Révision 7 (algèbre linéaire)

Soit $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto (5x+y, x+5y) \end{cases}$ et $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x',y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\lambda(x,y)+(x',y')) &= f(\lambda x + x', \lambda y + y') = (5(\lambda x + x') + (\lambda y + y'), (\lambda x + x') + 5(\lambda y + y')) \\ &= (5\lambda x + 5x' + \lambda y + y', \lambda x + x' + 5\lambda y + 5y') \\ &= \lambda(5x+y, x+5y) + (5x'+y', x'+5y') = \lambda f(x,y) + f(x',y') \end{aligned}$$

   De plus, $f(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi, $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$.

2. Soit $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors :

$$\begin{aligned} u \in \mathrm{Ker}(f) &\iff f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} 5x+y &= 0 \\ x+5y &= 0 \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 5L_2}{\iff} \begin{cases} -24y &= 0 \\ x &= -5y \end{cases} \\ &\iff x = y = 0 \iff u = (0,0) \end{aligned}$$

   Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) = \{(0,0)\}$, on en déduit que f est injective, comme f est un endomorphisme en dimension finie, on en déduit que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

3. Soit $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors :

$$\begin{aligned} u \in \mathrm{Ker}(f - 6\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) &\iff (f - 6\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})(x,y) = (0,0) \iff f(x,y) - 6(x,y) = (0,0) \\ &\iff (-x+y, x-y) = (0,0) \iff \begin{cases} -x+y &= 0 \\ x-y &= 0 \end{cases} \iff y = x \\ &\iff u = (x,x) = x(1,1) \iff u \in \mathrm{vect}((1,1)) \end{aligned}$$

   On en déduit que $\mathrm{Ker}(f - 6\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) = \mathrm{vect}((1,1))$. Ainsi, $((1,1))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(f - 6\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$, comme $(1,1)$ n'est pas le vecteur nul, on en déduit que $((1,1))$ est une base de $\mathrm{Ker}(f - 6\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$.
   Procédons de même, soit $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors :

$$\begin{aligned} u \in \mathrm{Ker}(f - 4\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) &\iff (f - 4\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})(x,y) = (0,0) \iff f(x,y) - 4(x,y) = (0,0) \\ &\iff (x+y, x+y) = (0,0) \iff \begin{cases} x+y &= 0 \\ x+y &= 0 \end{cases} \iff y = -x \\ &\iff u = (x,-x) = x(1,-1) \iff u \in \mathrm{vect}((1,-1)) \end{aligned}$$

   On en déduit que $\mathrm{Ker}(f - 4\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) = \mathrm{vect}((1,-1))$. Ainsi, $((1,-1))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(f - 4\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$, comme $(1,-1) \neq (0,0)$, on en déduit que $((1,1))$ est une base de $\mathrm{Ker}(f - 4\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$

4. Soit $(x,y) \in \mathrm{Ker}(f - 6\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) \cap \mathrm{Ker}(f - 4\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$, alors $f(x,y) = 6(x,y)$ et $f(x,y) = 4(x,y)$, par différence, $2(x,y) = (0,0)$, ainsi $(x,y) = (0,0)$. Dès lors, $\mathrm{Ker}(f - 6\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) \cap \mathrm{Ker}(f - 4\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) \subset \{(0,0)\}$, comme l'inclusion réciproque est toujours vraie, on en déduit que la somme est directe. De plus, en utilisant le cardinal des bases trouvées à la question précédente :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f - 6\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})) + \dim(\mathrm{Ker}(f - 4\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})) = 1 + 1 = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$$

   D'après le cours, on peut en déduire que ces deux noyaux sont bien supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

5. La concaténation de deux bases de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$ est, d'après le cours, une base de $\mathbb{R}^2$. Notons $e_1' = (1,1)$ et $e_2' = (1,-1)$ ainsi $\mathscr{B}' = (e_1', e_2')$, est une base de $\mathbb{R}^2$ et même adaptée à $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Ker}(f - 6\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) \bigoplus \mathrm{Ker}(f - 4\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$.

6. Posons $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$ les vecteurs de la base canonique, ainsi :
   - $f(e_1) = f(1,0) = (5,1) = 5(1,0) + 1(0,1) = 5e_1 + 1e_2$
   - $f(e_2) = f(0,1) = (1,5) = 1(1,0) + 5(0,1) = 1e_1 + 5e_2$

   Ainsi, $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

7. Décomposons $f(e_1')$ et $f(e_2')$ dans la base $\mathscr{B}'$:
   - $f(e_1') = f(1,1) = (6,6) = 6(1,1) + 0(1,-1) = 6e_1' + 0e_2'$
   - $f(e_2') = f(1,-1) = (4,-4) = 0(1,1) + 4(1,-1) = 0e_1' + 4e_2'$

   Ainsi, $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

8. D'après la formule de changement de base, $A = PDP^{-1}$, avec $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$, comme $\mathscr{B}' = ((1,1),(1,-1))$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. De plus, pour tout [1] $p \in \mathbb{N}$,

$$A^p = PD^pP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6^p & 0 \\ 0 & 4^p \end{pmatrix} \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6^p + 4^p & 6^p - 4^p \\ 6^p - 4^p & 6^p + 4^p \end{pmatrix}$$

Remarque 1. Notons que si $p = -1$ (ou si $p \in \mathbb{Z}_-$), la formule donnée est encore vraie, car $D^p = \begin{pmatrix} 6^p & 0 \\ 0 & 4^p \end{pmatrix}$, est vraie aussi si $p = -1$ (ou si $p \in \mathbb{Z}_-$).

9. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors comme $\mathscr{B}'$ est une base, il existe un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$(x, y) = \alpha e_1' + \beta e_2' = (\alpha + \beta, \alpha - \beta)$$

par identification $x = \alpha+\beta$, et $y = \alpha-\beta$. Alors par demi-somme et demi-différence, $\alpha = (x+y)/2$ et $\beta = (x-y)/2$, ainsi

$$(x, y) = \frac{x+y}{2} e_1' + \frac{x-y}{2} e_2' \qquad \text{avec} \quad \frac{x+y}{2} e_1' \in \mathrm{Ker}(f - 6\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) \quad \text{et} \quad \frac{x-y}{2} e_2' \in \mathrm{Ker}(f - 4\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$$

ainsi,

$$p(x, y) = \frac{(x+y)}{2} e_1' = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2} \right) \qquad \text{et} \qquad s(x, y) = \frac{x+y}{2} e_1' - \frac{x+y}{2} e_2' = (y, x)$$

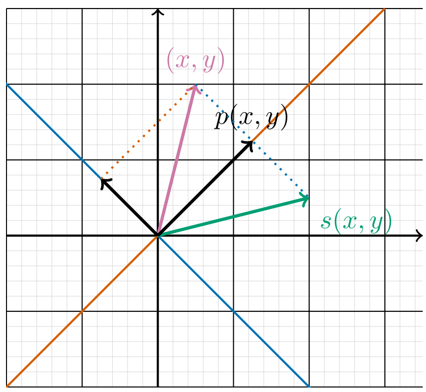

FIGURE 1 – En rouge le noyau de $f - 6\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$, en bleu le noyau de $f - 4\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

10.
   - $p(e_1) = p(1, 0) = (1/2, 1/2) = 1/2(1, 0) + 1/2(0, 1)$
   - $p(e_2) = p(0, 1) = (1/2, 1/2) = 1/2(1, 0) + 1/2(0, 1)$

   Ainsi, $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. De même,
   - $s(e_1) = p(1, 0) = (0, 1) = 0(1, 0) + 1(0, 1)$
   - $s(e_2) = s(0, 1) = (1, 0) = 1(1, 0) + 0(0, 1)$

   Ainsi, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Comme $p \circ p = p$, $B^2 = B$ et comme $s \circ s = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$, $C^2 = I_2$ (ce qu'un calcul matriciel confirme).

11. $p(e_1') = e_1' = 1e_1' + 0e_2'$, $p(e_2') = 0 = 0e_1' + 0e_2'$, $s(e_1') = e_1' = 1e_1' + 0e_2'$, $s(e_2') = -e_2' = 0e_1' + (-1)e_2'$, ainsi $B' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $C' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Remarque 2. D'après la formule de changement de base, $B = PB'P^{-1}$ et $C = PC'P^{-1}$.

1. Je vous conseille de vérifier la cohérence de vos calculs avec $p = 0$ et $p = 1$.