

Révision 7 (algèbre linéaire)

Soit $f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (5x + y, x + 5y) \end{cases}$ et \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^2 .

1. Montrer que f est un endomorphisme de \mathbb{R}^2 .
2. Calculer le noyau de f . Que peut-on en déduire sur f ?
3. Déterminer une base de $\text{Ker}(f - 6\text{Id}_{\mathbb{R}^2})$ ainsi qu'une base de $\text{Ker}(f - 4\text{Id}_{\mathbb{R}^2})$ (on résoudra un système linéaire).
4. Démontrer que ces deux noyaux sont supplémentaires.
5. Démontrer que la concaténation des deux bases trouvées à la question 3, notée \mathcal{B}' , est une base de \mathbb{R}^2 .
6. Déterminer $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
7. Déterminer $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.
8. Donner une relation entre A et D puis en déduire un calcul explicite de A^p pour $p \in \mathbb{N}$.
9. Déterminer l'expression de la projection sur $\text{Ker}(f - 6\text{Id}_{\mathbb{R}^2})$ parallèlement à $\text{Ker}(f - 4\text{Id}_{\mathbb{R}^2})$, notée p , ainsi que la symétrie par rapport à $\text{Ker}(f - 6\text{Id}_{\mathbb{R}^2})$ parallèlement à $\text{Ker}(f - 4\text{Id}_{\mathbb{R}^2})$, notée s .
10. Déterminer $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$ et $C = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(s)$. Puis sans aucun calcul, donner la valeur de B^2 et C^2 .
11. Déterminer également, sans aucun calcul, $B' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(p)$ et $C' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(s)$