Révision 8 : vrai ou faux ?

Vrai ou faux ? E est un espace vectoriel de dimension finie n et $\mathscr{F}$ une famille finie de vecteurs. Donner un contre-exemple si c'est faux.

1. Si $\mathscr{F}$ est une base de E, alors $\dim(\mathscr{F}) = \dim(E)$.
2. Si $\mathscr{F}$ est une base de E, alors $|\mathscr{F}| = \dim(E)$.
3. Si $\mathscr{F}$ est une base de E, alors $|\mathscr{F}| = |E|$.
4. Si $|\mathscr{F}| = n$ alors $\mathscr{F}$ est une base de E.
5. Si $|\mathscr{F}| = n$ et $\mathscr{F}$ est libre, alors $\mathscr{F}$ est une base de E.
6. Si $|\mathscr{F}| = n$ et $\mathscr{F}$ est une famille génératrice, alors $\mathscr{F}$ est une base de E.
7. Si $\mathscr{F}$ est libre, alors $|\mathscr{F}| \leqslant n$.
8. Si $|\mathscr{F}| \leqslant n$, alors $\mathscr{F}$ est libre.
9. Si $\mathscr{F}$ ne contient pas le vecteur nul, alors $\mathscr{F}$ est libre.
10. Si $\mathscr{F}$ est libre, alors $\mathscr{F}$ ne contient pas le vecteur nul.
11. Si les vecteurs de $\mathscr{F}$ sont deux à deux non colinéraires, alors $\mathscr{F}$ est libre.
12. Si $\mathscr{F}$ est libre, alors les vecteurs de $\mathscr{F}$ sont deux à deux non colinéaires.
13. E et (0_E) sont des familles libres de E.
14. $\dim(\{0_E\}) = 1$.
15. Si $x \in E$, $\dim(\text{vect}(x)) = 1$.
16. Si $(x, y) \in E^2$, $\dim(\text{vect}(x, y)) = 2$.
17. $\mathscr{F}$ est libre ssi $\text{rg}(\mathscr{F}) = n$.
18. Si $\mathscr{F}$ est une famille de polynômes dont les degrés sont deux à deux différents, alors $\mathscr{F}$ est libre.
19. Si $|\mathscr{F}| > n$, alors la famille est liée.
20. Si $\mathscr{F}$ est liée, alors $|\mathscr{F}| > n$.
21. Si $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E, alors $|\mathscr{F}| \geqslant n$.
22. Si $|\mathscr{F}| \geqslant n$, alors $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E.
23. Si $\mathscr{F} = ((1, 1, 2), (3, 3, 3), (2, 2, 1))$ (famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$), alors $\text{rg}(\mathscr{F}) = 2$.
24. Si F est un SEV de E, alors $F + F = F$ et $F + E = E$.
25. Si F et G sont deux SEV de E, alors $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G)$.
26. Si F et G sont deux SEV de E tels que $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$, alors F et G sont supplémentaires.