Chapitre 17

Déterminants

Prérequis :

- Calculs matriciels
- Espaces vectoriels
- Espaces vectoriels de dimension finie
- Applications linéaires
- Matrice d'applications linéaires

Objectifs :

- Donner une définition du déterminant d'une matrice carrée, d'un endomorphisme ou d'une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n.
- Grâce au déterminant, déterminer (d'où le nom) si la matrice carrée est inversible, si l'endomorphisme est bijectif ou si la famille de n vecteurs est une base.

Table des matières

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1 Déterminant en dimension 2

Définition du déterminant d'une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$

On définit le **déterminant** de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ par $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Proposition n° 1 : propriétés du déterminant en dimension 2

- $$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \tag{1}$$
- $$\forall a,\ c \in \mathbb{K} \quad \begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(le déterminant est \textbf{alterné})} \tag{2}$$
- À $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ fixé, $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ est linéaire, à $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ fixé, $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ est linéaire (le déterminant est **bilinéaire**)
$$\forall a,\ a', b,\ b',\ c,\ c',\ d,\ d',\ \lambda \in \mathbb{K} \quad \begin{vmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & \lambda b \\ c & \lambda d \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \tag{3}$$
$$\begin{vmatrix} a+a' & b \\ c+c' & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & b+b' \\ c & d+d' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b' \\ c & d' \end{vmatrix} \tag{4}$$
- Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda M) = \lambda^2 \det(M)$.
- Ajouter à une colonne une autre colonne multiplié par un scalaire ne change pas le déterminant :
$$\forall a,\ b,\ c,\ d,\ \lambda \in \mathbb{K} \quad \begin{vmatrix} a+\lambda b & b \\ c+\lambda d & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \text{ et } \begin{vmatrix} a & b+\lambda a \\ c & d+\lambda c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \tag{5}$$

Proposition n° 2 : inverse d'une matrice de taille 2×2

Une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $\det(M) = ad - bc \neq 0$. Dans ce cas :
$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Démonstration de la proposition n° 2 :

- Par un produit matriciel $M^2 = (a+d)M - \det(M)I_2$.
- Si $\det(M) \neq 0$, alors $M(M - (a+d)I_2) = -\det(M)I_2$, donc $M\left(\frac{1}{-\det M}(M - (a+d)I_2)\right) = I_2$. Ceci prouve que M est inversible et que
$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}((a+d)I_2 - M) = \frac{1}{\det M}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
De plus,
$$\det(M^{-1}) = \det\left[\frac{1}{\det M}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{\det^2(M)}\begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix} = \frac{da - bc}{\det^2(M)} = \frac{1}{\det(M)}$$
- Si M inversible. Raisonnons par l'absurde et supposons $\det(M) = 0$, alors $M^2 = (a+d)M$, alors en multipliant par M^{-1}, il vient $M = (a+d)I_2$. Par identification des coefficients, on a donc
$$(a,b,c,d) = (a+d, 0, 0, a+d) \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = b = c = d = 0$$
Ainsi, $M = 0_2$, or la matrice nulle n'est pas inversible c'est donc absurde, donc $\det(M) \neq 0$.

Remarque 1. Le déterminant est donc une fonction certaines propriétés algébriques. Y a-t-il d'autres fonction avec les mêmes propriétés ?

Proposition n° 3 : unicité du déterminant en dimension 2
Toute fonction de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ satisfaisant (2), (3) et (4) est proportionnel au déterminant.
La fonction déterminant est la seule fonction de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ satisfaisant (1), (2) , (3) et (4).

Démonstration de la proposition n° 3 : Soit $\varphi\colon \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ satisfaisant (2) (3) et (4). Cela veut dire que

$$\varphi(I_2) = 1, \qquad \varphi\begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} \varphi\begin{pmatrix} \lambda a + a' & b \\ \lambda c + c' & d \end{pmatrix} &= \lambda\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \varphi\begin{pmatrix} a' & b \\ c' & d \end{pmatrix} \\ \varphi\begin{pmatrix} a & \lambda b + b' \\ c & \lambda d + d' \end{pmatrix} &= \lambda\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \varphi\begin{pmatrix} a & b' \\ c & d' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Le but est de calculer $\varphi(A)$. On note $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Notons que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (C_1|C_2) = (ae_1 + ce_2|be_1 + de_2)$. En utilisant la linéarité par rapport à la première colonne, il vient

$$\varphi(A) = \varphi(ae_1 + ce_2|C_2) = a\varphi(e_1|C_2) + c\varphi(e_2|C_2) = a\varphi(e_1|be_1 + de_2) + c\varphi(e_2|be_1 + de_2)$$

En utilisant la linéarité, cette fois-ci, par rapport à la deuxième colonne, on obtient

$$\varphi(A) = a\left[b\varphi(e_1|e_1) + d\varphi(e_1|e_2)\right] + c\left[b\varphi(e_2|e_1) + d\varphi(e_2|e_2)\right] = ad\varphi(e_1|e_2) + cb\varphi(e_2|e_1)$$

De plus, avec $a = b = c = d = 1$, on obtient $0 = \varphi(e_1|e_2) + \varphi(e_2|e_1)$. Ainsi, $\varphi(A) = (ad - bc)\varphi(e_1|e_2) = \det(A)\varphi(e_1|e_2)$. Et ce pour tout $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. Si de plus, $\varphi(I_2) = 1$, alors $\varphi = \det$, d'où l'unicité. ∎

2 Déterminant en dimension 3

Définition du déterminant en dimension 3 (Sarrus)

Pour $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$, on note $\qquad \det(M) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$

Proposition n° 4 : propriétés du déterminant
Soit $M = (C_1|C_2|C_3) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ où C_j est la j-ième colonne de M.

- $\det(I_3) = 1$.
- Le déterminant est **alterné** : $\det(C_1|C_1|C_3) = \det(C_1|C_2|C_2) = \det(C_1|C_2|C_1) = 0$
- $\det\colon \mathscr{M}_3(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ est **trilinéaire** : $C \mapsto \det(C|C_2|C_3)$, $C \mapsto \det(C_1|C|C_3)$, $C \mapsto \det(C_1|C_2|C)$ sont des formes linéaires sur $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K})$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \det(\lambda M) = \lambda^3 \det(M)$.

Proposition n° 5 : unicité du déterminant en dimension 3
Tout fonction de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ trilinéaire et alternée est proportionnelle au déterminant.
Le déterminant est la seule fonction de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ trilinéaire, alternée et valant 1 en I_3.

Démonstration de la proposition n° 5 : Soit $\varphi\colon \mathscr{M}_3(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ trilinéaire alternée. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Le but est de calculer $\varphi(A)$. Notons $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Notons, C_1, C_2, C_3 les colonnes de A, alors $C_1 = ae_1 + be_2 + ce_3$. Alors $\varphi(A) = (ae_1 + de_2 + ge_3|C_2|C_3)$, ainsi, par linéarité de φ par rapport à la première colonne $\varphi(A) = a\varphi(e_1|C_2|C_3) + d\varphi(e_2|C_2|C_3) + g\varphi(e_3|C_2|C_3)$. De plus, $C_2 = be_1 + ee_2 + he_3$, ainsi en utilisant la linéarité par rapport à la seconde colonne, on obtient

$$\begin{aligned} \varphi(A) &= a\left[b\varphi(e_1|e_1|C_3) + e\varphi(e_1|e_2|C3) + h\varphi(e_1|e_3|C_3)\right] + d\left[b\varphi(e_2|e_1|C_3) + e\varphi(e_2|e_2|C_3) + h\varphi(e_2|e_3|C_3)\right] \\ &\quad + g\left[b\varphi(e_3|e_1|C_3) + e\varphi(e_3|e_2|C_3) + h\varphi(e_3|e_3|C_3)\right] \\ &= ae\varphi(e_1|e_2|C_3) + ah\varphi(e_1|e_3|C_3) + db\varphi(e_2|e_1|C_3) + dh\varphi(e_2|e_3|C_3) + gb\varphi(e_3|e_1|C_3) + ge\varphi(e_3|e_2|C_3) \end{aligned}$$

Comme $C_3 = ce_1 + fe_2 + ie_3$, en utilisant encore une fois la linéarité par rapport à la troisième colonne, on obtient

$$\begin{aligned}
\varphi(A) &= ae\left[c\varphi(e_1|e_2|e_1) + f\varphi(e_1|e_2|e_2) + i\varphi(e_1|e_2|e_3)\right] \\
&\quad + ah\left[c\varphi(e_1|e_3|e_1) + f\varphi(e_1|e_3|e_2) + i\varphi(e_1|e_3|e_3)\right] \\
&\quad + db\left[c\varphi(e_2|e_1|e_1) + f\varphi(e_2|e_1|e_2) + i\varphi(e_2|e_1|e_3)\right] \\
&\quad + dh\left[c\varphi(e_2|e_3|e_1) + f\varphi(e_2|e_3|e_2) + i\varphi(e_2|e_3|e_3)\right] \\
&\quad + gb\left[c\varphi(e_3|e_1|e_1) + f\varphi(e_3|e_1|e_2) + i\varphi(e_3|e_1|e_3)\right] \\
&\quad + gh\left[c\varphi(e_3|e_3|e_1) + f\varphi(e_3|e_3|e_2) + i\varphi(e_3|e_3|e_3)\right] \\
&= aei\varphi(e_1|e_2|e_3) + ahf\varphi(e_1|e_3|e_2) + dbi\varphi(e_2|e_1|e_3) + dhc\varphi(e_2|e_3|e_1) + gbf\varphi(e_3|e_1|e_2) + gec\varphi(e_3|e_2|e_1)
\end{aligned}$$

- Prenons $a = e = i = h = f = 1$ et $b = c = d = g = 0$, alors le calcul précédent mène à :
$$0 = \varphi\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \varphi(e_1|e_2|e_3) + \varphi(e_1|e_3|e_2)$$
Ainsi, $\varphi(e_1|e_3|e_2) = -\varphi(e_1|e_2|e_3) = -\varphi(I_3)$.
- De même, $\varphi(e_2|e_1|e_3) = -\varphi(I_3)$ (avec $a = e = i = d = b = 1$, $c = f = g = h = 0$)
- De même $\varphi(e_3|e_2|e_1) = -\varphi(I_3)$ (avec $a = e = i = g = c = 1$ et $b = d = f = h = 0$)
- $\varphi(e_2|e_3|e_1) = -\varphi(e_1|e_3|e_2) = \varphi(I_3)$ (avec $d = h = c = a = f = 1$ et $b = e = i = g = 0$)
- De même, $\varphi(e_3|e_1|e_2) = \varphi(I_3)$.

Ainsi, $\varphi(A) = (aei - ahf - dbi + dhc + gbf - gec)\varphi(I_3) = \det(A)\varphi(I_3)$. Et ce pour tout $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$, ainsi, φ est proportionnelle à det. De plus, si $\varphi(I_3) = 1$, $\varphi = \det$, d'où l'unicité. ■

3 Déterminant en dimension n

3.1 Existence du déterminant et premières propriétés

Définition d'une forme n-linéaire et alternée

Soit $f\colon \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, on dit que f est

1. **n-linéaire** si pour tout $M = (C_1|C_2|\dots|C_n) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$,
$$\begin{cases} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K} \\ \quad X \longmapsto f(C_1|\dots|C_{i-1}|X|C_{i+1}|\dots|C_n) \end{cases} \text{est linéaire.}$$
2. **alternée** : si pour tout $M = (C_1|\dots|C_n) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et s'il existe $i \neq j$ avec $C_i = C_j$, alors $f(M) = 0$.

Théorème n° 1 : existence et unicité du déterminant dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *(admis)*

Il existe une unique fonction $f\colon \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ alternée, n-linéaire telle que $f(I_n) = 1$, f est notée det et est appelée **déterminant**. De plus, toute fonction n-linéaire et alternée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ est proportionnel à det.

Remarque 2. Si $A = (a) \in \mathscr{M}_1(\mathbb{K})$, $\det(A) = a$.

Proposition n° 6 : propriétés du déterminant

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

1. Si deux colonnes de A sont égales, alors $\det(A) = 0$.
2. Si une colonne de A est nulle, alors $\det(A) = 0$.
3. Si M est obtenue en multipliant une colonne de A par λ, alors $\det(M) = \lambda\det(A)$
4. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
5. Si M est obtenue en échangeant deux colonnes de A alors $\det(M) = -\det(A)$.
6. Si M est obtenue en faisant $C_i \leftarrow C_i + \sum\limits_{j \neq i} \lambda_j C_j$ à A alors $\det(M) = \det(A)$ (ajouter à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes ne change pas le déterminant).

Péril imminent : le déterminant n'est pas linéaire

En général, $\det(\lambda A) \neq \lambda \det(A)$, $\det(A+B) \neq \det(A)+\det(B)$. Prendre $A = E_{1,1}$ et $B = E_{2,2} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

Proposition n° 7 : déterminant d'une matrice triangulaire

Si $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire (voire diagonale), $\det(T) = \prod_{i=1}^{n} T_{i,i} = T_{1,1}T_{2,2}\dots T_{n,n}$

Démonstration de la proposition n° 7 : On va supposer que T est triangulaire supérieure. En utilisant d'abord la linéarité par rapport à la première colonne, puis en effectuant des opérations pour faire apparaître des 0 sur la première ligne, puis en utilisant la linéarité par rapport à la seconde colonne etc, on obtient

$$\begin{aligned}
\det(T) &= \begin{vmatrix} T_{1,1}\times 1 & T_{1,2} & \dots & T_{1,n} \\ T_{1,1}\times 0 & T_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ T_{1,1}\times 0 & \dots & 0 & T_{n,n} \end{vmatrix} = T_{1,1}\begin{vmatrix} 1 & T_{1,2} & \dots & T_{1,n} \\ 0 & T_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & T_{n,n} \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2\leftarrow C_2-T_{1,2}C_1 \\ C_3\leftarrow C_3-T_{1,3}C_3 \\ \vdots \\ C_n\leftarrow C_n-T_{1,n}C_1}}{=} T_{1,1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T_{2,2} & T_{2,3} & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & T_{n,n} \end{vmatrix} \\
&= T_{1,1}T_{2,2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & T_{2,3} & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & T_{n,n} \end{vmatrix} = \dots = T_{1,1}T_{2,2}\dots T_{n,n}\det(I_n) = T_{1,1}T_{2,2}\dots T_{n,n}
\end{aligned}$$

Pour résumer ce que l'on fait, à l'étape i, on sort le $T_{i,i}$ par linéarité par rapport à la i-ème colonne. Puis on utilise le 1 à la i-ème ligne, i-ème colonne comme pivot, pour éliminer le reste de la ligne. Puis on passe à l'étape $i+1$. ■

Exemple 1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} =$

Proposition n° 8 : déterminant du produit et de l'inverse

Soient $M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ on a :

1. $\det(MN) = \det(M)\det(N)$
2. $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ssi $\det(M) \neq 0$
3. $\mathrm{rg}(M) < n$ ssi si $\det(M) = 0$.
4. Si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\det(M^{-1}) = \det(M)^{-1}$

Exemple 2. Une matrice triangulaire est inversible ssi tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Proposition n° 9 : une matrice et sa transposée ont même déterminant *(admis)*

Pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ $\det(M^\top) = \det(M)$

Le déterminant est linéaire par rapport à chacune de ses lignes, et alternée en ses lignes.

3.2 Développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne

Définition des mineurs d'une matrice

Soient $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $(i,j) \in [\![1\,; n]\!]^2$. On note $\Delta_{i,j}$, le mineur d'indice (i,j), *i.e* le déterminant de la matrice, de taille $n-1$, où on a enlevé la i-ème ligne et la j-ème colonne de M.

Théorème n° 2 : développement d'une matrice selon une ligne ou une colonne *(admis)*

Soit $M = (M_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

- Soit $i \in [\![1\,; n]\!]$, on peut développer $\det(M)$ suivant la i-ième ligne : $\det(M) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} M_{i,j} \Delta_{i,j}$
- Soit $j \in [\![1\,; n]\!]$, on peut développer $\det(M)$ suivant la j-ième colonne : $\det(M) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} M_{i,j} \Delta_{i,j}$

Remarque 3. Faire apparaître des 0 sur une ligne ou une colonne permet de calculer un déterminant en développant sur cette ligne/colonne.

Exemple 3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} =$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$

4 Déterminant d'une famille de vecteurs et d'un endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathscr{B}$ une base de E.

Définition déterminant d'une famille de vecteurs

Soit $\mathscr{F} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E. On appelle déterminant de $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$, le déterminant de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$, on le note $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$.

Proposition n° 10 : propriétés du déterminant d'une famille de vecteurs

Soit $\mathscr{F} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E de dimension n, alors :

- $\mathscr{F} \mapsto \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$ est n-linéaire alternée et $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$.
- Si $f\colon E^n \to \mathbb{K}$ est n-linéaire et alternée, alors f est proportionnel à $\det_{\mathscr{B}}$.
- Si $f\colon E^n \to \mathbb{K}$ est n-linéaire et alternée et $f(\mathscr{B}) = 1$, alors $f = \det_{\mathscr{B}}$.
- Si $\mathscr{B}'$ base de E, alors $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{F}) = \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$
- $\mathscr{F}$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) \neq 0$.
- $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = 0$ si et seulement si $\mathscr{F}$ est une famille liée.

Exemple 4. Pour tout u, $v \in \mathbb{K}^2$ on a :

$$\det(u, v) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \lambda \in \mathbb{K} \quad u = \lambda v \quad \text{ou} \quad v = \lambda u \tag{6}$$

Exemple 5. La famille $\mathscr{B}' = (X^2, X^2 + 2, X^2 + X + 3)$ est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$? Comparer $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$ et $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}')$.

Définition du déterminant d'un endomorphisme

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, $\det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f))$ ne dépend pas du choix de la base $\mathscr{B}$, on note $\det(f)$ cet élément.

Exemple 6. Quel est le déterminant de l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$: $\varphi\colon M \mapsto M^\top$?.

Proposition n° 11 déterminant de la composée et de l'inverse

Soient f, $g \in \mathscr{L}(E)$:

- $\det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)$
- f est bijective si et seulement si $\det(f) \neq 0$. Dans ce cas $\det(f^{-1}) = \det(f)^{-1}$.

5 Méthodes

Échelonner

On effectue des opérations sur les lignes et les colonnes jusqu'à la rendre triangulaire et en calculer son déterminant.

Faire apparaître pleins de zéros

Par des opérations sur les lignes et les colonnes, on peut faire apparaître un maximum de zéros avant de développer sur la ligne ou la colonne qui en a le plus.

Raisonner par récurrence

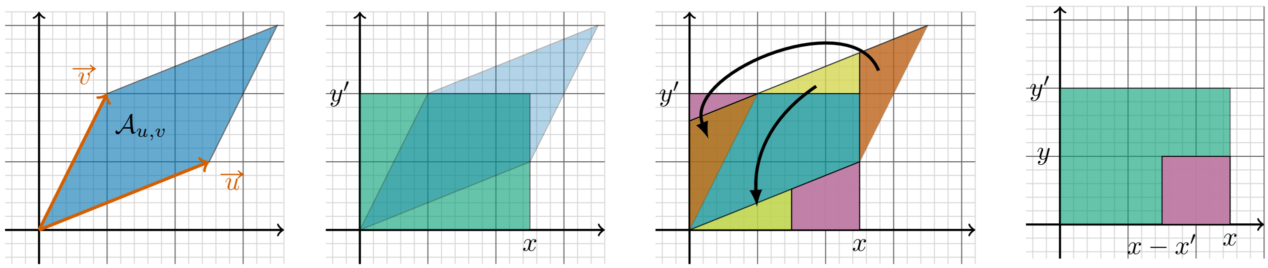
Essayer d'exprimer un déterminant en dimension n en fonction du même déterminant en dimension $n-1$ puis procéder par récurrence.

À quoi ça sert le déterminant ?

Savoir si une matrice est inversible, savoir si un endomorphisme en dimension finie est un automorphisme, savoir si une famille de n vecteurs dans un espace vectoriel de dimension finie n est une base.

6 Interprétation du déterminant

Proposition n° 12 : aire du parallélogramme et valeur absolue du déterminant
Soient u et $v \in \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{A}_{u,v}$ l'aire du parallélogramme engendré par u et v, alors $\mathcal{A}_{u,v} = |\det(u,v)|$.



(a) Le parallélogramme formé par $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$.

(b) En vert, le rectangle d'aire xy'.

(c) Le parallélogramme, découpé en morceaux, inséré dans le rectangle. Ainsi $\mathcal{A}_{u,v} = xy' - \mathcal{A}_{\text{violet}}$.

(d) Après un dernier découpage, l'aire en violet vaut $x'y$.

FIGURE 1 – Démonstration de la formule dans le cas où $x \geqslant x'$ et $y' \geqslant y$. Les autres cas sont similaires.

Remarque 4. Sans la valeur absolue, le déterminant renvoie l'aire « algébrique »du parallélogramme. Plus précisément, $\det(u, v)$ est positif (respectivement négatif) si l'angle (u, v) est direct (respectivement indirect).

Remarque 5. De même qu'en dimension 2, $|\det(u, v, w)| = \mathcal{V}(u, v, w)$ (voir figure 2).

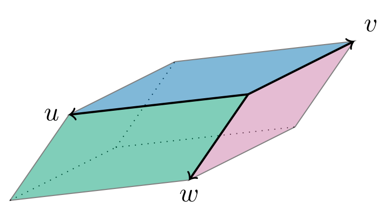
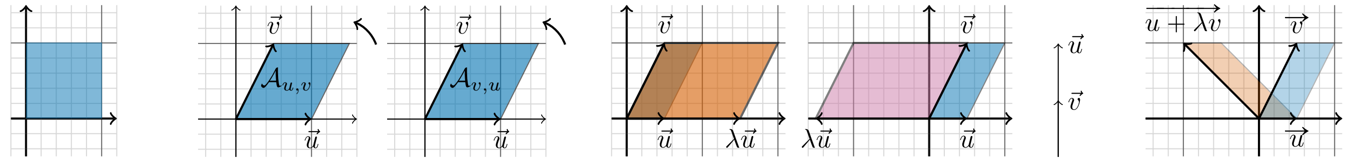


FIGURE 2 – Parallélépipède formé par u, v et w trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Remarque 6. Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. La famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ engendre un parallélépipède en dimension n de volume 1, et $\det(f) = \det_{\mathscr{B}}((f(e_1), \dots, f(e_n))$ est le volume du parallélépipède $f(e_1), \dots, f(e_n))$. Le déterminant indique de combien l'application f a multiplié le volume.



(a) Illustration de (1)

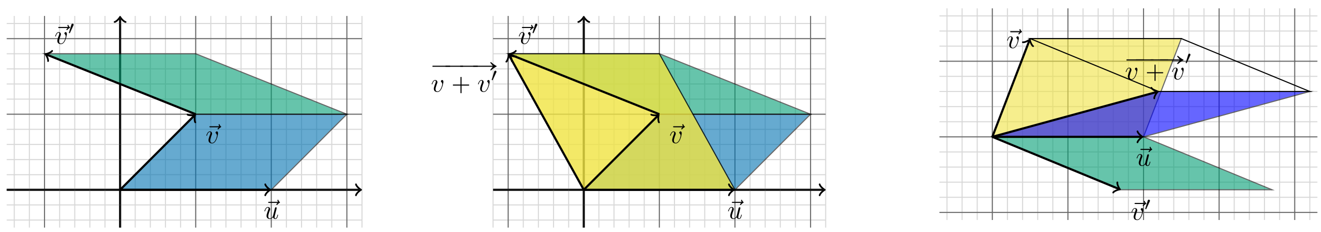
(b) Illustration de (2)

(c) Illustration de (3)

(d) Illustration de (6)

(e) Illustration de (5)

FIGURE 3 – Illustration des propriétés algébriques (1), (2), (3), (6) et (5) du déterminant avec les aires des parallélogrammes correspondants, (4) est illustrée figure 4. À la figure 3a, l'aire du carré de côté 1 vaut 1.
À la figure 3b, si on échange u et v dans le déterminant, l'aire du parallélogramme est la même, mais l'orientation est inversée. Ici, $\det(\vec{u},\vec{v}) \geqslant 0$ tandis que $\det(\vec{v},\vec{u}) \leqslant 0$.
L'aire du parallélogramme engendré par λu et v vaut $|\lambda|$ fois celui engendré par u et v. Le parallélogramme orange ($\lambda \geqslant 0$) et violet ($\lambda \leqslant 0$) ont même aire mais une orientation différente.
À la figure 3d, lorsque deux vecteurs sont colinéaires, le parallélogramme qu'ils engendrent a une aire nulle.
À la figure 3e, les deux parallélogrammes ont $\vec{u}$ comme base commune et ont même hauteur donc même aire.



(a) En bleu, un parallélogramme définie par u et v, en vert un parallélogramme définie par u et v'.

(b) En jaune, un parallélogramme définie par u et $v+v'$. On a $\mathcal{A}_{u,v+v'} = \mathcal{A}_{u,v} + \mathcal{A}_{u,v'}$. Tout étant direct : $\det(u, v+v') = \det(u,v) + \det(u,v')$.

(c) Attention, si (u,v) et (u,v') n'ont pas le même sens : $\mathcal{A}_{u,v+v'} \neq \mathcal{A}_{u,v} + \mathcal{A}_{u,v'}$. Ici on a $\mathcal{A}_{u,v+v'} = \mathcal{A}_{u,v} - \mathcal{A}_{u,v'}$ et $\det(u,v+v') = \det(u,v) + \det(u,v')$.

FIGURE 4 – Addition des aires des parallélogrammes si même orientation, soustraction des aires des parallélogrammes sinon. Finalement, le déterminant est une notion qui se comporte mieux que l'aire, car $\det(u, v+v') = \det(u,v) + \det(u,v')$ est toujours vraie contrairement à $\mathcal{A}_{u,v+v'} = \mathcal{A}_{u,v} + \mathcal{A}_{u,v'}$.

7 Complément (hors programme) : calcul de $\det(A+\lambda B)$

Notons $A = (C_1, C_2, \dots, C_n)$, $B = (\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots, \tilde{C}_n) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices données par leurs colonnes et $\lambda \in \mathbb{K}$. Comme le déterminant n'est pas linéaire, on sait que $\det(A+\lambda B)$ peut être différent de $\det(A) + \lambda \det(B)$. Dans ces conditions, comment calculer $\det(A+\lambda B)$?
Avant de donner le cas général, prenons le cas de $A = (C_1, C_2) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ et $B = (\tilde{C}_1, \tilde{C}_2) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, alors, en utilisant la linéarité par rapport à la première colonne, puis par rapport à la deuxième on obtient (on indique en rouge la colonne par rapport à laquelle on va utiliser la linéarité).

$$\begin{aligned}
\det(A+\lambda B) &= \det(\color{orange}{C_1 + \lambda \tilde{C}_1}\color{black}{}, C_2 + \lambda \tilde{C}_2) \\
&= \det(C_1, \color{orange}{C_2 + \lambda \tilde{C}_2}\color{black}{}) + \lambda \det(\tilde{C}_1, \color{orange}{C_2 + \lambda \tilde{C}_2}\color{black}{}) \\
&= \det(C_1, C_2) + \lambda \det(C_1, \tilde{C}_2) + \lambda \det(\tilde{C}_1, C_2) + \lambda^2 \det(\tilde{C}_1, \tilde{C}_2) \\
&= \det(A) + \lambda \left[\det(C_1, \tilde{C}_2) + \det(\tilde{C}_1, C_2)\right] + \lambda^2 \det(B)
\end{aligned}$$

Prenons maintenant le cas de $A = (C_1, C_2, C_3) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ et $B = (\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$

$$\begin{aligned}
\det(A + \lambda B) &= \det(C_1 + \lambda \tilde{C}_1, C_2 + \lambda \tilde{C}_2, C_3 + \lambda \tilde{C}_3) \\
&= \det(C_1, C_2 + \lambda \tilde{C}_2, C_3 + \lambda \tilde{C}_3) + \lambda \det(\tilde{C}_1, C_2 + \lambda \tilde{C}_2, C_3 + \lambda \tilde{C}_3) \\
&= \det(C_1, C_2, C_3 + \lambda \tilde{C}_3) + \lambda \det(C_1, \tilde{C}_2, C_3 + \lambda \tilde{C}_3) + \lambda \det(\tilde{C}_1, C_2, C_3 + \lambda \tilde{C}_3) \\
&\quad + \lambda^2 \det(\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, C_3 + \lambda \tilde{C}_3) \\
&= \det(C_1, C_2, C_3) + \lambda \det(C_1, C_2, \tilde{C}_3) + \lambda \det(C_1, \tilde{C}_2, C_3) + \lambda^2 \det(C_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3) + \lambda \det(\tilde{C}_1, C_2, C_3) \\
&\quad + \lambda^2 \det(\tilde{C}_1, C_2, \tilde{C}_3) + \lambda^2 \det(\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, C_3) + \lambda^3 \det(\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3) \\
&= \det(A) + \lambda \left[\det(C_1, C_2, \tilde{C}_3) + \det(C_1, \tilde{C}_2, C_3) + \det(\tilde{C}_1, C_2, C_3)\right] \\
&\quad + \lambda^2 \left[\det(C_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3) + \det(\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, C_3) + \det(\tilde{C}_1, C_2, \tilde{C}_3)\right] + \lambda^3 \det(B)
\end{aligned}$$

Les termes devant le λ sont donc des déterminants de matrices qui contiennent deux colonnes de A et une colonne de B. Les termes devant le λ^2 sont des déterminants de matrices qui contiennent une colonne de A et deux colonnes de B.
Le cas général, consistera donc à développer selon chaque colonne, on aura ainsi une somme de déterminant de matrices où chaque matrice aura des colonnes de A et des colonnes de B. Soit $k \in [\![0 ; n]\!]$, et $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$, on note $M_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ la matrice A à laquelle on a remplacé la i_j-ième colonne de A par la i_j-ième colonne de B. Alors on peut montrer que : [1]

$$\begin{aligned}
\det(A + \lambda B) = \det(C_1 + \lambda \tilde{C}_1, C_2 + \lambda \tilde{C}_2, \ldots, C_n + \lambda \tilde{C}_n) &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \lambda^k \det(M_{i_1, i_2, \ldots, i_k}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \lambda^k \det(\ldots, \tilde{C}_{i_1}, \ldots, \tilde{C}_{i_2}, \ldots, \tilde{C}_{i_k}, \ldots)
\end{aligned}$$

En fait quand on développe en utilisant la linéarité, on se retrouve avec une somme de déterminant de matrices, dont les colonnes sont soient celles de A soient celles de B, l'indice k représente le nombre de colonnes de B utilisées. Afin de mieux visualiser cette formule, on peut écrire les premiers et derniers termes

$$\begin{aligned}
\det(A + \lambda B) &= \underbrace{\det(C_1, C_2, \ldots, C_n)}_{k=0} + \underbrace{\lambda \sum_{i=1}^{n} \det(C_1, \ldots, \tilde{C}_i, \ldots, C_n)}_{k=1} + \underbrace{\lambda^2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \det(\ldots, \tilde{C}_i, \ldots, \tilde{C}_j, \ldots)}_{k=2} \\
&\quad + \underbrace{\lambda^3 \sum_{1 \leqslant i < j < \ell \leqslant n} \det(\ldots, \tilde{C}_i, \ldots, \tilde{C}_j, \ldots, \tilde{C}_\ell, \ldots)}_{k=3} + \ldots + \underbrace{\lambda^n \det(\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \ldots, \tilde{C}_n)}_{k=n} \\
&= \det(A) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \det(C_1, \ldots, \tilde{C}_i, \ldots, C_n) + \lambda^2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \det(\ldots, \tilde{C}_i, \ldots, \tilde{C}_j, \ldots) \\
&\quad + \lambda^3 \sum_{1 \leqslant i < j < \ell \leqslant n} \det(\ldots, \tilde{C}_i, \ldots, \tilde{C}_j, \ldots, \tilde{C}_\ell, \ldots) + \ldots + \lambda^n \det(B)
\end{aligned}$$

1. Les plus exigeants voudront une preuve, qu'à cela ne tienne : c'est une récurrence finie avec l'hypothèse $\mathscr{P}(p)$: «$\det(A + \lambda B) = \sum_{k=0}^{p} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant p} \lambda^k \det(\ldots, \tilde{C}_{i_1}, \ldots, \tilde{C}_{i_k}, \ldots, C_{p+1} + \lambda \tilde{C}_{p+1}, \ldots, C_n + \lambda \tilde{C}_n)$, $\mathscr{P}(1)$ se montre en utilisant la linéarité par rapport à la première colonne. Pour $p \in [\![1 ; n-1]\!]$, on suppose $\mathscr{P}(p)$ vraie, et on utilise la linéarité par rapport à la $p+1$-ième colonne (la colonne à partir duquel il reste encore une combinaison linéaire des colonnes de A et B).