}{=} \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} + \mathcal{O}(x^6)$
- $u^3 \underset{0}{=} -\frac{x^6}{8} + \mathcal{O}(x^6)$
- $u^3 \underset{0}{\sim} -\frac{x^6}{8}$, donc $\mathcal{O}(u^3) \underset{0}{=} \mathcal{O}(x)$

Ainsi, d'après le $DL_3(0)$ de $(1+u)^3$:

$$\begin{aligned} \cos^3(x) &\underset{0}{=} (1+u)^3 \underset{0}{=} 1 + 3u + 3u^2 + u^3 + \mathcal{O}(u^3) \\ &\underset{0}{=} 1 + 3\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^6)\right) + 3\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} + \mathcal{O}(x^6)\right) + \left(-\frac{x^6}{8} + \mathcal{O}(x^6)\right) + \mathcal{O}(x^6) \\ &\underset{0}{=} 1 - \frac{3x^2}{2} + \frac{7x^4}{8} - \frac{61x^6}{240} + \mathcal{O}(x^6) \end{aligned}$$

f) $DL_3(\frac{\pi}{4})$ de sin, proposons deux méthodes :

- On pose $h = x - \frac{\pi}{4} \xrightarrow[x \to \pi/4]{} 0$, alors :

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sin\left(h + \frac{\pi}{4}\right) = \sin(h)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos(h)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sin(h) + \cos(h)\right] \\ &\underset{h \to 0}{=} \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 + h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + \mathcal{O}(h^3)\right] \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\sin(x) \underset{x \to \frac{\pi}{4}}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \mathcal{O}\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right)$$

- Comme sin est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer la formule de Taylor-Young en $\pi/4$ à l'ordre 3 :

$$\sin(x) \underset{x\to\frac{\pi}{4}}{=} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sin'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sin''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\sin'''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 + \mathcal{O}\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right)$$

Comme $\sin' = \cos$, que $\sin'' = -\sin$ et que $\sin''' = -\cos$ que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ on en déduit que

$$\sin(x) \underset{x\to\frac{\pi}{4}}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 + \mathcal{O}\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right)$$

g) Comme on fait un DL en 1, on pose $h = x-1 \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$. Ainsi,

$$\mathrm{e}^{\sqrt{x}} = \mathrm{e}^{\sqrt{1+h}} \underset{h\to 0}{=} \mathrm{e}^{1+\frac{1}{2}h-\frac{1}{8}h^2+\mathcal{O}(h)} = \mathrm{e} \times \mathrm{e}^{\frac{1}{2}h-\frac{1}{8}h^2+\mathcal{O}(h^2)}$$

- Posons $u \underset{0}{=} \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \mathcal{O}(h^2)$
- $u^2 \underset{0}{=} \frac{1}{4}h^2 + \mathcal{O}(h^2)$
- $u^2 \underset{0}{\sim} \frac{1}{4}h^2$, ainsi $\mathcal{O}(u^2) = \mathcal{O}(h^2)$.

On effectue alors un $DL_2(0)$ de exponentielle :

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\frac{1}{2}h-\frac{1}{8}h^2+\mathcal{O}(h^2)} &\underset{h\to 0}{=} \mathrm{e}^{u} = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \mathcal{O}(u^2) = 1 + \left(\frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \mathcal{O}(h^2)\right) + \frac{\frac{1}{4}h^2 + \mathcal{O}(h^2)}{2} + \mathcal{O}(h^2) \\
&\underset{h\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}h + 0\times h^2 + \mathcal{O}(h^2)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathrm{e}^{\sqrt{x}} \underset{x\to 1}{=} \mathrm{e} + \frac{\mathrm{e}}{2}(x-1) + \mathcal{O}((x-1)^2)$$

h) $\ln(1+\sqrt{x}) \underset{0}{=} \ln(2) - \frac{1}{4}(x-1) - \frac{3}{32}(x-1)^2 + \mathcal{O}((x-1)^2)$

i) $\mathrm{e}^{\sqrt{1+x^2}} \underset{0}{=} e + \frac{ex^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)$

j) $DL_6(0)$ de $x \mapsto \sin(x)^4$:

$$(\sin(x))^4 \underset{0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4)\right)^4 \underset{0}{=} \left[x\left(1-\frac{x^2}{6}+\mathcal{O}(x^3)\right)\right]^4 \underset{0}{=} x^4\left(1-\frac{x^2}{6}+\mathcal{O}(x^3)\right)^4$$

On cherche à faire un $DL_2(0)$ de $\left(1-\frac{x^2}{6}+\mathcal{O}(x^3)\right)^4$. On pose $u \underset{0}{=} -\frac{x^2}{6} + \mathcal{O}(x^3)$, ainsi $u \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{6}$, donc $\mathcal{O}(u) \underset{0}{=} \mathcal{O}(x^2)$. Ainsi,

$$\sin(x)^4 \underset{0}{=} x^4(1+4u+\mathcal{O}(u)) \underset{0}{=} x^4\left(1+4\left(-\frac{x^2}{6}+\mathcal{O}(x^3)\right)+\mathcal{O}(x^2)\right) \underset{0}{=} x^4 - \frac{2x^6}{3} + \mathcal{O}(x^6)$$

k) $DL_3(0)$ de $x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{\frac{1}{x}} &\underset{0}{=} \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right) = \exp\left(\frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \mathcal{O}(x^4)\right)\right) \\
&\underset{0}{=} \exp\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \mathcal{O}(x^3)\right) \underset{0}{=} \mathrm{e} \times \exp\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \mathcal{O}(x^3)\right)
\end{aligned}$$

On pose $u = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \mathcal{O}(x^3) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Alors

- $u^2 = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^3)$
- $u^3 = -\dfrac{x^3}{8} + \mathcal{O}(x^3)$
- $\mathcal{O}(u^3) = \mathcal{O}(x^3)$

Ainsi, on effectue un $DL_3(0)$ de $u \mapsto \exp(u)$:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{\frac{1}{x}} &= \mathrm{e} \times \exp(u) = \mathrm{e}\left(1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \mathcal{O}(u^3)\right) \\
&= \mathrm{e}\left(1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \mathcal{O}(x^3)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^3)\right) + \frac{1}{6}\left(-\frac{x^3}{8} + \mathcal{O}(x^3)\right) + \mathcal{O}(x^3)\right) \\
&= e - \frac{ex}{2} + \frac{11ex^2}{24} - \frac{7ex^3}{16} + \mathcal{O}(x^3)
\end{aligned}$$

l) $\dfrac{1}{x} \underset{2}{=} \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}(x-2) + \dfrac{(x-2)^2}{8} - \dfrac{(x-2)^3}{16} + \mathcal{O}((x-2)^3)$

m) Posons $u = x + x^2$, alors :
- $u^2 = x^2 + 2x^3 + x^4$
- $u^3 = x^3 + 3x^4 + \mathcal{O}(x^4)$
- $u^4 = x^4 + \mathcal{O}(x^4)$
- Comme $u^4 \sim x^4$, $\mathcal{O}(u^4) = \mathcal{O}(x^4)$.

Ainsi, on effectue le $DL_4(0)$ de $\dfrac{1}{1+u}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x+x^2} &= \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + \mathcal{O}(u^4) \\
&= 1 - (x^2 + x^3) + (x^2 + 2x^3 + x^4) + (x^3 + 3x^4 + \mathcal{O}(x^4)) - (x^4 + \mathcal{O}(x^4)) + \mathcal{O}(x^4) \\
&= 1 - x + x^3 - x^4 + \mathcal{O}(x^4)
\end{aligned}$$

n) $\mathrm{e}^{\sin(x)} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{8} + \mathcal{O}(x^4)$

o) $\dfrac{\sin(x) - 1}{\cos(x) + 1} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \mathcal{O}(x^2)$

p) $\mathrm{e}^x \arctan(x) = x + x^2 + \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^4}{6} + \dfrac{3x^5}{40} + \mathcal{O}(x^5)$

q) $DL_3(0)$ de $x \mapsto \mathrm{ch}(x)^{\mathrm{sh}(x)}$. Tout d'abord ch est une fonction strictement positive.

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(x)^{\mathrm{sh}(x)} &= \exp(\mathrm{sh}(x)\ln(\mathrm{ch}(x))) \\
&= \exp\left(\left(x + \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^3)\right)\ln\left(1 + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)\right)\right)
\end{aligned}$$

En posant $u = \dfrac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)$, on a applique le développement limité de $\ln(1+u)$ à l'ordre 2 : $\ln(1+u) = u + -u^2 + \mathcal{O}(u^2)$. Comme $u \sim \dfrac{x^2}{2}$, $u^2 \sim \dfrac{x^4}{4}$ et donc $\mathcal{O}(u^2) = \mathcal{O}(x^4)$ Ainsi,

$$\ln\left(1 + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)\right) = \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3) + \mathcal{O}(x^4) = \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)$$

Ainsi, $\mathrm{sh}(x)\ln(\mathrm{ch}(x)) = \left(x - \dfrac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^3)\right)\left(\dfrac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)\right) = \dfrac{x^3}{2} + \mathcal{O}(x^3)$. Donc $\mathrm{ch}(x)^{\mathrm{sh}(x)} = \exp\left(\dfrac{x^3}{2} + \mathcal{O}(x^3)\right)$. En posant $v = \dfrac{x^3}{2} + \mathcal{O}(x^3)$, on a que $v \sim \dfrac{x^3}{2}$, donc $\mathcal{O}(v) = \mathcal{O}(x^3)$. Ainsi, on effectue le $DL_1(0)$ de $\exp(v)$: $\exp(v) = 1 + v + \mathcal{O}(v)$. Ainsi, $\mathrm{ch}(x)^{\mathrm{sh}(x)} \underset{0}{=} 1 + \left(\dfrac{x^3}{2} + \mathcal{O}(x^3)\right) + \mathcal{O}(x^3) = 1 + \dfrac{x^3}{2} + \mathcal{O}(x^3)$.

r) $\dfrac{\ln(x)}{x} \underset{3}{=} \dfrac{\ln(3)}{3} + \dfrac{1-\ln(3)}{9} \times (x-3) + \left(-\dfrac{1}{18} + \dfrac{\ln(3)}{27}\right) \times (x-3)^2 + \mathcal{O}((x-3)^2)$

s) $(1+\sin(x))^{\frac{1}{x}} \underset{0}{=} e - \dfrac{ex}{2} + \dfrac{7ex^2}{24} - \dfrac{3ex^3}{16} + \mathcal{O}(x^3)$

t) $\dfrac{1}{\cos(x)} = \dfrac{1}{1-\dfrac{x^2}{2}+\mathcal{O}(x^2)}$, on pose $u = -\dfrac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^2) \sim \dfrac{-x^2}{2}$, alors $\mathcal{O}(u) = \mathcal{O}(x^2)$, ainsi, Dès lors,

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1+u} \underset{0}{=} 1 - u + \mathcal{O}(u) \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^2)$$

en multipliant par x, on obtient : $\dfrac{x}{\cos(x)} \underset{0}{=} x + \dfrac{x^3}{2} + \mathcal{O}(x^3)$

u) On pose $u = \sin(x)$, alors :

- $u \underset{0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^3)$
- $u^2 \underset{0}{=} x^2 + \mathcal{O}(x^3)$
- $u^3 \underset{0}{=} x^3 + \mathcal{O}(x^3)$
- Comme $u^3 \underset{0}{\sim} x^3$, $\mathcal{O}(u^3) \underset{0}{=} \mathcal{O}(x^3)$.

Ainsi, on effectue un $DL_3(0)$ de $(1+u)^{1/2}$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+\sin(x)} = (1+u)^{1/2} &\underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 + \mathcal{O}(u^3)\\
&\underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^3)\right) - \frac{1}{8}\left(x^2 + \mathcal{O}(x^3)\right) + \frac{1}{16}\left(x^3 + \mathcal{O}(x^3)\right) + \mathcal{O}(x^3)\\
&\underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + \mathcal{O}(x^3)
\end{aligned}$$

v) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1+x}} \underset{0}{=} 1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{3x^2}{8} - \dfrac{x^3}{48} + \mathcal{O}(x^3)$

w) $\ln(1+\sin(x)) \underset{0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^3)$

x) $(\sqrt{1+x})^x \underset{0}{=} 1 + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{4} + \mathcal{O}(x^3)$

y) $\dfrac{x^2}{\ln(1+x^2)} \underset{0}{=} 1 + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} + \mathcal{O}(x^4)$

z) $\dfrac{\tan(x)-x}{1+x} \underset{0}{=} \dfrac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^3)$

Correction de l'exercice 2. On remarque que $f \in \mathscr{C}^5(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de plus, $f'(x) = e^{x^2}(1+2x^2) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, f est strictement croissante et continue. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Dès lors, d'après le théorème de la bijection monotone, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. De plus, f est $\mathscr{C}^5$ et f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de cours sur les bijections de classe $\mathscr{C}^k$, f^{-1} est aussi de classe $\mathscr{C}^5$ sur $\mathbb{R}$. D'après la formule de Taylor-Young, f^{-1} admet donc un $DL_5(0)$. Ainsi, $f^{-1}(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\mathcal{O}(x^5)$. Où $(a_0, a_1, \ldots, a_5)$ sont à déterminer. Remarquons que f est impaire donc f^{-1} aussi[1]. D'où $a_0 = a_2 = a_4 = 0$. De plus, $a_1 = (f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \dfrac{1}{f'(0)} = 1$. Dès lors $f^{-1}(x) = x + a_3x^3 + a_5x^5 + \mathcal{O}(x^5)$. De plus, pour

1. En effet, soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $a = f^{-1}(x)$ et $b = -f^{-1}(-x)$, alors $f(a) = x$ et comme f est impaire $f(b) = f(-f^{-1}(-x)) = -f(f^{-1}(-x)) = -(-x) = x$. Donc $f(a) = f(b)$. Comme f est injective, $a = b$ donc $f^{-1}(x) = -f^{-1}(-x)$, f^{-1} est bien impaire.

tout $x \in \mathbb{R}$, $f \circ f^{-1}(x) = x$. Le but est alors de calculer un $DL_5(0)$ de $f \circ f^{-1}$ par composition de développements limités :

$$\begin{aligned}
x &= f(f^{-1}(x)) \\
&= f^{-1}(x) \exp\left(f^{-1}(x))^2\right) \\
&= \left(x + a_3x^3 + a_5x^5 + \mathcal{O}(x^5)\right) \exp\left(\left(x + a_3x^3 + a_5x^5 + \mathcal{O}(x^5)\right)^2\right) \qquad (1)
\end{aligned}$$

Comme $x + a_3x^3 + a_5x^5 + \mathcal{O}(x^5)$ commence par x, on va effectuer un $DL_4(0)$ de exp. Posons $u = x + a_3x^3 + a_5x^5 + \mathcal{O}(x^5) = x + a_3x^3 + \mathcal{O}(x^4)$. Alors $u^2 = x^2 + 2a_3x^4 + \mathcal{O}(x^4)$. Posons $v = x^2 + 2a_3x^4 + \mathcal{O}(x^4)$, alors $v^2 = x^4 + \mathcal{O}(x^4)$, $v^2 \sim x^4$, alors $\mathcal{O}(v^2) = \mathcal{O}(x^4)$. Ainsi,

$$\exp(x^2 + 2a_3x^4 + \mathcal{O}(x^4)) = \exp(v) = 1 + v + \frac{v^2}{2} + \mathcal{O}(v^2) = 1 + x^2 + \left(2a_3 + \frac{1}{2}\right) x^4 + \mathcal{O}(x^4)$$

En revenant à (1), on obtient

$$\begin{aligned}
x &= \left(x + a_3x^3 + a_5x^5 + \mathcal{O}(x^5)\right) \left(1 + x^2 + (2a_3 + \frac{1}{2})x^4 + \mathcal{O}(x^4)\right) \\
&= x + x^3 (a_3 + 1) + x^5 \left(a_5 + a_3 + (2a_3 + \frac{1}{2})\right) x^5 + \mathcal{O}(x^5)
\end{aligned}$$

Par unicité, d'un DL, on trouve que $a_3 + 1 = 0$ et $a_5 + a_3 + (2a_3 + \frac{1}{2}) = 0$. En résolvant ce système, on trouve $a_3 = -1$ et $a_5 = \frac{5}{2}$. Ainsi, $f^{-1}(x) = x - x^3 + \frac{5}{2}x^5 + \mathcal{O}(x^5)$. D'après la formule de Taylor-Young,

$$f^{-1}(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{5} \frac{(f^{-1})^{(k)}(0)}{k!} x^k + \mathcal{O}(x^5)$$

Par unicité des coefficients d'un développement limité en 0, on obtient

- $(f^{-1})^{(0)}(0) = 0$
- $(f^{-1})^{(1)}(0) = 1$
- $(f^{-1})^{(2)}(0) = 0$
- $(f^{-1})^{(3)}(0) = 3!a_3 = -6$
- $(f^{-1})^{(4)}(0) = 0.$
- $(f^{-1})^{(5)}(0) = 5!a_5 = 5! \times \frac{5}{2} = 300.$

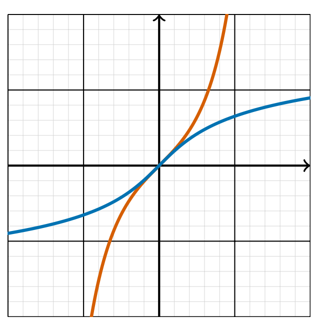

FIGURE 1 – En rouge la courbe de f, en bleu, la courbe de f^{-1}.

Correction de l'exercice 3.

Correction de l'exercice 4. D'après le $DL_n(0)$ usuel de $x \mapsto (1+x)^\alpha$, avec $\alpha = -1/2$, On obtient $(1+x)^{-1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x^k + \mathcal{O}(x^n)$. Pour $k \in [\![1\,;n]\!]$, on a

$$\alpha_k = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}\left(-\frac{1}{2}-i\right)}{k!} = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} -\frac{1+2i}{2}}{k!} = \frac{(-1)^k \prod_{i=0}^{k-1}(1+2i)}{2^k k!} = \frac{(-1)^k \prod_{i=0}^{k-1}(1+2i)\prod_{i=1}^{k}(2i)}{2^k k! \prod_{i=1}^{k}(2i)} = \frac{(-1)^k (2k)!}{2^k k! 2^k \prod_{i=1}^{k} i} = \frac{(-1)^k\binom{2k}{k}}{4^k}$$

On remarque que pour $k = 0$, $\frac{(-1)^k\binom{2k}{k}}{4^k} = 1$. Ainsi, on a prouvé que

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{4^k}\binom{2k}{k} x^k + \mathcal{O}(x^n)$$

En remplaçant x par $-x^2$, on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^{2k} + \mathcal{O}(x^{2n})$$

Appliquons maintenant le théorème d'intégration d'un développement limité, on obtient donc [2]

$$\arcsin(x) \underset{0}{=} \arcsin(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \mathcal{O}(x^{2n+1}) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \mathcal{O}(x^{2n+1})$$

Correction de l'exercice 5.

Correction de l'exercice 6.

1.
2.
3.
4. On pose $u = \sin(x)$. Calculons les puissances de u :
   - $u \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^5)$
   - $u^2 \underset{0}{=} x^2 - \frac{x^4}{3} + \mathcal{O}(x^5)$
   - $u^3 \underset{0}{=} x^3 - \frac{x^5}{2} + \mathcal{O}(x^5)$
   - $u^4 \underset{0}{=} x^4 + \mathcal{O}(x^5)$
   - $u^5 \underset{0}{=} x^5 + \mathcal{O}(x^5)$
   - Ainsi, $u^5 \underset{0}{\sim} x^5$, ainsi $\mathcal{O}(u^5) \underset{0}{=} \mathcal{O}(x^5)$

   On applique donc un développement limité de $\operatorname{sh}(u)$ à l'ordre 5 :

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}(\sin(x)) = \operatorname{sh}(u) &\underset{0}{=} u + \frac{u^3}{6} + \frac{u^5}{120} + \mathcal{O}(u^5)\\ &\underset{0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^5)\right) + \frac{x^3 - \frac{x^5}{2} + \mathcal{O}(x^5)}{6} + \frac{x^5 + \mathcal{O}(x^5)}{120} + \mathcal{O}(x^5) \underset{0}{=} x - \frac{x^5}{15} + \mathcal{O}(x^5)\end{aligned}$$

   Ainsi, $\operatorname{sh}(\sin(x)) - x \underset{0}{=} -\frac{x^5}{15} + \mathcal{O}(x^5)$, dès lors $\operatorname{sh}(\sin(x)) \underset{0}{\sim} -\frac{x^5}{15}$.

2. On obtient un développement limité dont tous les coefficients d'indices pairs sont nuls, c'est normal, arcsin est impaire.

Correction de l'exercice 7. 1. Si $a=0$, alors $\lim_{x\to+\infty} x^a = 1$, si $a>0$, alors $\lim_{x\to+\infty} x^a = +\infty$, si $a<0$ alors $\lim_{x\to+\infty} x^a = -\infty$[3].

2. Distinguons plusieurs cas :
   - Si $b=0$, alors $\dfrac{x^a}{x^b+1} = \dfrac{x^a}{2}$, donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^a}{2}$.
   - Si $b>0$, alors $x^b+1 \underset{+\infty}{\sim} x^b$ (passer par le quotient pour le vérifier). Alors par quotient d'équivalents, $\dfrac{x^a}{x^b+1} \sim \dfrac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$. Ainsi, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x^{a-b}$.
   - Si $b<0$, alors $x^b+1 \sim 1$, donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x^a$.

Correction de l'exercice 8. Pour $x>0$ en connaissant le développement limité de $\arctan(u)$ quand $u = \dfrac{1}{x} \to 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\arctan(x) &\underset{+\infty}{=} \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^3}\right)
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 9. Tout d'abord

$$\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^{x\ln x} = \exp\left(x\ln x \ln\left[\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right]\right)$$

Effectuons un développement asymptotique quand x tend vers $+\infty$:

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln x} = \frac{\ln\left(x\left(1+1/x\right)\right)}{\ln(x)} = \frac{\ln x + \ln(1+\underbrace{1/x}_{u})}{\ln x}$$

Or $u \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $\ln(1+u) \underset{0}{=} u + \mathcal{O}(u)$ donc

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln x} = 1 + \frac{\frac{1}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = 1 + \underbrace{\frac{1}{x\ln x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x\ln x}\right)}_{v}$$

Or $v \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $\ln(1+v) \underset{0}{=} v + \mathcal{O}(v)$, comme $v \sim \dfrac{1}{x\ln(x)}$, on a $\mathcal{O}(v) = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{x\ln(x)}\right)$. Dès lors :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right) &= \ln(1+v) = v + \mathcal{O}(v) = \frac{1}{x\ln x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x\ln x}\right) \\
\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^{x\ln x} &= \exp\left(x\ln x\ln\left[\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right]\right) = \exp(1+\mathcal{O}(1))
\end{aligned}$$

Ainsi, $\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^{x\ln x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}$.

Correction de l'exercice 10.

3. Rappelons qu'en cas de doute il suffit d'écrire $x^a = \mathrm{e}^{a\ln(x)}$ et de composer les limites.

Correction de l'exercice 11. Notons $f\colon x \mapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$. Tout d'abord f est définie et $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ (quotients de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas). Effectuons un développement limité à l'ordre 1 de f :

$$f(x) = \frac{x}{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^2)\right) - 1} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x)}$$

Posons $u = \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x)$, alors $\mathcal{O}(u) = \mathcal{O}(x)$, or $\frac{1}{1+u} = 1 - u + \mathcal{O}(u)$. Ainsi $f(x) = 1 - (\frac{x}{2} + \mathcal{O}(x)) + \mathcal{O}(x) = 1 - \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x)$. Ainsi, f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$, notons $\tilde{f}$ ce prolongement. D'après ce qui précède, $\tilde{f}(0) = 1$ et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

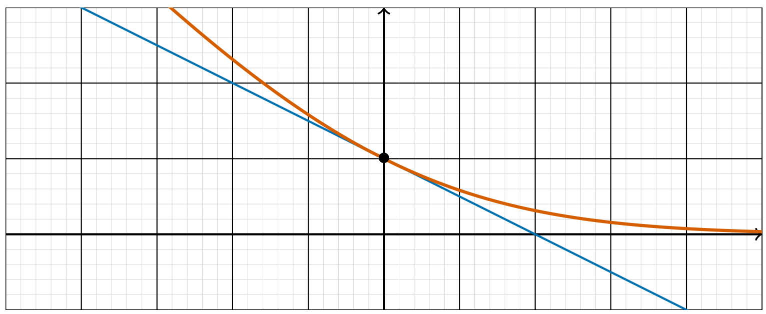

FIGURE 2 – La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ et sa tangente en 0.

Correction de l'exercice 12.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables et

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^{2x}}$$

2. Trouvons un $DL_2(0)$ de f'.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^{2x}} &= \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^2)}{1 + 1 + 2x + 2x^2 + \mathcal{O}(x^2)} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^2)}{1 + \underbrace{x + x^2 + \mathcal{O}(x^2)}_{u}} \\
&= \frac{1}{2} \times \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^2)\right) \times \left(1 - u + u^2 + \mathcal{O}(u^2)\right) \\
&= \frac{1}{2} \times \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^2)\right) \times \left(1 - (x + x^2 + \mathcal{O}(x^2)) + (x^2 + \mathcal{O}(x^2)) + \mathcal{O}(x^2)\right) \\
&= \frac{1}{2} \times \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^2)\right) \times \left(1 - x + \mathcal{O}(x^2)\right) \\
&= \frac{1}{2} \times \left(1 + x^2(\frac{1}{2} - 1) + \mathcal{O}(x^2)\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4} + \mathcal{O}(x^2)
\end{aligned}$$

Par intégration d'un développement limité[4] :

$$\arctan(\mathrm{e}^x) = \arctan(\mathrm{e}^0) + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + \mathcal{O}(x^3) = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + \mathcal{O}(x^3)$$

4. Oubliez la constante et vous êtes foutus.

3. L'équation de la tangente en 0 est donc $y = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}$. De plus, $-\dfrac{x^3}{12}$ change de signe autour de 0, on reconnaît donc un point d'inflexion en 0. La courbe de f est en dessus de la tangente en 0^- et en dessous en 0^+. Voir figure 3.

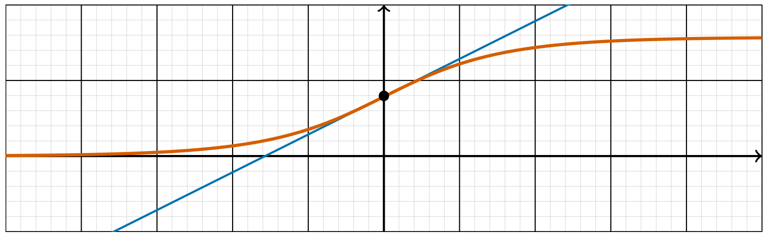

FIGURE 3 – La fonction $x \mapsto \arctan(e^x)$ et sa tangente en 0.

Correction de l'exercice 13. Corrigé sur Youtube : https://youtu.be/PakOdIAc5u8 Quand $x \to 0$, le terme dominant dans le ln est 2, donc on factorise par 2 : $f(x) = \ln\left(2\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right)\right) = \ln(2) + \ln\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right)$ On va effectuer un $DL_2(0)$ de f : posons $u = x + \dfrac{x^2}{2}$, alors $u^2 = x^2 + \mathcal{O}(x^2)$, ainsi $u^2 \sim x^2$ et $\mathcal{O}(u^2) = \mathcal{O}(x^2)$, alors $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + \mathcal{O}(u)$. Ainsi, $\ln(1 + x + \dfrac{x}{2}) = x + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{2} + \mathcal{O}(x^2)$. Ainsi, $f(x) = \ln(2) + x + \mathcal{O}(x^2)$. Donc $x \mapsto \ln(2) + x$ est la tangente de f en 0. Malheureusement le $\mathcal{O}(x^2)$ ne nous donne pas le signe de $f(x) - (\ln(2) + x)$. Il aurait donc fallu faire un développement limité à un ordre supérieure. On va donc effectuer un $DL_3(0)$ [5] Posons $u = x + \dfrac{x^2}{2}$

- $u^2 = x^2 + x^3 + \mathcal{O}(x^3)$
- $u^3 = x^3 + \mathcal{O}(x^3)$
- Ainsi, $u^3 \sim x^3$ et donc $\mathcal{O}(u^3) = \mathcal{O}(x^3)$.

Effectuons donc un $DL_3(0)$ de $\ln(1+u)$:

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \mathcal{O}(u^3) = \left(x + \frac{x^2}{2}\right) - \frac{x^2 + x^3 + \mathcal{O}(x^3)}{2} + \frac{x^3 + \mathcal{O}(x^3)}{3} + \mathcal{O}(x^3) = x - \frac{1}{6}x^3 + \mathcal{O}(x^3)$$

Ainsi, $f(x) - (x + \ln(2)) \sim -1/6x^3$. Ainsi, dans un voisinage de 0, la fonction f est en dessus de sa tangente pour $x < 0$ et au dessus de sa tangente pour $x > 0$.

Correction de l'exercice 14. 1. Quand $x \to +\infty$, $u = \dfrac{1}{x} \to 0$, on peut donc effectuer un développement limité de e^u en 0 :

$$f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x}} = (x+1)\left[1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] = x + 2 + \frac{1}{x}(1 + \frac{1}{2}) + \mathcal{O}(\frac{1}{x})$$

On en déduit donc que $f(x) - (x+2) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{3}{2x}$, en particulier $f(x) - (x+2) \to 0$, donc $x \mapsto x + 2$ est une asymptote à f. De plus, $\dfrac{3}{2x} > 0$, donc $f(x) - (x+2) > 0$ au voisinage de $+\infty$ [6]. Donc f est au-dessus de son asymptote.

2. Pour $x > 0$, d'après l'exercice 8

$$\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

5. Du coup au propre, on partira directement d'un $DL_3(0)$ et non d'un $DL_2(0)$.
6. Rappelons que deux fonctions équivalentes au voisinage de a ont même signe au voisinage de a.

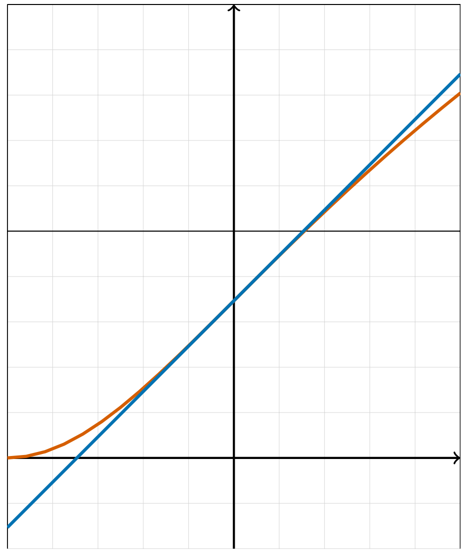

Figure 4 – La fonction $x \mapsto \ln(2+x+x^2)$ au voisinage de 0 et sa tangente.

De plus, en simplifiant par x et en faisant un développement limité de $\dfrac{1}{1+u}$ avec $u = \dfrac{1}{x}$, on a :

$$\frac{x^2}{x+1} = \frac{x}{1+\dfrac{1}{x}} = x\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x - 1 + \frac{1}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$$

En effectuant le produit des développements limités on a :

$$\frac{x^2}{x+1}\arctan(x) = \frac{\pi}{2}x + \left(-\frac{\pi}{2} - 1\right) + \frac{\pi}{2x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ainsi $x \mapsto \dfrac{\pi}{2}x + \left(-\dfrac{\pi}{2} - 1\right)$ est une asymptote à f et f est au-dessus de son asymptote.

Correction de l'exercice 15.

Correction de l'exercice 16.

Correction de l'exercice 17.

1. $\ln(n+1) = \ln(n(1+1/n)) = \ln(n) + \ln(1+1/n)$. Ainsi, $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \dfrac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Ainsi, $\ln(n+1) \sim \ln(n)$.
2. En appliquant un $DL_3(0)$ de sin avec $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi,

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Ainsi, $\sin(1/n) - 1/n = -\dfrac{1}{3!n^3} + \mathcal{O}(1/n^3)$ D'où $\sin(1/n) - 1/n \sim -\dfrac{1}{6n^3}$

3. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} - 1\right)$ Or par un $DL_1(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+x}$, on obtient $\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} = 1 + \dfrac{1}{2n} + \mathcal{O}(\dfrac{1}{n})$. D'où $\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} - 1 = \dfrac{1}{2n} + \mathcal{O}(\dfrac{1}{n})$. Par conséquent $\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} - 1 \sim \dfrac{1}{2n}$. Par produit d'équivalents : Ainsi, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \sim \dfrac{\sqrt{n}}{2n} \sim \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

4. Remarquons que $u = \mathrm{e}^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi, on peut appliquer un développement limité de exp en 0, à l'ordre 1. $\exp(u) = 1 + u + o(u)$. D'où $\exp(\mathrm{e}^{-n}) = 1 + \mathrm{e}^{-n} + o(\mathrm{e}^{-n})$. Dès lors

$$\exp(\exp(\mathrm{e}^{-n})) = \exp(1 + \mathrm{e}^{-n} + o(\mathrm{e}^{-n})) = \mathrm{e} \times \exp\left(\mathrm{e}^{-n} + o(\mathrm{e}^{-n})\right) \tag{2}$$

On pose alors $v = \mathrm{e}^{-n} + o(\mathrm{e}^{-n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Et on applique le $DL_1(0)$ de exp : $\exp(v) = 1 + v + o(v)$. Remarquons que $v \sim \mathrm{e}^{-n}$, donc $o(v) = o(\mathrm{e}^{-n})$. D'où

$$\exp\left(\mathrm{e}^{-n} + o(\mathrm{e}^{-n})\right) = 1 + \left(\mathrm{e}^{-n} + o(\mathrm{e}^{-n})\right) + o(\mathrm{e}^{-n}) = 1 + \mathrm{e}^{-n} + o(\mathrm{e}^{-n})$$

En revenant à (2), on obtient $\exp(\exp(\mathrm{e}^{-n})) = e + \mathrm{e}^{1-n} + o(\mathrm{e}^{-n})$. D'où $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-n}}} - e \sim \mathrm{e}^{1-n}$.

5.

Correction de l'exercice 18. Corrigé sur Youtube : https://youtu.be/DjSVP9H_BEI

Correction de l'exercice 19.

Correction de l'exercice 20.

1. La fonction sinus est strictement croissante sur $]\,0\,;\pi/2\,[$ et continue donc réalise une bijection de $]\,0\,;\pi/2\,[$ vers $\left]\lim\limits_{x\to 0}\sin(x)\,;\lim\limits_{x\to\pi/2}\sin(x)\right[=]\,0\,;1\,[\subset]\,0\,;\pi/2\,[$. Ainsi, $]\,0\,;\pi/2\,[$ est un intervalle stable par sinus. Comme $u_0 \in]\,0\,;\pi/2\,[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]\,0\,;\pi/2\,[$.
2. Posons $f\colon x \mapsto x - \sin(x)$, alors f est dérivable sur $[\,0\,;\pi/2\,]$, et pour tout $x \in [\,0\,;\pi/2\,]$, $f'(x) = 1 - \cos(x) \geqslant 0$. De plus, sur $[\,0\,;\pi/2\,]$, $f'(x) = 0$ ssi $x = 0$, ainsi f' ne s'annule qu'une seule fois. Ainsi, f est strictement croissante sur $[\,0\,;\pi/2\,]$. En particulier, pour $x \in]\,0\,;\pi/2\,[$, $f(x) > f(0) = 0$, donc $x > \sin(x)$. Ainsi, comme $u_n \in]\,0\,;\pi/2\,[$, $u_n > \sin(u_n) = u_{n+1}$. Ainsi, la suite $(u_n)_n$ est strictement décroissante [7].
   La suite $(u_n)_n$ étant minorée par 0 et décroissante, d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$. Comme $0 \leqslant u_n \leqslant \pi/2$ et que les inégalités larges sont conservées par passage à la limite, $0 \leqslant \ell \leqslant \pi/2$. De plus, comme $u_{n+1} = \sin(u_n)$ et que sin est continue en ℓ, nécessairement par passage à la limite, $\ell = \sin(\ell)$. Or, pour $x \in]\,0\,;\pi/2\,[$, $\sin(x) > x$ donc $\sin(x) \neq x$. Par conséquent, $\ell = 0$. Ainsi, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, en effectuant un développement limité de sin à l'ordre 3 :

$$\begin{aligned}
{u_{n+1}}^{\alpha} - {u_n}^{\alpha} &= \sin(u_n)^{\alpha} - {u_n}^{\alpha} = \left(u_n - \frac{{u_n}^3}{6} + o({u_n}^3)\right)^{\alpha} - {u_n}^{\alpha} \\
&= \left(u_n\left(1 - \frac{{u_n}^2}{6} + o({u_n}^2)\right)\right)^{\alpha} - {u_n}^{\alpha} \\
&= {u_n}^{\alpha}\left(1 - \frac{{u_n}^2}{6} + o({u_n}^2)\right)^{\alpha} - {u_n}^{\alpha}
\end{aligned}$$

   On pose $v = -\frac{{u_n}^2}{6} + o({u_n}^2) \sim \frac{-{u_n}^2}{6}$ Alors, $o(v) = o({u_n}^2)$. Ainsi, on effectue, le $DL_1(0)$ de $(1+v)^{\alpha} = 1 + \alpha v + o(v)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
{u_{n+1}}^{\alpha} - {u_n}^{\alpha} &= {u_n}^{\alpha}\left(1 - \alpha\frac{{u_n}^2}{6} + o({u_n}^2)\right) - {u_n}^{\alpha} \\
&= \frac{-\alpha}{6}{u_n}^{2+\alpha} + o({u_n}^{2+\alpha})
\end{aligned}$$

   Prenons $\alpha = -2$, ainsi $\frac{1}{{u_{n+1}}^2} - \frac{1}{{u_n}^2} = \frac{1}{3} + o(1)$. Ainsi, $\frac{1}{{u_{n+1}}^2} - \frac{1}{{u_n}^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3}$.

7. Par un argument de convexité, on aurait pu affirmer que pour tout $x \in [\,0\,;\pi/2]$, $\sin(x) \leqslant x$ car sin est concave sur cette intervalle donc en dessous de sa tangente en 0. Cependant, cela ne nous permet pas de montrer que 0 est le seul point fixe de sin. De la notion de stricte convexité, on peut en déduire que $\sin(x) < x$ pour $x \in]\,0\,;\pi/2\,[$, mais la notion de stricte convexité n'est pas au programme.

4. On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_k = \dfrac{1}{{u_{k+1}}^2} - \dfrac{1}{{u_k}^2}$, alors $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{3}$. D'après le théorème de Cesàro, $\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{3}$. Donc $\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k \sim \dfrac{1}{3}$, puis $\sum_{k=0}^{n-1} v_k \sim \dfrac{n}{3}$. Par somme télescopique,

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{1}{{u_n}^2} - \frac{1}{{u_0}^2} \sim \frac{n}{3}$$

Or, comme $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\dfrac{1}{{u_n}^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, ainsi, $\dfrac{1}{{u_n}^2} - \dfrac{1}{{u_0}^2} \sim \dfrac{1}{{u_n}^2}$. Dès lors, $\dfrac{1}{{u_n}^2} \sim \dfrac{n}{3}$. Comme les équivalents passent à la puissance, il s'ensuit que $u_n \sim \sqrt{\dfrac{3}{n}}$.

Correction de l'exercice 21.

Correction de l'exercice 22.