Correction de l'exercice 1. Corrigé sur Youtube : https://youtu.be/aOVugXO7Gpk

Correction de l'exercice 2.

1. La famille (u, v) est libre (deux vecteurs non colinéaires). Cette famille a deux vecteurs et $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2, donc (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Comme une application linéaire est entièrement caractérisée par l'image des vecteurs d'une base, on sait qu'il existe une unique application linéaire $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tel que $f(u) = (2, 1)$, $f(v) = (1, -1)$. S'il existe une application qui correspond aux exigences de la question forcément c'est ce f-là. Donc tout ce qui nous reste à faire, c'est savoir si f convient. Remarquons que $w = 3u - v$, donc
$$f(w) = 3f(u) - f(v) = 3(2, 1) - (1, -1) = (5, 4)$$
Ainsi, si $a = 4$, il existe bien une application f, sinon il n'en existe pas.

Correction de l'exercice 3.

1. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x', y') \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} f\big(\lambda(x, y) + (x', y')\big) &= f\big((\lambda x + x', \lambda y + y')\big) \\ &= \big(\lambda x + x' + 2(\lambda y + y'), \lambda x + x' - (\lambda y + y')\big) \\ &= \big(\lambda x + x' + 2\lambda y + 2y', \lambda x + x' - \lambda y - y'\big) \\ &= \lambda(x + 2y, x - y) + (x' + 2y', x' - y') \\ &= \lambda f(x, y) + f(x', y') \end{aligned}$$
Donc f est un endomorphsime de $\mathbb{R}^2$.
2. $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$, ainsi $f(e_1) = (1, 1)$ et $f(e_2) = (2, -1)$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, supposons $a(1, 1) + b(2, -1) = (0, 0)$, alors $(a + 2b, a - b) = (0, 0)$, donc $a + 2b = 0$ et $a - b = 0$, par différence $3b = 0$. Donc $b = 0$, puis $a = b = 0$, ainsi $(f(e_1), f(e_2))$ est libre.
3. On a $\mathrm{vect}(f(e_1), f(e_2)) \subset \mathrm{Im}(f)$ (car $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$). De plus, $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$, donc
$$\mathrm{vect}(f(e_1), f(e_2)) \subset \mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$$
Comme la famille $(f(e_1), f(e_2))$ est libre, $\dim(\mathrm{vect}(f(e_1), f(e_2))) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$, ainsi $\mathrm{vect}(f(e_1), f(e_2)) = \mathbb{R}^2$, ainsi
$$\mathrm{vect}(f(e_1), f(e_2)) \subset \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{vect}(f(e_1), f(e_2))$$
Dès lors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(f(e_1), f(e_2))$. Comme $(f(e_1), f(e_2))$ est libre, on en déduit que $(f(e_1), f(e_2))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Correction de l'exercice 4.

1. Soit $(M, M') \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors, par distributivité,
$$f_d(M + \lambda M') = A(M + \lambda M') = AM + \lambda AM' = f_d(M) + \lambda f_d(M')$$
De même
$$f_g(M + \lambda M') = (M + \lambda M')A = MA + \lambda M'A = f_g(M) + \lambda f_g(M')$$
Donc f_g et f_d sont bien des endomorphismes de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors :
$$\begin{aligned} M \in \mathrm{Ker}(f_d) &\iff f_d(M) = 0 \iff AM = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ a + c & b + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff a + c = b + d = 0 \iff c = -a \quad \text{et} \quad d = -b \\ &\iff M = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix} \iff M = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\iff M \in \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

On a donc prouvé que $\mathrm{Ker}(f_d) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right)$. De la même façon, on peut prouver que $\mathrm{Ker}(f_g) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right)$

3. Calculons $\mathrm{Im}(f_g)$, d'après le cours, on sait que $\mathrm{Im}(f_g) = \mathrm{vect}(f_g(E_{1,1}), f_g(E_{1,2}), f_g(E_{2,1}), f_g(E_{2,2}))$. En effet, on sait, d'après le cours, que $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2\\ 1\leqslant j\leqslant 2}}$ est la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Donc :

$$\mathrm{Im}(f_g) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right)$$

De même, on trouve que

$$\mathrm{Im}(f_d) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

Correction de l'exercice 5. 1. Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors par somme de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$, $f''-2f+f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $(f, g) \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda f + g) &= (\lambda f + g)'' - 2(\lambda f + g)' + \lambda f + g\\ &= \lambda f'' + g'' - 2\lambda f' - 2g + \lambda f + g\\ &= \lambda(f'' - 2f' + f) + (g'' - 2g' + g)\\ &= \lambda\Phi(f) + \Phi(g)\end{aligned}$$

Ainsi, Φ est linéaire, $\Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$.

2. Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$f \in \mathrm{Ker}(\Phi) \iff \Phi(f) = 0 \iff f'' - 2f' + f = 0$$

On reconnaît une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constant. Or son équation caractéristique est $(r^2 - 2r + 1) = (r-1)^2 = 0$. Ainsi, $r = 1$. Donc

$$f \in \mathrm{Ker}(\Phi) \iff \exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = C_1 \underbrace{\mathrm{e}^x}_{f_1(x)} + C_2 \underbrace{x\mathrm{e}^x}_{f_2(x)} = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)$$

Où on a posé $f_1 \colon x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $f_2 \colon x \mapsto x\mathrm{e}^x$. Ainsi,

$$f \in \ker(\Phi) \iff \exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \quad f = C_1 f_1 + C_2 f_2 \iff f \in \mathrm{vect}(f_1, f_2)$$

On a ainsi montré que $\mathrm{Ker}(\Phi) = \mathrm{vect}(f_1, f_2)$ Donc (f_1, f_2) est une famille génératrice du noyau, on peut aussi montrer qu'elle est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, supposons $af_1 + bf_2 = 0$ (fonction nulle), alors en évaluant en 0, il vient $af_1(0) + bf_2(0) = 0$, donc $a + b0 = 0$, donc $a = 0$. Ainsi $bf_2 = 0$, comme f_2 n'est pas le vecteur nul, $b = 0$. Ainsi, (f_1, f_2) est libre, c'est une base de $\mathrm{Ker}(\Phi)$. D'où $\mathrm{Ker}(\Phi)$ est un espace vectoriel de dimension finie de dimension 2.

Correction de l'exercice 6. Corrigé sur Youtube : https://youtu.be/vkcqEUoG3Bw

Correction de l'exercice 7. 1. Remarquons que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $P(X+1) \in \mathbb{R}_n[X]$, donc par différence $\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X)$. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q)\\ &= \lambda P(X+1) + Q(X+1) - \lambda P - Q\\ &= \lambda(P(X+1) - P) + (Q(X+1) - Q\\ &= \lambda\Delta(P) + \Delta(Q)\end{aligned}$$

Ainsi, Δ est un endomorphisme.

2. Soit $P \in \mathrm{Ker}(\Delta)$, alors $P(X+1) = P(X)$, ainsi P est 1-périodique, donc chaque valeur est atteinte une infinité de fois, par exemple $P(0)$ est atteint en 0 en 1, en 2 etc. Posons donc $Q(X) = P(X) - P(0)$, alors comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = P(0)$, on a $Q(n) = 0$. Donc Q a une infinité de racines, donc Q est le polynôme nul (seul polynôme à avoir strictement plus de racines que son degré). Ainsi, $P(X) = P(0)$. Ainsi, $P = c$ où $c \in \mathbb{R}$, donc $P \in \mathrm{vect}(1)$ (ici 1 est le polynôme constant égale à 1). Donc $\mathrm{Ker}(\Delta) \subset \mathrm{vect}(1)$. Réciproquement soit $P \in \mathrm{vect}(1)$, alors $P = c$ où $c \in \mathbb{R}$, ainsi $\Delta(P) = c - c = 0$, donc $P \in \mathrm{Ker}(\Delta)$. D'où $\mathrm{Ker}(\Delta) = \mathrm{vect}(1)$.
3. Appliquons le théorème du rang à Δ linéaire avec $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension finie, on a

$$\dim(\mathbb{R}_n[X]) = \dim(\mathrm{Ker}(\Delta)) + \mathrm{rg}(\Delta)$$

Comme (1) est une base de $\mathrm{Ker}(\Delta)$, on a $\dim(\mathrm{Ker}(\Delta)) = 1$. Ainsi, $\mathrm{rg}(\Delta) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - 1 = \mathbf{n+1} - 1 = n$. De plus, on sait, d'après le cours que comme $(1, X, \dots, X^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$ (c'est la base canonique on a) $\mathrm{Im}(\Delta) = \mathrm{vect}(\Delta(1), \Delta(X), \dots, \Delta(X^n))$. De plus, $\Delta(1) = 0$. D'où $\mathrm{Im}(\Delta) = \mathrm{vect}(\Delta(X), \dots, \Delta(X^n))$. Remarquons que

$$\Delta(X) = (X+1) - X = 1 \qquad \Delta(X^2) = (X+1)^2 - X^2 = 2X+1 \qquad \text{et} \qquad \Delta(X^3) = (X+1)^3 - X^3 = 3X^3 + 3X + 1$$

en généralisant, par la formule du binôme de Newton

$$\forall k \in [\![1 ; n]\!] \qquad \Delta(X^k) = (X+1)^k - X^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i - X^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i$$

Ainsi, $d^\circ \Delta(X^k) = k - 1$. Donc $d^\circ \Delta(X) < d^\circ \Delta(X^2) < \dots < \Delta(X^n) = n - 1$. Ainsi, $(\Delta(X), \dots, \Delta(X^n))$ est une famille de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ Dès lors, comme $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est un espace vectoriel, on a $\mathrm{Im}(\Delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$, par égalité des dimension, $\mathrm{Im}(\Delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
4. $1 \in \mathrm{Ker}(\Delta)$ et $\Delta(X) = 1$, ainsi $1 \in \mathrm{Im}(\Delta) \cap \mathrm{Ker}(\Delta)$ et $1 \neq 0$, donc $\mathrm{Im}(\Delta)$ et $\mathrm{Ker}(\Delta)$ ne sont pas en somme directe et donc ne sont pas supplémentaires.

Correction de l'exercice 8.

Correction de l'exercice 9. 1. Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} p((x,y,z) + \lambda(x',y',z')) & = & p((x + \lambda x', y + \lambda y' + z + \lambda z')) \\ & = & (2(x+\lambda x') + (y + \lambda y') + 2(z + \lambda z'), y + \lambda y', -(x - \lambda x') - (y - \lambda y') - (z - \lambda z')) \\ & = & (2x + y + 2z, y, -x - y - z) + \lambda(2x' + y' + 2z', y', -x' - y' - z') \\ & = & p(x,y,z) + \lambda p(x',y',z') \end{array}$$

2. $p(e_1) = p(1,0,0) = (2,0,-1)$, $p(e_2) = p(0,1,0) = (1,1,-1)$ et $p(e_3) = p(0,0,1) = (2,0,-1)$
3. En composant par p les égalités précédentes, on obtient : $p^2(e_1) = p(2,0,-1) = (2,0,-1)$, $p^2(e_2) = p(1,1,-1)$ et $p^3(e_3) = (2,0,-1)$. On remarque donc que p^2 et p coïncident sur la base canonique. D'après le cours, on peut en déduire que $p^2 = p$. Donc, comme p est linéaire, on en déduit que p est une projection.
4. D'après le cours $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{vect}(p(e_1), p(e_2), p(e_3)) = \mathrm{vect}(p(e_1), p(e_2))$ car $p(e_1) = p(e_3)$. Or $p(e_1) = (2,0,-1)$ et $p(e_2) = (1,1,-1)$ forment une famille libre, donc $\mathrm{rg}(p) = \dim(\mathrm{Im}(p)) = 2$.

Correction de l'exercice 10.

Correction de l'exercice 11. Soit $v \in F \cap G$, alors $v \in F$ et $v \in G$, donc il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $v = a(1,1,2) + b(1,1,3) = (a+b, a+b, 2a+3b)$ et il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $v = c(1,0,0) = (c,0,0)$, donc $(a+b, a+b, 2a+3b) = (c,0,0)$ par identification, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a+b & = & c \\ a+b & = & 0 \\ 2a+3b & = & 0 \end{array} \right. \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcl} 0 & = & c \\ a+b & = & 0 \\ -a & = & 0 \end{array} \right. \iff a = b = c = 0$$

Ainsi $v = 0(1,0,0) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Ceci montre que $F \cap G \subset \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Comme l'inclusion est toujours vrai, $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Donc F et G sont en bien en somme directe. De plus, $\dim(G) = 1$ (sous-espace vectoriel engendré par un vecteur non nul), et $\dim(F) = 2$ (sous-espace vectoriel engendré par deux vecteurs indépendants). Ainsi $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = \dim(F) + \dim(G)$ avec F et G en somme directe, cela suffit pour montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Notons p la projection recherchée. Soit $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on va décomposer v dans $F \oplus G$, on sait qu'il existe $(f,g) \in F \times G$ tel que $v = f + g$, comme $f \in F$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $f = a(1,1,2) + b(1,1,3)$. De même, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $g = c(1,0,0)$, donc $v = f + g = a(1,1,2) + b(1,1,3) + c(1,0,0) = (a+b+c, a+b, 2a+3b)$. On a donc :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a+b+c & = & x \\ a+b & = & y \\ 2a+3b & = & z \end{array}\right. \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2}}{\iff} \left\{\begin{array}{lcl} c & = & x-y \\ a+b & = & y \\ -a & = & z-3y \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & 3y-z \\ b & = & -2y+z \\ c & = & x-y \end{array}\right.$$

Ainsi, $p(x,y,z) = p(v) = f = a(1,1,2) + b(1,1,3) = (3y-z)(1,1,2) + (z-2y)(1,1,3) = (y,y,z)$.

Notons s la symétrie associée, alors $s(x,y,z) = 2p(x,y,z) - (x,y,z) = (2y-x, y, z)$.

Correction de l'exercice 12. Corrigé sur Youtube : https://youtu.be/PnEVQ8ncSoI

Correction de l'exercice 13.

Correction de l'exercice 14. Corrigé sur Youtube : https://youtu.be/hf12P6T4eLQ

Correction de l'exercice 15.

Correction de l'exercice 16. Supposons $g \circ f = 0$, montrons $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$. Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, donc $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = 0(x) = 0_E$. Dès lors $y \in \mathrm{Ker}(g)$ et ce pour tout $y \in \mathrm{Im}(f)$. Donc $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$. Supposons $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$ et montrons $g \circ f = 0$. Soit $x \in E$, posons $y = f(x) \in \mathrm{Im}(f)$, donc $y \in \mathrm{Ker}(g)$, donc $g(y) = 0_E$, ainsi $g(f(x)) = 0_E$. Par conséquent, $(g \circ f)(x) = 0_E$ et ce pour tout $x \in E$, donc $g \circ f = 0$ (application nulle).

Correction de l'exercice 17. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$, alors $f(x) = 0_E$ et $(f - \mathrm{Id}_E)(x) = 0_E$, soit $f(x) = x$, donc $x = 0_E$, ainsi $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \subset \{0_E\}$. Comme l'inclusion réciproque est toujours vérifiée, on peut dire que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe.

Correction de l'exercice 18.

1. Soit $x \in E$ non nul, par hypothèse, la famille $(x, f(x))$ est liée. Donc il existe $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ tel que $ax + bf(x) = 0_E$ avec $(a,b) \neq (0,0)$. Supposons par l'absurde que $b = 0$, alors $a \neq 0$ et $ax = 0_E$ donc $a = 0$ ou $x = 0_E$ ce qui est impossible dans tous les cas. Ainsi, $b \neq 0$ et $f(x) = -\dfrac{a}{b}x$. En posant $\lambda_x = -\dfrac{a}{b} \in \mathbb{K}$, on a bien $f(x) = \lambda_x x$. Supposons que $f(x) = \mu x$, alors par soustraction, on a $(\lambda_x - \mu)x = 0_E$, comme $x \neq 0_E$, on en déduit que $\lambda_x - \mu = 0$ soit que $\mu = \lambda_x$. D'où l'existence et l'unicité de λ_x.
2. Soit x et y non nuls telle que (x,y) soit liée, alors $y = \alpha x$ où $\alpha \in \mathbb{K}$ avec $\alpha \neq 0$, composant par f, on a $f(y) = \alpha f(x)$. Soit $\lambda_y y = \alpha \lambda_x x$, donc $\lambda_y \alpha x = \alpha \lambda_x x$, donc $(\lambda_y \alpha - \alpha \lambda_x)x = 0_E$ soit $\alpha(\lambda_y - \lambda_x) = 0$. Comme $\alpha \neq 0$, on a $\lambda_y = \lambda_x$.
3. Soit (x,y) une famille libre de E, posons $z = x+y$, alors $f(z) = f(x+y) = f(x)+f(y)$, soit $\lambda_z z = \lambda_x x + \lambda_y y$. Donc $\lambda_z(x+y) = \lambda_x x + \lambda_y y$. On a donc $(\lambda_x - \lambda_z)x + (\lambda_y - \lambda_z) = 0_E$. Comme la famille (x,y) est libre, on en déduit que $\lambda_x - \lambda_z = 0$ et $\lambda_y - \lambda_z = 0$. Donc que $\lambda_x = \lambda_y$.
4. On a donc montré que $\lambda_x = \lambda_y$ quelque soit $(x,y) \in (E \backslash \{0\})^2$. Notons λ cette valeur commune. On a donc, pour tout $x \in E \backslash \{0\}$, $f(x) = \lambda x$. On remarque qu'on a également $f(0_E) = \lambda 0_E$. Ainsi f est bien une homothétie.
5. Réciproquement si f est une homothétie, alors pour tout $x \in E$, $(x, f(x))$ est une famille liée.

Correction de l'exercice 19.

Correction de l'exercice 20. 1. En utilisant que $p \circ p = p$, $q \circ q = q$ et $p \circ q = q \circ p$. Montrons que $p \circ q$ est une projection :

$$(p \circ q) \circ (p \circ q) = p \circ (q \circ q) \circ p = p \circ (q \circ p) = p \circ (p \circ q) = (p \circ p) \circ q = p \circ q$$

De plus, p et q sont des endomorphismes, par composition $p \circ q$ est linéaire. Ainsi $p \circ q$ est une projection. On sait, donc d'après le cours que $p \circ q$ projette sur $\mathrm{Im}(p \circ q)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p \circ q)$. Donc $F = \mathrm{Im}(p \circ q)$ et $G = \mathrm{Ker}(p \circ q)$.

2. Déterminons $F = \mathrm{Im}(p \circ q)$, soit $y \in \mathrm{Im}(p \circ q)$, donc il existe $x \in E$ tel que $y = (p \circ q)(x)$, alors $y = p(q(x))$, posons $z = q(x)$, alors $y = p(z)$ et donc $y \in \mathrm{Im}(p)$. De plus, $y = q(p(x))$, posons $w = p(x)$, alors $y = q(w)$ et donc $y \in \mathrm{Im}(q)$. Ainsi $y \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$. Donc $F \subset \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$.

   Soit $y \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$, alors comme p est une projection sur $\mathrm{Im}(p)$, on a $p(y) = y$, de même $q(y) = y$, alors
   $$(p \circ q)(y) = p(q(y)) = p(y) = y$$
   Ainsi $y \in \mathrm{Im}(p \circ q)$. Ainsi $F = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$.

3. Soit $x \in \mathrm{Ker}(p \circ q)$, on sait que $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = E$, donc il existe un unique $(k, i) \in \mathrm{Ker}(p) \times \mathrm{Im}(p)$ tel que $x = k + i$, donc
   $$0 = (p \circ q)(x) = (q \circ p)(x) = q(p(k+i)) = q(p(k) + p(i)) = q(i)$$
   Donc $i \in \mathrm{Ker}(q)$, ainsi $x = k + i$ avec $(k, i) \in \mathrm{Ker}(p) \times \mathrm{Ker}(i)$. Ceci montre que $x \in \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q)$. On a donc montré que $\mathrm{Ker}(p \circ q) \subset \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q)$.

   Soit $x \in \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q)$, donc il existe $(k, k') \in \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q)$ tel que $x = k + k'$, alors
   $$(p \circ q)(x) = (p \circ q)(k + k') = (p \circ q)(k) + (p \circ q)(k') = q(p(k)) + p(q(k')) = q(0_E) + p(0_E) = 0_E$$
   Donc $x \in \mathrm{Ker}(p \circ q)$. Donc $\mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Ker}(p \circ q)$. On a donc montré que $\mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Ker}(p \circ q)$.

Conclusion $p \circ q$ est une projection de $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q)$.

Correction de l'exercice 21. 1. Soit $x \in E$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0_E$. Montrer que $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1})$ est une famille libre. Soit $(\lambda_i)_{0 \leqslant i \leqslant p-1} \in \mathbb{K}^p$ tel que

$$\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i f^i(x) = 0 \tag{1}$$

Présentons trois preuves similaires que les $\lambda_i = 0$ (chacune ayant une longueur et un niveau de rédaction différent, la dernière étant la plus courte et rigoureuse) :

- En composant par f^{p-1} l'équation (1), on a
  $$\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i f^{i+p-1}(x) = \lambda_0 f^{p-1}(x) + \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i f^{i+p-1}(x) = 0$$
  Or pour tout $i \in [\![1 ; p-1]\!]$, $i - 1 \geqslant 0$ et donc $f^{i+p-1} = f^p \circ f^{i-1} = 0 \circ f^{i-1} = 0$, on obtient donc $\lambda_0 f^{p-1}(x) + 0 = 0$ et comme le vecteur $f^{p-1}(x) \neq 0_E$, on en déduit que $\lambda_0 = 0$ [1], puis on recommence en composant cette fois-ci par f^{p-2} pour montrer que $\lambda_1 = 0$ puis etc. (court mais pas très rigoureux, le etc. cache une récurrence que l'on a la flemme de faire).

---

1. Rappelons que si $\lambda u = 0$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in E$, alors $\lambda = 0$ ou $u = 0$. Par contre si A et B sont deux matrices telles que $AB = 0$, ON NE PEUT PAS DIRE/ÉCRIRE $A = 0$ OU $B = 0$ SOUS PEINE D'AVOIR DE GROS ENNUIS.

- Effectuons donc cette récurrence finie, posons, pour $k \in [\![0 ; p-1]\!]$

$$\mathscr{P}(k): \qquad \text{«}\forall q \in [\![0 ; k]\!] \quad \lambda_q = 0\text{»}$$

— **Initialisation :** on a montré que $\lambda_0 = 0$ dans la première méthode donc $\mathscr{P}(0)$ est vérifiée.
— **Hérédité :** soit $k \in [\![0 ; p-2]\!]$. Montrons : $\quad \mathscr{P}(k) \quad \Longrightarrow \quad \mathscr{P}(k+1)$.

Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie et montrons $\mathscr{P}(k+1)$ vraie. Comme $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$, on a $\sum_{i=k+1}^{p-1} \lambda_i f^i(x) = 0$. En composant par f^{p-k-2}, on a

$$\sum_{i=k+1}^{p-1} \lambda_i f^{p-k-2+i}(x) = \lambda_{k+1} f^{p-1}(x) + \sum_{i=k+2}^{p-1} \lambda_i f^{p-k-2+i}(x)$$

Or pour tout $i \in [\![k+2 ; p-1]\!]$, $i-k-2 \geqslant 0$, ainsi $f^{p-k-2+i}(x) = f^{i-k-2} \circ f^p(x) = 0$, on a donc $\lambda_{k+1} f^{p-1}(x) = 0$, comme $f^{p-1}(x) \neq 0_E$, on en déduit que $\lambda_{k+1} = 0$. Pour tout $q \in [\![0 ; k+1]\!]$, $\lambda_q = 0$, ainsi $\mathscr{P}(k+1)$ est vérifiée.
— **Conclusion :** pour tout $k \in [\![0 ; p-1]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie.

Ainsi, comme $\mathscr{P}(p-1)$ est vraie, on a pour tout $k \in [\![0 ; p-1]\!]$, $\lambda_k = 0$. On a ainsi montré que la famille $(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est libre.
- Supposons que l'un des λ_i soit non nul, posons $i_0 = \min\{i \in [\![0 ; p-1]\!], \lambda_i \neq 0\}$ (le minimum d'un ensemble de $\mathbb{N}$ non vide est toujours défini). Ainsi pour tout $i \in [\![0 ; i_0 [\![$, $\lambda_i = 0$. On a donc

$$\sum_{i=i_0}^{p-1} \lambda_i f^i(x) = 0_E$$

Et comme à la méthode par récurrence, en composant par f^{p-i_0-2}, on prouve que $\lambda_{i_0} = 0$ ce qui est absurde. Ainsi il n'est pas possible de trouver un λ_i non nul. Donc la famille est libre.

2. Comme la famille $(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x))$, a p éléments et est une famille libre, on en déduit que $p \leqslant \dim(E) = n$. Soit $p \leqslant n$.
3. Comme $p \leqslant n$, on peut écrire $f^n = f^{n-p} \circ f^p = 0$. Donc $f^n = 0$.

Correction de l'exercice 22. Corrigé sur Youtube : https://youtu.be/_yVYDibuDb8

Correction de l'exercice 23.

Correction de l'exercice 24.

Correction de l'exercice 25.

Correction de l'exercice 26.
- Montrons que $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$ Soit $y \in \mathrm{Im}(f+g)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = (f+g)(x)$, donc $y = f(x) + g(x)$. Posons $a = f(x) \in \mathrm{Im}(f)$ et $b = g(x) \in \mathrm{Im}(g)$, alors $y \in \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$. Dès lors $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$. En utilisant la formule de Grassmann

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Im}(f+g)) &\leqslant \dim(\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(g)) - \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g))}_{\geqslant 0} \\ &\leqslant \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(g)) \end{aligned}$$

D'où $\mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.
- On procède comme dans la preuve de la seconde inégalité triangulaire :

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}((f-g)+g) \leqslant \mathrm{rg}(f-g) + \mathrm{rg}(g)$$

Donc $\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g) \leqslant \mathrm{rg}(f-g)$. Par symétrie des rôles, on obtient $\mathrm{rg}(g) - \mathrm{rg}(f) \leqslant \mathrm{rg}(g-f)$. Or pour $h \in \mathscr{L}(E)$, $\mathrm{rg}(h) = \mathrm{rg}(-h)$, en effet, pour tout $y \in E$

$$\begin{aligned} y \in \mathrm{Im}(h) &\iff \exists x \in E \quad y = h(x) \\ &\iff \exists x \in E \quad y = -h(-x) \\ &\iff \exists \tilde{x} \in E \quad y = -h(\tilde{x}) \\ &\iff y \in \mathrm{Im}(-h) \end{aligned}$$

Dès lors, $\mathrm{Im}(h) = \mathrm{Im}(-h)$ d'où $\mathrm{rg}(h) = \mathrm{rg}(-h)$. Par conséquent, $\mathrm{rg}(g) - \mathrm{rg}(f) \leqslant \mathrm{rg}(f-g)$. Or

$$|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(f)| = \mathrm{rg}(g) - \mathrm{rg}(f) \qquad \text{ou} \qquad |\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(f)| = \mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)$$

Dans les deux cas, on a $|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leqslant \mathrm{rg}(f-g)$.

Correction de l'exercice 27. Soit $(f,g) \in F \times G$, remarquons que $f+g \in F+G$, on peut donc définir l'application suivante :

$$\varphi : \begin{cases} F \times G \longrightarrow F+G \\ (f,g) \longmapsto f+g \end{cases}$$

Cette application est linéaire (facile à montrer), surjective (par définition de $F+G$). De plus d'après le cours, $F \times G$ est de dimension finie et vaut $\dim(F) + \dim(G)$, on peut donc appliquer le théorème du rang

$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(F \times G) = \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) + \mathrm{rg}(\varphi) = \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) + \dim(F+G) \tag{2}$$

Il reste à étudier le noyau de φ, soit $(f,g) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, on a donc $f+g=0$, soit $f=-g$, comme G est un espace vectoriel et que $-g \in G$, on en déduit que $f \in G$ et donc que $f \in G \cap F$. Ainsi les éléments du noyaux sont de la forme $(f,-f)$ où $f \in F \cap G$. Réciproquement si on prend un élément de la forme $(f,-f)$ où $f \in F \cap G$, alors $(f,-f) \in F \times G$ et $(f,-f) \in \mathrm{Ker}\varphi$. Posons l'application suivante :

$$\Psi : \begin{cases} F \cap G \longrightarrow \mathrm{Ker}\varphi \\ \quad f \quad \longmapsto (f,-f) \end{cases}$$

Alors, par ce qui précède, cette application est bien définie, on montre également qu'elle est linéaire, injective et surjective. Et donc que Ψ est un isomorphisme ce qui montre que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $F \cap G$ ont la même dimension. En reportant dans l'équation (2), on obtient

$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(F+G) + \dim(F \cap G)$$

On a donc montré la formule de Grassmann.

Correction de l'exercice 28.

1. Supposons que $u^2 = 0$ (endomorphisme nul) et $n = \mathrm{rg}(u)$. Alors soit $y \in \mathrm{Im}(u)$, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$, ainsi $u(y) = u(u(x)) = u^2(x) = 0_E$. Ainsi, $y \in \mathrm{Ker}(u)$, on a donc montré que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$. De plus, comme E est de dimension finie, et u linéaire, le théorème du rang, fournit
$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u)) = 2n = 2\dim(\mathrm{Im}(u))$$
Ainsi, en retranchant $\dim(\mathrm{Im}(u))$, on obtient $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = \dim(\mathrm{Im}(u))$. Ainsi, on a deux espaces vectoriels de même dimension avec l'un inclus dans l'autre, d'après le cours sur la dimension finie, on en conclut que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$.

2. Supposons que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$. Alors le théorème du rang affirme que
$$2n = \dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim(\mathrm{Im}(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u)) = 2\dim(\mathrm{Im}(u))$$
Ainsi, $n = \mathrm{rg}(u)$. De plus, soit $x \in E$, alors $u(x) \in \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$. D'où $u(x) \in \mathrm{Ker}(u)$, ainsi, $u(u(x)) = 0_E$. D'où $(u \circ u)(x) = 0_E$ et ce pour tout $x \in E$, donc $u \circ u = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Correction de l'exercice 29.

Correction de l'exercice 30. 1. Notons $F = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}_E)$. Comme noyaux d'applications linéaires, F et G sont des sous-espaces vectoriels de E. Soit $x \in E$, le but est de montrer qu'il existe un unique couple $(a, b) \in F \times G$ tel que $x = a + b$. Procédons par analyse-synthèse :

- Analyse : supposons que $x = a + b$ avec $a \in F$ et $b \in G$. Comme $a \in F = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)$, on a $0_E = (f - 2\mathrm{Id}_E)(a) = f(a) - 2\mathrm{Id}_E(a) = f(a) - 2a$. Ainsi, $f(a) = 2a$. De même, on prouve que $f(b) = 3b$. Ainsi, $f(x) = f(a) + f(b) = 2a + 3b$. Ainsi, on a $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & a+b \\ f(x) & = & 2a+3b \end{array}\right.$. En résolvant ce système, on trouve que $a = 3x - f(x)$ et $b = f(x) - 2x$.
- Synthèse : posons $a = 3x - f(x)$ et $b = f(x) - 2x$. Alors
  — $a + b = (3x - f(x)) + (f(x) - 2x) = x$.
  — Montrons que $a \in F$.
$$\begin{array}{rcl} (f - 2\mathrm{Id}_E)(a) & = & (f - 2\mathrm{Id}_E)(3x - f(x)) \\ & = & f(3x - f(x)) - 2\mathrm{Id}_E(3x - f(x)) \\ & = & 3f(x) - f(f(x)) - 2(3x - f(x)) \\ & = & -(f \circ f)(x) + 5f(x) - 6x \\ & = & -(f \circ f - 5f + 6\mathrm{Id}_E)(x) \\ & = & -0_{\mathscr{L}(E)}(x) \\ & = & 0_E \end{array}$$
  Ainsi, $a \in \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)$.
  — On démontre de même que $b \in \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}_E)$.

Ainsi, la synthèse, nous montre donc qu'on a trouvé $a \in F$ et $b \in G$ tel que $x = a + b$. L'analyse nous montre que ce a et ce b sont uniques.

2. $x = a + b$ avec $a \in F$ et $b \in G$, ainsi $a = p_F(x)$ et $b = p_G(x)$. Or, on a établi, à la question d'avant que $f(x) = 2a + 3b = 2p_F(x) + 3p_G(x) = (2p_F + 3p_G)(x)$. Ainsi, $f = 2p_F + 3p_G$ s'écrit bien comme une combinaison linéaire de projecteurs.
3. On pose $g = \frac{1}{2}p_F + \frac{1}{3}p_G$ et on calcule
$$\begin{array}{rcl} f \circ g & = & (2p_F + 3p_G) \circ \left(\dfrac{1}{2}p_F + \dfrac{1}{3}p_G\right) \\ & = & (2p_F + 3p_G) \circ \left(\dfrac{1}{2}p_F\right) + (2p_F + 3p_G) \circ \left(\dfrac{1}{3}p_G\right) \\ & = & 2p_F \circ \left(\dfrac{1}{2}p_F\right) + 3p_G \circ \left(\dfrac{1}{2}p_F\right) + 2p_F \circ \left(\dfrac{1}{3}p_G\right) + 3p_G \circ \left(\dfrac{1}{3}p_G\right) \\ & = & 2 \times \dfrac{1}{2}p_F \circ p_F + 3 \times \dfrac{1}{2}p_G \circ p_F + 2 \times \dfrac{1}{3}p_F \circ p_G + 3 \times \dfrac{1}{3}p_G \circ p_G \\ & = & p_F + 3 \times \dfrac{1}{2}0_{\mathscr{L}(E)} + 2 \times \dfrac{1}{3}0_{\mathscr{L}(E)} + p_G = p_F + p_G = \mathrm{Id}_E \end{array}$$
On démontre de la même façon que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, ainsi f est bijective et $f^{-1} = g = \frac{1}{2}p_F + \frac{1}{3}p_G$.

Correction de l'exercice 31.

Correction de l'exercice 32.

Correction de l'exercice 33.

Correction de l'exercice 34.

Correction de l'exercice 35. Considérons l'application $\mathrm{tr}: M \mapsto \mathrm{tr}(M)$, d'après le cours cette application est linéaire, non nulle $\mathrm{tr}(I_n) = n \neq 0$, de plus ses valeurs sont dans $\mathbb{K}$, ainsi $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$ est le noyau d'une forme linéaire non nulle, donc c'est un hyperplan (il est de dimension $n^2 - 1$. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice dont la trace est non nulle, alors $\mathrm{vect}(M)$ est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$.

Correction de l'exercice 36.

Correction de l'exercice 37.

Correction de l'exercice 38. Posons $A = E_{i,j}$ et $B = E_{j,k}$, alors $\varphi(E_{i,k}) = \varphi(AB) = \varphi(BA) = \delta_{k,i}\varphi(E_{j,j})$. On en déduit que $\varphi(E_{i,i}) = \varphi(E_{j,j})$ pour tout i et j et que $\varphi(E_{i,j}) = 0$ si $i \neq j$. En notant $\alpha = \varphi(E_{1,1})$, on en déduit que φ et $\alpha\mathrm{tr}$ coïncident sur la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Comme ce sont des applications linéaires, on en déduit que $\varphi = \alpha\mathrm{tr}$.

Correction de l'exercice 39.

Correction de l'exercice 40.

1.
2.
3. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned} M \in F &\iff \exists(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \quad M = \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} \\ &\iff \exists(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \quad M = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \exists(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \quad M = aI_3 + bA + cA^2 \\ &\iff M \in \mathrm{vect}(I_3, A, A^2) \end{aligned}$$

   Ainsi, $F = \mathrm{vect}(I_3, A, A^2)$. Donc (I_3, A, A^2) est une famille génératrice de F. Montrons qu'elle est libre. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Supposons $aI_3 + bA + cA^2 = 0_3$. Alors

$$\begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Par identification, sur la première ligne, $a + c = b = c = 0$. D'où $a = b = c = 0$. Ainsi, (I_3, A, A^2) est une famille libre. Donc (I_3, A, A^2) est une base de F. Dès lors $\dim(F) = 3$.
4. Soient $(M, N) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$f(\lambda M + M') = A(\lambda M + M') = \lambda AM + AM' = \lambda f(M) + f(M')$$

   De plus, il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = aI + bA + cA^2$, alors

$$f(M) = f(aI_3+bA+cA^2) = af(I_3)+bf(A)+cf(A^2) = aA+bA^2+cA^3 = (a+2c)A+bA^2 \in \mathrm{vect}(I_3, A, A^2) = F$$

   Ainsi, pour tout $M \in F$, $f(M) \in F$ et f est linéaire. Dès lors, $f \in \mathscr{L}(F)$.
5.
6.
7.
8.

9. Soit $M \in F$, il existe un unique triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = aI_3 + bA + cA^2$.

$$\begin{aligned} f(M) = I_3 + A^2 &\iff f(aI_3 + bA + cA^2) = I_3 + A^2 \\ &\iff af(I_3) + bf(A) + cf(A^2) = I_3 + A^2 \\ &\iff aA + bA^2 + 2cA = I_3 + A^2 \\ &\iff (-1) \cdot I_3 + (a + 2c) \cdot A + (b - 1) \cdot A^2 = 0_3 \end{aligned}$$

Or comme (I_3, A, A^2) est libre cela implique que $-1 = 0$, $a + 2c = 0$ et $b - 1 = 0$. Mais comme $-1 \neq 0$, on en déduit qu'il n'y a pas de solutions à cette équation. L'ensemble des solutions est donc $S = \varnothing$.

10. Soit $M \in F$, il existe un unique triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = aI_3 + bA + cA^2$.

$$\begin{aligned} f(M) = A + A^2 &\iff f(aI_3 + bA + cA^2) = A + A^2 \\ &\iff af(I_3) + bf(A) + cf(A^2) = A + A^2 \\ &\iff aA + bA^2 + 2cA = I_3 + A^2 \\ &\iff (0) \cdot I_3 + (a + 2c - 1) \cdot A + (b - 1) \cdot A^2 = 0_3 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 0 &=& 0 \\ a + 2c - 1 &=& 0 \\ b - 1 &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff a = 1 - 2c \quad \text{et} \quad b = 1 \\ &\iff M = (1 - 2c)I_3 + bA + cA^2 \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est [2] $S = \left\{(1 - 2c)I_3 + A + cA^2, \quad c \in \mathbb{R}\right\}$. On remarque que ce n'est pas un espace vectoriel, en effet, la matrice nulle ne vérifie pas $f(0_3) = A + A^2$.

11.

12.

13. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} X \in \mathrm{Ker}(A) &\iff AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} y \\ x + z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff y = x + z = 0 \iff z = -x \quad \text{et} \quad y = 0 \\ &\iff X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \iff X \in \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

2. Je tiens à remercier très chaleureusement Cyriaque D. pour m'avoir signalé une coquille à cet endroit.

Ainsi, $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$

$$\begin{aligned}
X \in \mathrm{Ker}(A-\sqrt{2}I_3) &\iff (A-\sqrt{2}I_3)X = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}y-\sqrt{2}x\\x+z-\sqrt{2}y\\y-2\sqrt{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{cases} y-\sqrt{2}x &= 0\\ x+z-\sqrt{2}y &= 0\\ y-2\sqrt{z} &= 0\end{cases} \iff \begin{cases} y &= \sqrt{2}x\\ x+z-2x &= 0\\ \sqrt{2}x-2\sqrt{z} &= 0\end{cases}\\
&\iff y = \sqrt{2}x \quad \text{et} \quad z = x \iff X = \begin{pmatrix}x\\\sqrt{2}x\\x\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}\\
&\iff X \in \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(A-\sqrt{2}I_3) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}\right)$. Je vous laisse trouver de la même façon que $\mathrm{Ker}(A+\sqrt{2}I_3) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}\right)$

14. On pose donc $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2}\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. On vérifie que P est inversible et on l'inverse grâce à la méthode de Gauss-Jordan. Puis on calcule[3] $P^{-1}AP = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & \sqrt{2} & 0\\0 & 0 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}$

3. On verra l'année prochaine des outils théoriques qui nous permettrons d'obtenir le même résultat, sans calculer P^{-1} ni aucun produit matriciel. Patience...