Révision 9 (algèbre linéaire 2)

La question 11 est plus technique et ne fait pas vraiment partie des révisions.

Soit $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto (5x+y+6z, x+5y+6z, 6x+6y+12z) \end{cases}$ et $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On admet que f est un endomorphisme[1] de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer A, la matrice de f dans la base canonique.
2. Calculer le rang de A, le rang $A-4I_3$ et celui de $A-18I_3$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(A)$, une base de $\mathrm{Ker}(A-4I_3)$, ainsi qu'une base de $\mathrm{Ker}(A-18I_3)$.
   Il est conseillé de ne pas chercher forcément à résoudre un système linéaire, mais chercher des vecteurs dans les noyaux en exhibant une relation entre les colonnes des matrices concernées.
4. Démontrer que la concaténation des trois bases trouvées à la question précédente, notée $\mathscr{B}'$, est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$.
6. Déterminer explicitement P, la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Déterminer aussi explicitement la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$.
7. Donner une relation entre A et D puis en déduire un calcul explicite de A^p pour $p \in \mathbb{N}$.
8. Proposer une matrice Δ tel que $\Delta^2 = D$.
9. En déduire une matrice R tel que $R^2 = A$ (on dit que R est une racine carrée de A.
   Exprimer R en fonction de P et P^{-1} sans chercher à calculer explicitement R.
10. Combien de racines carrées de A pouvez-vous trouver ?
    De même, ne pas calculer explicitement ces matrices, les laisser sous forme de produit matriciel.

Le but de la question 11 est de montrer que ces quatre matrices sont bien deux à deux différentes et que ce sont les seules possibles.

11. (a) Pour $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$, on définit la trace de M, par

$$\mathrm{tr}(M) = \sum_{k=1}^{3} M_{k,k} = M_{1,1} + M_{2,2} + M_{3,3}$$

    Démontrer que, pour tout $(M,N) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})^2$, $\mathrm{tr}(MN) = \mathrm{tr}(NM)$.

    (b) En déduire que si deux matrices B et B' sont semblables, alors $\mathrm{tr}(B') = \mathrm{tr}(B')$.

    On va maintenant prouver que les quatre racines carrées trouvées à la question 10 sont bien toutes différentes.

    (c) Que valent les traces des quatre racines carrées de A trouvées à la question 10 ? En déduire que ces quatre matrices sont bien deux à deux distinctes.

    On va maintenant prouver que seules les quatre matrices trouvées sont possibles. Soit R une racine carrée de A quelconque. On a donc $R^2 = A$, et on pose $\Delta = P^{-1}RP$.

    (d) Calculer Δ^2.

    (e) Démontrer que Δ et D commutent.

    (f) On note $C(D)$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec D. Démontrer que $C(D)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $C(D)$.

    (g) En déduire les valeurs possibles de Δ et conclure sur le nombre exact des racines carrées de A.

1. Car similaire à la feuille de révision précédente, mais si vous n'êtes pas au point, montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.